1 Números enteros

INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números enteros* son los números naturales precedidos de los signos $+$ y $-$. El mayor de dos números naturales se sitúa siempre más a la derecha en la recta numérica.
- Podemos realizar *operaciones* aritméticas con los números enteros: sumar, restar, multiplicar y dividir.
- Los *múltiplos de un número* contienen al número una cantidad exacta de veces. Los *divisores de un número* son aquellos que caben exactamente en él una serie de veces.
- Un *número primo* solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad. Los números que tienen más de dos divisores se llaman *compuestos*.
- *Descomponer* un número *en factores primos* es expresar dicho número como producto de distintos números primos elevados a exponentes.
- El *máximo común divisor* (m.c.d.) de dos números es el mayor de los divisores comunes de ambos.
- El *mínimo común múltiplo* de dos números es el menor de los múltiplos comunes de ambos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el valor de cada una de las cifras de un número.	• Valor de cada cifra en función de la posición que ocupa. • Expresión polinómica de un número.	• Identificación de la posición que ocupa cada cifra en un número y su valor. • Desarrollo de un número en forma polinómica.
2. Representar y operar con números enteros.	• Representación de los números enteros. • Valor absoluto de un número entero. • Operaciones con números enteros.	• Localización de números enteros sobre las divisiones de una recta. • Obtención del valor absoluto de números enteros. • Operaciones con números enteros.
3. Hallar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos números.	• Máximo común divisor (m.c.d.) de dos números.	• Obtención de los divisores de dos números y selección del mayor divisor común.
4. Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números.	• Mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números.	• Obtención de los primeros múltiplos de dos números y selección del menor múltiplo común.
5. Resolver problemas de m.c.m. y m.c.d.	• Problemas reales resolubles mediante el m.c.m. y el m.c.d.	• Resolución de problemas reales calculando el m.c.m. o el m.c.d. de varios números.

1 OBJETIVO 1

RECONOCER EL VALOR DE CADA UNA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

En un número, el **valor** de cada cifra depende de la **posición** que ocupe.
Una cifra escrita a la izquierda de otra cifra representa unidades de un orden inmediato superior.

EJEMPLO

En el número 3.125.479,275:

3 representa las unidades de millón.
1 representa las centenas de millar.
2 representa las decenas de millar.
5 representa las unidades de millar.
4 representa las centenas.
7 representa las decenas.
9 representa las unidades.
2 representa las décimas.
7 representa las centésimas.
5 representa las milésimas.

EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO
Un número es el resultado de sumar los valores de posición de cada una de sus cifras.

EJEMPLO

$$\mathbf{3.025.079} = 3 \cdot 10^6 + \ldots + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + \ldots + 7 \cdot 10 + 9$$
$$\mathbf{35{,}012} = 3 \cdot 10 + 5 + \ldots + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

La cifra 0 no aporta valor al número, independientemente de la posición que ocupe.

1 **Identifica las cifras y escribe en forma polinómica los siguientes números.**

a) 83

8 ⟶ decenas   3 ⟶ unidades

$83 = 8 \cdot 10 + 3$

b) 511,3

5 ⟶ centenas   1 ⟶ decenas
1 ⟶ __________   3 ⟶ décimas

$511{,}3 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot 10^{-1}$

c) 2.305,74

2 ⟶ unidades de millar   3 ⟶ centenas   0 ⟶ __________
5 ⟶ __________   7 ⟶ __________   4 ⟶ centésimas

$2.305{,}74 = 2 \cdot 10^3 +$ ______ $+$ ______ $+ 7 \cdot$ ______ $+ 4 \cdot 10^{-2}$

d) 3.003.303,303

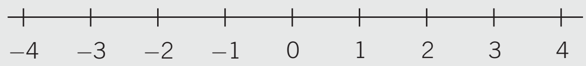
3 ⟶ unidades de millón   3 ⟶ unidades de millar   3 ⟶ centenas
3 ⟶ unidades   3 ⟶ décimas   3 ⟶ milésimas

$3.003.303{,}303 = 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot$ ______ $+ 3 \cdot$ ______ $+ 3 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot$ ______

REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

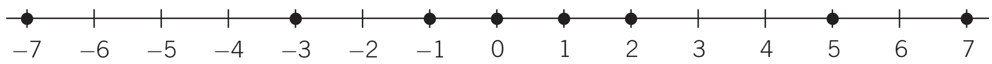
Representamos los números enteros positivos y negativos sobre una recta dividida en intervalos de la misma longitud.



EJEMPLO

Representa y ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros: 7, –1, –3, 5, 0, 1, –7 y 2.

Los representamos sobre la recta:



Su ordenación es inmediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

1 **Representa y ordena estos números enteros: –4, –5, 4, 5, –2, 2, –7 y 7.**

2 **Indica el signo < (menor que) o > (mayor que), según corresponda en cada caso.**

a) $-5 > -7$
b) $0 \ \square\ 9$
c) $5 \ \square\ 7$
d) $-5 \ \square\ -1$
e) $-3 \ \square\ 0$
f) $4 \ \square\ 1$

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

- El valor absoluto de un entero positivo es él mismo: $|3| = 3$, $|7| = 7$
- El valor absoluto de un entero negativo es su opuesto: $|-3| = 3$, $|-15| = 15$

3 **Opera y halla el valor absoluto de los números enteros.**

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$
b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$
c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$
d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$
e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square| = |\square| = \square$

4 **Efectúa las siguientes operaciones con números enteros.**

a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$
b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$
c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$
d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$
e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

5 **Completa con el número que falta.**

a) $21 + \square = -33$ b) $65 - \square = -9$ c) $\square - 53 = 6$ d) $-\square - (-3) = 11$

6 **Completa con números que hagan cierta la igualdad.**

a) $-(\square + 2) = 12$ c) $-3 - (-\square + 1) = 9$

b) $3 - (5 - \square) = 7$ d) $-(-\square - 4) = 13$

7 **La suma de dos números enteros es −2 y uno de ellos es 4, ¿cuál es el otro?**

8 **Si la diferencia de dos números enteros es −3 y el minuendo es 5, ¿cuál es el sustraendo?**

9 **Si el producto de dos números enteros es −16 y uno es 8, ¿cuál es el otro?**

10 **El producto de dos números enteros es −24. ¿Qué números enteros pueden ser sus factores?**

11 **Expresa los siguientes números enteros como producto de otros números enteros.**

a) -9 c) -35 e) 55

b) 8 d) -72 f) -24

12 **Busca los números que hacen ciertas estas igualdades.**

a) $4 \cdot \square = (-2) \cdot 8$ c) $5 \cdot \square \cdot 2 = -100$

b) $-3 \cdot \square = 9 \cdot (-4)$ d) $(-4) \cdot (-8) \cdot \square = -128$

13 **¿Cuánto tiene que valer la letra *a* en cada caso?**

a) $14 : (-a) = -2$ d) $-56 : a = -8$

b) $18 : (-a) = 9$ e) $a : (-2) = 5$

c) $-25 : (-a) = 5$ f) $a : 7 = -7$

14 **Si $a = 7$ y $b = -8$, calcula el valor de:**

a) $|a|$ d) $|-b|$

b) $|b|$ e) $|a + b|$

c) $|-a|$ f) $|a - b|$

15 **Deduce los posibles valores de la letra *a*.**

a) $|a| = 7$

b) $|-a| = 2$

c) $|a + 3| = 4$

d) $|2 - a| = 5$

16 **Continúa las igualdades hasta que tengan cinco términos.**

a) $-4 = -5 + 1 = \ldots$

b) $5 = -9 + 14 = \ldots$

c) $-8 = 4 - 12 = \ldots$

17 **Encuentra los errores de estas igualdades.**

a) $(-3) + (-5) - (-8) = -3 - 5 - 8 = -8 - 8 = -(8 - 8) = 0$

b) $-9 - (-8) - (-7 - 2) = -9 + 8 + 7 - 2 = -1 + 7 - 2 = -6 - 2 = -8$

c) $5 - [-6 + 7 - (-2)] = 5 + 6 - 7 + 2 = 11 - 5 = 6$

d) $4 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2) = -12 - 10 = -22$

e) $4 - 5 \cdot (-2) = (-1) \cdot (-2) = 2$

f) $7 \cdot (-3 - 2) = -21 - 2 = 23$

18 **En un centro comercial hemos aparcado el coche en el 2.º sótano. Para ir a la 4.ª planta, ¿cuántos pisos tenemos que subir?**

19 **Pedro debe 30 € a Juan y 12 € a María. ¿Cuánto dinero debe en total?**

20 **Una persona que pesa 76 kg está siguiendo una dieta que le permitirá adelgazar 2 kg por semana. Si mantiene el régimen durante tres semanas, ¿cuánto pesará al cabo de ese tiempo?**

21 **Un equipo de fútbol ha subido tres puestos la última jornada y bajó uno en la anterior. Si antes estaba en la séptima posición de la tabla, ¿en qué puesto está situado ahora?**

22 **Carlos ha preparado helado de limón. Al terminarlo, este tenía una temperatura de 12 °C, y al congelarlo descendió a 18 °C bajo cero. ¿Cuál ha sido la variación de temperatura?**

OBJETIVO 3

HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El máximo común divisor de dos números es el **mayor** de sus **divisores comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus divisores son:

Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

Divisores comunes = {1, 2, 3, **6**}

Luego el máximo común divisor de 12 y 42 es: m.c.d. (12, 42) = 6

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el máximo común divisor de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** de ambos, elevados al **menor exponente**.

EJEMPLO

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \qquad \text{m.c.d. } (12, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

1 **Halla el máximo común divisor de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

$$\begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$21 = 3 \cdot 7$ $\qquad 105 = 3 \cdot \square \cdot \square$

m.c.d. $(21, 105) = \square \cdot \square = 21$

b) 33 y 44

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 11 & \_\_ \\ 1 & \end{array}$$

$33 = 3 \cdot \square$ $\qquad 44 = 2^2 \cdot \square$

m.c.d. (33, 44) = 11

c) 60 y 210

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \end{array}$$

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $\qquad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square = 30$

d) 45 y 80

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\qquad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.d. (45, 80) = 5

HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El mínimo común múltiplo de dos números es el **menor** de sus **múltiplos comunes**.

EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus múltiplos son: Múltiplos de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, ...}

Múltiplos de 42 = {0, 42, **84**, 126, ...}

Luego el mínimo común múltiplo de 12 y 42 es: m.c.m. (12, 42) = 84

¿Cómo lo vamos a hallar?

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números seguimos estos pasos.

1.° Descomponemos los dos números en **factores primos**.

2.° Multiplicamos los factores primos **comunes** y **no comunes** a ambos que estén elevados al **mayor exponente**.

EJEMPLO

12	2	42	2
6	2	21	3
3	3	7	7
1		1	

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ $\quad$ m.c.m. $(12, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

1 **Halla el mínimo común múltiplo de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

21	3	105	3
7	7	35	5
1		7	7
		1	

$21 = \square \cdot \square$ $\quad 105 = \square \cdot \square \cdot \square$

m.c.m. $(21, 105) = \square \cdot \square \cdot \square = 105$

c) 60 y 210

60	__	210	__
30	__	105	__
15	__	35	__
5	__	7	__
1		1	

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $\quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.m. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 420$

b) 33 y 88

33	3	88	2
11	11	44	__
1		__	__
		11	__
		1	

$33 = 3 \cdot \square$ $\quad 88 = 2^3 \cdot \square$

m.c.m. $(33, 88) = \square \cdot \square \cdot \square = 264$

d) 45 y 80

45	3	80	__
15	__	__	__
__	__	__	__
1		__	__
		5	5
		1	

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\quad 80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.m. $(45, 80) = \square \cdot \square \cdot \square = 720$

2 Números racionales

INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *fracción* consta de numerador y denominador, separados por una raya de fracción.
- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{d}{c}$ son *equivalentes* si se cumple que $a \cdot c = b \cdot d$.
- *Fracción irreducible* es aquella fracción que no se puede simplificar más.
- Un número *a*, llamado *base*, elevado a un *exponente n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces: a^n.
- Un número en *notación científica* es un número entero o decimal, con una sola cifra entera (del 1 al 9), multiplicado por una potencia de base 10.

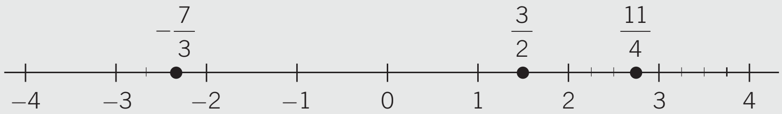
OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Representar y operar con números racionales.	• Representación de los números racionales. • Operaciones con números racionales.	• Localización de números fraccionarios entre números enteros (divisiones de una recta). • Operaciones con fracciones.
2. Expresar un número decimal en forma de fracción.	• Transformación de un número decimal en una fracción.	• Transformaciones de números decimales en fracciones.
3. Operar con potencias: multiplicación, división y potencia de una potencia.	• Potencias: base y exponente. • Multiplicación de potencias de la misma base. • División de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Potencias de exponente negativo.	• Expresión del producto de varios factores iguales como potencia. • Producto y división de potencias de la misma base. • Potencia de una potencia. • Utilización de las reglas de las operaciones combinadas con potencias. • Operaciones con potencias de exponente negativo.
4. Expresar un número en notación científica.	• Notación científica.	• Transformación de un número en forma decimal a notación científica.
5. Realizar operaciones en notación científica.	• Sumas y restas de números con iguales o diferentes exponentes en la potencia de 10. • Productos y cocientes de números con iguales o diferentes exponentes en la potencia de 10.	• Sumas y restas de números, sacando como factor común 10 elevado al exponente común, o elevado al menor de los exponentes no comunes. • Multiplicaciones y divisiones de números, sumando o restando los exponentes de 10.

2 OBJETIVO 1

REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS RACIONALES

NOMBRE: ______________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Representamos los números racionales sobre una recta, en la que los números fraccionarios están comprendidos entre los números enteros.



Para ver cómo se representa un número fraccionario mostramos un ejemplo. Así, para representar el número $\frac{138}{30}$ seguimos estos pasos.

1.º Simplificamos la fracción hasta obtener su fracción irreducible: $\frac{138}{30} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$

2.º Calculamos la parte entera y la parte decimal: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

3.º Tomamos sobre la recta el intervalo formado por los dos números enteros entre los que está comprendido el número, en este caso [4, 5], y lo dividimos en un número de partes igual que el denominador de la fracción, en este caso, en 5 partes.

Marcamos desde el número 4 tantas partes como indique el numerador, en este caso 3:

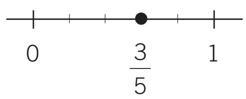
1 **Representa los siguientes números fraccionarios.**

a) $\frac{540}{900}$

1.º Simplificamos: $\frac{540}{900} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{5}$

2.º Calculamos: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{\quad}{\quad}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, 1].
Lo dividimos en 5 partes iguales.
Marcamos 3 partes e indicamos la posición.

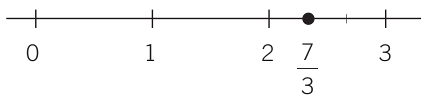


b) $\frac{420}{180}$

1.º Simplificamos: $\frac{420}{180} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{7}{3}$

2.º Calculamos: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{\quad}{\quad}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [2, 3].
Lo dividimos en 3 partes iguales.
Marcamos 1 parte e indicamos la posición.

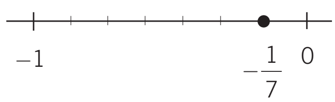


c) $-\frac{210}{1.470}$

1.º Simplificamos: $-\frac{210}{1.470} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{1}{7}$

2.º Calculamos: $-\frac{1}{7} = 0 - \frac{1}{7}$

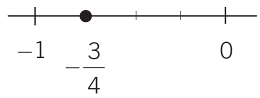
3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, –1], y representamos la fracción.



d) $-\dfrac{450}{600}$ 1.º Simplificamos: $-\dfrac{450}{600} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{3}{4}$

2.º Calculamos: $-\dfrac{3}{4} = 0 - \dfrac{3}{4}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo $[0, -1]$ y representamos la fracción.



SUMA (O RESTA) DE NÚMEROS RACIONALES

Para sumar (o restar) fracciones con **distinto** denominador, las reducimos a **común** denominador y luego sumamos sus numeradores.

EJEMPLO

Efectúa: $\mathbf{\dfrac{3}{5} - 2 + \dfrac{17}{3}}$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m.c.m. $(3, 5) = 15$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \qquad 2 = \frac{2 \cdot 15}{15} = \frac{30}{15} \qquad \frac{17}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15}$$

$$\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3} = \frac{9}{15} - \frac{30}{15} + \frac{85}{15} = \frac{9 - 30 + 85}{15} = \frac{64}{15}$$

2 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $4 - \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}$ m.c.m. $(2, 3) =$

$$4 = \frac{4 \cdot \square}{\square} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad - \quad - \quad}{\quad} = \frac{5}{6}$$

b) $\dfrac{5}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\right]$ m.c.m. $(3, 4) = 12$

Efectuamos primero la suma del paréntesis:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \square}{12} + \frac{1 \cdot \square}{12} = \frac{\square + \square}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot \square}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\square - \square}{12} = \frac{29}{12}$$

c) $3 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$ m.c.m. $(3, 5) = 15$

Efectuamos primero la resta del paréntesis:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{15} - \frac{1 \cdot \square}{15} = \frac{\square - \square}{15} = \frac{2}{15}$$

$$3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot \square}{15} - \frac{2}{15} = \frac{43}{15}$$

PRODUCTO (O COCIENTE) DE NÚMEROS RACIONALES

- Para multiplicar dos fracciones, efectuamos el producto de los numeradores y lo dividimos entre el producto de los denominadores.
- Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

EJEMPLO

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{5}{21}$$

$$\frac{1}{3}:\frac{5}{7}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{2}{5}:3=\frac{2}{5}:\frac{3}{1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2}{15}$$

3 **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{\square\cdot(\square)\cdot\square}{\square\cdot\square\cdot\square}=\frac{\quad}{\quad}$

b) $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\right):\frac{(-3)}{7}=\left(\frac{\square}{\square}\right)\cdot\frac{7}{(-3)}=\frac{\square\cdot\square}{\square\cdot(-3)}=\frac{\quad}{\quad}$

c) $\left[3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]:\left[(-5):\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\square\cdot(-2)}{\square}\right]:\left[(-5)\cdot\frac{2}{1}\right]=\left(\frac{\quad}{\quad}\right):\left(\frac{\quad}{\quad}\right)=\left(\frac{\quad}{\quad}\right)\cdot\left(\frac{\quad}{\quad}\right)=\left(\frac{\quad}{\quad}\right)=\frac{3}{100}$

d) $\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{7}\right)\cdot\left(7:\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{5}\right)\cdot\left(7\cdot\frac{2}{1}\right)=\left(\frac{\quad}{\quad}\right)\cdot\left(\frac{\quad}{\quad}\right)=\frac{\quad}{\quad}$

POTENCIA DE UN NÚMERO RACIONAL

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

EJEMPLO

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^{3}=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}$$

4 **Haz estas operaciones.**

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}=\frac{\square-\square}{200}=\frac{\quad-\quad}{200}=\frac{667}{200}$

b) $5-\left(\frac{1}{3}\right)^5=5-\frac{1}{\quad}=\frac{\quad-\quad}{27}=\frac{134}{27}$

c) $3+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=3+\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad+\quad-\quad}{36}=\frac{113}{36}$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS RACIONALES

La jerarquía de las operaciones es:

- Primero se hacen las operaciones de los paréntesis.
- Después, se calculan las potencias, si las hubiera.
- A continuación, se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, se resuelven las sumas y restas.
- Siempre se opera respetando el orden en que están escritas las operaciones, de izquierda a derecha.

EJEMPLO

$$\left(\mathbf{\frac{3}{2}}+\mathbf{\frac{1}{5}}\right):\left(\mathbf{3}-\mathbf{\frac{1}{7}}+\mathbf{\frac{1}{2}}\right)$$

Hay dos bloques, con los que debemos operar por separado:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

$$3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{42}{14}-\frac{2}{14}+\frac{7}{14}=\frac{42-2+7}{14}=\frac{47}{14}$$

Operamos y simplificamos:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{10}:\frac{47}{14}=\frac{17\cdot 14}{10\cdot 47}=\frac{238}{470}=\frac{119}{235}$$

5 **Efectúa las operaciones.**

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{7-4}\right]=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=0$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{+}{3}\right)-\left(\frac{+}{4}\right)+\left(\frac{-}{12}\right)=\frac{}{}-\frac{}{}+\frac{}{}=$

$=\frac{-+}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

c) $\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{+}{7}}{\frac{+}{14}}=\frac{}{7}\cdot\frac{14}{}=\frac{308}{70}=\frac{154}{35}=\frac{22}{5}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{}{}+\frac{}{2}-\frac{}{5}=\frac{+-}{30}=-\frac{16}{30}$

e) $\left(2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(4-\frac{2}{3}\right)=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}:\frac{}{3}=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}\cdot\frac{3}{}=\frac{189}{100}$

2 OBJETIVO 2

EXPRESAR UN NÚMERO DECIMAL EN FORMA DE FRACCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para expresar un número fraccionario en **forma decimal**, y viceversa, se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLO

a) $\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{20}} = 2{,}45 \rightarrow$ Decimal exacto

b) $\frac{\mathbf{86}}{\mathbf{11}} = 7{,}8181\ldots = 7{,}\widehat{81} \rightarrow$ Decimal periódico puro

c) $\frac{\mathbf{87}}{\mathbf{66}} = 1{,}31818\ldots = 1{,}3\widehat{18} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

Para pasar un número en forma decimal a fracción, y viceversa, operamos de manera diferente en cada uno de los tres casos anteriores.

EJEMPLO

a) Decimal exacto:

$$2{,}4625 = \frac{24.625}{10.000} = \frac{4.925}{2.000} = \frac{985}{400} = \frac{197}{80}$$

b) Decimal periódico puro:

Se resta la parte entera

$$3{,}\widehat{45} = \frac{345 - 3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{114}{33} = \frac{38}{11}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica

Cifras de la parte entera y la parte decimal no periódica

c) Decimal periódico mixto:

$$3{,}21\widehat{7} = \frac{3.217 - 321}{900} = \frac{2.896}{900} = \frac{1.448}{450} = \frac{724}{225}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica y tantos 0 como cifras tenga la parte anteperiódica

1 **Obtén la fracción generatriz de los siguientes números.**

a) $0{,}87 = \frac{87}{100}$

b) $0{,}\widehat{3} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{3}$

c) $3{,}15\widehat{27} = \frac{31.527 - 315}{9.900} =$

$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $2{,}\widehat{45} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{27}{11}$

e) $0{,}0\widehat{15} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{66}$

f) $-235{,}75 = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad}$

g) $6{,}\widehat{2} = \frac{\quad - \quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

2 **Expresa en forma decimal las fracciones y en forma fraccionaria los decimales.**

a) $\frac{9}{8}$

b) $7,35$

c) $13,\overset{\frown}{7}$

d) $8,9\overset{\frown}{1}$

e) $\frac{48}{10}$

f) $\frac{9}{11}$

g) $0,278$

h) $6,1\overset{\frown}{6}$

i) $18,57$

j) $2,26\overset{\frown}{5}$

k) $\frac{101}{90}$

l) $1,0435$

m) $1,\overset{\frown}{274}$

n) $0,31\overset{\frown}{5}$

ñ) $0,01\overset{\frown}{23}$

3 **Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando tu respuesta y poniendo ejemplos en el caso de que no sean ciertas.**

a) Cualquier número decimal puede expresarse en forma de fracción.

b) Cualquier número entero puede expresarse como una fracción.

c) En un número decimal periódico, las cifras decimales se repiten indefinidamente después de la coma.

d) Si un número decimal tiene como período la cifra 0, es un número entero.

e) Una fracción se puede expresar siempre como un número decimal.

2 OBJETIVO 3

OPERAR CON POTENCIAS: MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y POTENCIA DE UNA POTENCIA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POTENCIA

Un número *a*, llamado base, elevado a un exponente *n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces:

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}^{n \text{ veces}} = a^n$$ Se lee: «*a* elevado a *n*».

a^n → ***n*: exponente**, indica cuántas veces se multiplica la base por ella misma.

a^n → ***a*: base**

EJEMPLO

$\mathbf{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^3$

Se lee: «seis elevado a tres».

1 **Completa.**

a) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = \square$ «______________»

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \square$ «______________»

c) $\square = 13^5$ «______________»

d) $\square = \square$ «Siete elevado a cuatro»

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS

- Como las potencias son multiplicaciones, se va a trabajar con ellas cuando multiplicamos o dividimos:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}^{} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5}^{} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{} = 5^{6} \leftarrow \textbf{exponente}$$

- Las potencias han de tener la **misma base** para unificar el exponente.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (no se puede poner con el mismo exponente)

- La fórmula general para **multiplicar potencias de la misma base** es:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

2 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\square}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\square \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \square = 2^5$

DIVISIÓN DE POTENCIAS

- Para dividir potencias con igual base, se deja la base y se restan los exponentes: $a^n : a^m = a^{n-m}$
- La división entre potencias de distinta base no se puede realizar, y debe quedar indicada.

EJEMPLO

$$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

3 **Opera con las siguientes potencias.**

a) $5^6 : 5^4 = \frac{5^6}{5^4} = \frac{}{} = 5 \cdot 5 = \square$

b) $3^7 : 3^4 = \frac{\square}{\square} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \square \cdot \square \cdot \square = \square$

c) $11^5 : 11^3 =$

d) $13^6 : 13^2 =$

e) $7^2 : 7^3 =$

4 **Realiza estas divisiones.**

a) $3^5 : 3^4 = \square$

b) $\square : 7^2 = 7^5$

c) $4^6 : \square = 4^3$

d) $12^7 : 12^4 = \square$

e) $5^7 : \square = 5^2$

f) $6^{12} : 6^5 = \square$

- A veces se combinan las operaciones de multiplicación y división. En estos casos, se realizan las distintas operaciones, paso a paso:

$$\frac{3^2 \cdot 3^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

- Hay que tener en cuenta que solo se puede operar cuando se unifiquen las bases de las potencias:

$$\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 5^2}{7^2 \cdot 7} = \frac{7^5 \cdot 5^2}{7^3} = 7^2 \cdot 5^2$$

5 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $\overbrace{(2^5 \cdot 2^4)} : \underbrace{(2^3 \cdot 2^2)} = \frac{}{} = \frac{2^{\square}}{2^{\square}} = \square$

b) $(11^5 \cdot 11^2 \cdot 11^3) : (11^4 \cdot 11) =$

c) $(10^5 : 10^2) \cdot 10^5 = \frac{\square}{\square} \cdot \square = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Si elevamos una potencia a otra potencia, el resultado es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

EJEMPLO

$(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$(5^4)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^8$

6 **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(7^3)^4 = 7^{\square}$

b) $(3^3)^{\square} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\square} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\square} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\square} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\square}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\square}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\square}$

Hay también operaciones combinadas que presentan las tres operaciones estudiadas hasta el momento.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Multiplicación	**División**	**Potencia de una potencia**

EJEMPLO

$(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3 = \dfrac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \dfrac{2^9}{2^6} = 2^3$

7 **Realiza estas operaciones.**

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\dfrac{\square}{\square}\right)^3 = (\square)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \dfrac{\square}{\square} \cdot \dfrac{\square}{\square}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

- Al efectuar una división de potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente negativo:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- Si hay exponentes negativos, podemos transformarlos en una fracción: $\dfrac{1}{a^n}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, las potencias de exponente negativo se definen: $\boldsymbol{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$
- Las potencias de exponente negativo cumplen las propiedades que ya conocemos para las potencias de exponente natural.

8 **Opera con potencias de exponentes negativos.**

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{5^2}{3^{\square}} = \dfrac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \dfrac{1}{\square} \cdot 5^3 = \dfrac{5^2 \cdot 5^3}{\square} = \square$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \dfrac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \dfrac{1}{\square} = \dfrac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$\boxed{6 = 2 \cdot 3}$

d) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \dfrac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \dfrac{\square}{\square} \cdot 2^3 = \dfrac{\square}{\square} =$

$\boxed{4 = 2 \cdot 2}$

$\boxed{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3}$

9 **Expresa en forma de potencia de la base indicada en cada caso.**

OPERACIÓN	BASE	RESULTADO
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6 : 8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5} : 4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4 : 7^{-6}$	7	

OBJETIVO 4

EXPRESAR UN NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para expresar un número en notación científica, lo escribimos con una sola cifra, distinta de cero, como parte entera y las otras cifras decimales, multiplicado por una potencia de 10 con exponente igual a:

- el número de cifras que hemos pasado a la parte decimal, o
- menos el número de posiciones que hemos saltado para conseguir que la primera cifra sea entera.

EJEMPLO

5.438 $= 5{,}438 \cdot 10^3$	3 cifras hemos tenido que pasar a decimales.
34,7 $= 3{,}47 \cdot 10^1$	1 cifra hemos tenido que pasar a decimal.
800 $= 8 \cdot 10^2$	2 cifras hemos tenido que pasar a decimales.
0,00748 $= 7{,}48 \cdot 10^{-3}$	3 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 7, esté en la parte entera.
0,356 $= 3{,}56 \cdot 10^{-1}$	1 salto hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 3, esté en la parte entera.
0,0691 $= 6{,}91 \cdot 10^{-2}$	2 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 6, esté en la parte entera.

1 **Expresa en notación científica los siguientes números.**

a) $2.000.000 = 2{,}000000 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6$

b) 4.000 = __________

c) 100 = __________

d) 700 = __________

e) 10 = __________

f) 80.000 = __________

g) 5.000.000 = 5 · __________

2 **Expresa en notación científica estos números con parte entera y parte decimal.**

a) $990{,}85 = 9{,}9085 \cdot 10^2$

b) 340 = 3,4 · __________

c) 655,1 = 6,551 · __________

d) 567.765,22 = __________

e) 15,35 = __________

f) 340,05 = 3,4005 · __________

g) 37,986 = 3,7986 · __________

h) 4,4 = __________

i) 3,45 = __________

3 **Expresa los números decimales en notación científica.**

a) $0{,}0567 = 5{,}67 \cdot 10^{-2}$

b) 0,000045 = 4,5 · __________

c) 0,0000061 = __________

d) 0,093 = __________

e) 0,367 = 3,67 · __________

f) 0,0073 = __________

g) 0,000101 = __________

h) 0,0007 = __________

i) 0,4765 = __________

3 Números reales

INTRODUCCIÓN

En la unidad anterior se estudiaron los números racionales o fraccionarios y se aprendió a compararlos, operar con ellos y utilizarlos para resolver problemas. En esta unidad se verán los números fraccionarios expresados en forma decimal.

Lo más importante de la unidad es conseguir que los alumnos identifiquen y trabajen con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad, distinguiendo los diferentes números decimales: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional. El concepto de los números irracionales puede resultar complicado a los alumnos por la aparición de infinitas cifras que no se repiten, por lo que es importante practicar, poniendo ejemplos de racionales e irracionales y pidiendo a los alumnos que los clasifiquen.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Los *números irracionales* son números decimales no exactos y no periódicos.
- El conjunto de los *números reales* lo forman los números racionales e irracionales.
- *Truncar* las cifras decimales de un número hasta un orden determinado consiste en cambiar por ceros las cifras que vienen a continuación de dicho orden.
- *Redondear* un número decimal es estimar si se suma o no una unidad a la cifra que ocupa la posición a la que se va a redondear el número.
- *Raíz n-ésima de un número:* $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer e interpretar intervalos en la recta real.	• Intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos y semicerrados.	• Representación gráfica de intervalos en la recta real.
2. Aproximar un número decimal.	• Aproximación por truncamiento y redondeo.	• Truncamiento y redondeo de un número decimal hasta un orden.
3. Calcular el error que se comete al aproximar un número decimal.	• Error absoluto. • Cota o margen de error. • Error relativo.	• Obtención de los errores absoluto y relativo al aproximar un número decimal. • Determinación de la cota de error.
4. Operar con radicales.	• Transformación de radicales en potencias. • Multiplicación y división de radicales. • Racionalización de denominadores.	• Expresión de números escritos en forma de raíces en potencias. • Operaciones con radicales. • Multiplicación por el conjugado del denominador.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 1

RECONOCER E INTERPRETAR INTERVALOS EN LA RECTA REAL

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **Halla un número racional que pertenezca al intervalo $\left[\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right]$.**

2 **Escribe cuatro intervalos encajados que definan los números.**

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt{11}$

3 **Representa en la recta estos intervalos.**

a) $(-2, 4]$ c) $x > 8$ e) $-3 < x \leq 1$ g) $|x| < 5$

b) $[-3, 5]$ d) $x \leq 3$ f) $-2 \leq x < 1$ h) $|x| \geq 3$

4 **Expresa los siguientes intervalos con paréntesis o corchetes.**

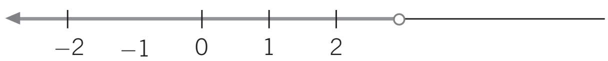
a) 

b) 

c) 

5 **Expresa con x y los signos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ los intervalos.**

a) 

b) 

c) 

6 **Escribe cinco intervalos encajados que definan π.**

APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

Para **truncar** las cifras decimales de un número hasta un orden determinado eliminamos las cifras que vienen a continuación de dicho orden.

EJEMPLO

5,751 truncado a las décimas es 5,7.
0,837 truncado a las centésimas es 0,83.
12,3146 truncado a las milésimas es 12,314.

1 **Trunca los números decimales a la cifra de las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,34	c) 8,7521	d) 361,4938
0,2	________	________	________
0,27	________	________	________
0,276	________	________	________

Para **redondear** un número decimal hasta un orden determinado vemos si la cifra del siguiente orden es menor que 5 o mayor o igual que 5 y, en función de eso, dejamos la cifra anterior como está o la incrementamos en una unidad.

EJEMPLO

5,751 redondeado a las décimas es 5,8.
0,837 redondeado a las centésimas es 0,84.
12,3146 redondeado a las milésimas es 12,315.

2 **Redondea los números decimales a las décimas, centésimas y milésimas.**

a) 0,2765	b) 12,3453	c) 8,7521	d) 361,4932
0,3	________	________	________
0,28	________	________	________
0,277	________	________	________

3 **Efectúa las operaciones con números decimales, y redondea el resultado a las centésimas.**

a) $(1{,}367 + 4{,}875) \cdot 2 =$ ________ $\cdot\ 2 =$ ________ $= 12{,}48$

b) $(3{,}642 - 2{,}485) - (9{,}675 + 1{,}476) =$ ________ $-$ ________ $=$ ________ $= -9{,}99$

c) $\left(\dfrac{43{,}764}{2{,}15} \cdot 3{,}831\right) - \left(\dfrac{74{,}772}{13{,}57} \cdot 5{,}63\right) =$ ________ $-$ ________ $= 46{,}959 = 46{,}96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} =$ ________ $-$ ________ $=$ ________ $= 1{,}39$

e) $\dfrac{35{,}732 - 20{,}189}{63{,}562 - 18{,}987} =$ ________________ $= 0{,}349 = 0{,}35$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

La raíz *n*-ésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, *a* es el **radicando** y *n* es el **índice** de la raíz.

Es más fácil operar con potencias que con raíces, por lo que transformamos las raíces en potencias.

EJEMPLO

$$\sqrt{\mathbf{5}} = 5^{1/2} \qquad \sqrt[7]{\mathbf{3^2}} = 3^{2/7}$$

1 **Escribe los radicales en forma de potencias.**

a) $\sqrt[5]{7^3} = \_\_\_^{3/5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} = \dfrac{1}{8^{5/2}} = 8^{\square}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \_\_\_$

MULTIPLICACIÓN (O DIVISIÓN) DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales con el **mismo radicando**, los convertimos primero en potencias.

EJEMPLO

$\sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{2}} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/5} = 2^{1/3+1/5} = 2^{(5+3)/15} = 2^{8/15} = \sqrt[15]{2^8}$

$\sqrt[7]{\mathbf{3^5}} : \sqrt[3]{\mathbf{3}} = 3^{5/7} : 3^{1/3} = 3^{5/7-1/3} = 3^{(15-7)/21} = 3^{8/21} = \sqrt[21]{3^8}$

2 **Calcula los siguientes productos de radicales.**

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7^3} = 7^{3/5} \cdot 7^{3/2} = 7^{3/5+3/2} = 7^{(\_\_+\_\_)/\_\_} = 7^{21/10} = \sqrt[10]{7^{21}}$

b) $\sqrt[7]{6^2} + 6 = 6^{\_\_} \cdot 6 = 6^{\_\_+\_\_} = 6^{9/7} = \sqrt[7]{6^9}$

c) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{\_\_} \cdot 3^{\_\_} = 3^{\_\_+\_\_} = 3^{19/10} = \sqrt[10]{3^{19}}$

d) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2^{3/4} \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{\_\_\_\_} = 2^{\_\_\_\_} = 2^{23/12} = \sqrt[12]{2^{23}}$

3 **Halla estos cocientes de radicales.**

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{1/2-1/3} = 2^{(3-2)/6} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{8^5} : \sqrt[3]{8^2} =$

c) $\sqrt[7]{5} : \sqrt[4]{5^3} =$

d) $(\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{3^4}) : \sqrt{3^2} = (3^{\_\_} \cdot 3^{\_\_}) : 3 = 3^{\_\_} : 3 = 3^{8/3} = \sqrt[3]{3^8}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 Problemas aritméticos

INTRODUCCIÓN

En la vida real, la mayor parte de las relaciones entre magnitudes son relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Es importante que los alumnos aprendan a distinguir entre ambos tipos y a resolver las reglas de tres directas o inversas que se establecen entre las magnitudes implicadas. Para ello es fundamental determinar la relación que existe entre las variables antes de operar con ellas y evitar que los alumnos apliquen los métodos de manera mecánica, ayudándolos a razonar los pasos que hay que seguir en cada caso.

Los repartos proporcionales son una aplicación de las relaciones de proporcionalidad, que conviene que el alumno conozca y maneje con destreza. Es fundamental el manejo de porcentajes, ya que los alumnos tendrán que utilizarlos con mucha frecuencia, tanto en el ámbito académico como en la vida real.

La parte final de la unidad se dedica al cálculo del interés, simple y compuesto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando la razón entre dos cantidades correspondientes es constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$. Entre magnitudes directamente proporcionales podemos aplicar *repartos directamente proporcionales.*
- Dos magnitudes son inversamente proporcionales si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante. Entre magnitudes inversamente proporcionales podemos aplicar *repartos inversamente proporcionales.*
- Las reglas de tres compuestas pueden ser *directas* o *inversas*.
- Los *porcentajes* o *tantos por ciento* expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales, e indican la cantidad de una de ellas correspondiente a *100 unidades* de la otra.
- Hay dos tipos de interés: el *simple* y el *compuesto*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple directa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
2. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales. • Constante de proporcionalidad.	• Resolución de problemas aplicando la regla de tres simple inversa. • Aplicación de método de reducción a la unidad.
3. Realizar repartos proporcionales.	• Repartos directa e inversamente proporcionales.	• Resolución de problemas de repartos.
4. Aplicar la regla de tres compuesta.	• Regla de tres compuesta directa. • Regla de tres compuesta inversa.	• Resolución de problemas con reglas de tres compuestas.
5. Resolver problemas con porcentajes.	• Porcentajes. • Aumentos y disminuciones porcentuales. • Porcentajes encadenados.	• Expresión de cantidades en tantos por ciento. • Utilización de los porcentajes para resolver problemas. • Resolución de problemas que implican aumentos o disminuciones porcentuales.
6. Calcular el interés simple o el interés compuesto de una cantidad.	• Interés simple. • Interés compuesto.	• Cálculo de cantidades mediante el interés simple. • Cálculo de cantidades mediante el interés compuesto.

4 OBJETIVO 1
RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- A esta constante ***k*** se le llama **constante de proporcionalidad directa**.
- El **método de reducción a la unidad** consiste en hallar la cantidad de la magnitud desconocida que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

EJEMPLO

Por una pieza de queso que pesa 1,25 kg hemos pagado 7,50 €. ¿Cuánto nos habría costado otra pieza que pesa 2,25 kg?

Las magnitudes *peso del queso* y *precio* son directamente proporcionales, ya que cuanto mayor sea el peso, mayor será el precio que hay que pagar. En este caso, la constante de proporcionalidad es: $k = \frac{7,5}{1,25} = 6$.

Para calcular el precio de la pieza aplicamos una regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 1,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7,5\ € \\ 2,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7,5}{1,25} = \frac{x}{2,25} \rightarrow x = \frac{7,5 \cdot 2,25}{1,25} = 13,50\ €$$

También podemos resolver el ejemplo anterior averiguando lo que vale 1 kg del queso:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } 1,25 \text{ kg} \xrightarrow{\text{cuestan}} 7,5\ € \\ 1 \text{ kg} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{7,5}{1,25} = \frac{x}{1} \rightarrow x = \frac{7,5 \cdot 1}{1,25} = 6\ €$$

Por tanto, 2,25 kg costarán 2,25 veces más, es decir: $2,25 \cdot 6 = 13,50$ €.

1 **He invitado a María al cine y por las dos entradas me han cobrado 15 €. ¿Cuánto hubiera tenido que pagar si hubiera invitado a otros 5 amigos más?**

2 **En media hora he recorrido una distancia de 2,5 km. ¿Cuánta distancia recorreré a la misma velocidad, en tres cuartos de hora?**

RECONOCER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de dos valores correspondientes x e y es constante:

$$x \cdot y = k \rightarrow y = \frac{k}{x}$$

- A esta constante $\boldsymbol{k}$ se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.
- El **método de reducción a la unidad** consiste en hallar la cantidad de la magnitud desconocida que corresponde a una unidad de la otra magnitud.

EJEMPLO

Seis albañiles tardan 4 horas en levantar un muro de ladrillos. ¿Cuánto tiempo tardarían en levantar el muro 9 albañiles trabajando al mismo ritmo?

Las magnitudes *número de albañiles* y *número de horas* son inversamente proporcionales, ya que cuanto mayor sea el número de albañiles, menor será el número de horas empleado para levantar el muro.

Por ser magnitudes inversamente proporcionales, cumplen que:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si 6 albañiles} \xrightarrow{\text{tardan}} 4 \text{ horas} \\ \text{9 albañiles} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ horas} \end{array}\right\} \rightarrow 6 \cdot 4 = 9 \cdot x \rightarrow x = \frac{24}{9} = 2{,}66 \text{ horas}$$

El mismo problema se puede resolver por el método de reducción a la unidad, es decir, averiguando cuánto tardaría en levantar el muro un albañil:

$$24 = 1 \cdot x \rightarrow x = 24 \text{ horas}$$

Si un albañil tarda 24 horas en levantar el muro, 9 albañiles tardarían 9 veces menos, es decir:

$$\frac{24}{9} = 2{,}66 \text{ horas}$$

1 **Circulando a 90 km/h hemos tardado 3 horas en recorrer una distancia. ¿Cuánto tardaríamos en llegar si fuéramos a 120 km/h?**

2 **Una piscina tiene 6 grifos que manan el mismo caudal, en litros de agua por minuto. Si solo abrimos 2 grifos, la piscina tarda 8 horas en llenarse. Calcula cuánto tiempo tardaría en llenarse si abrimos los seis grifos.**

OBJETIVO 3

REALIZAR REPARTOS PROPORCIONALES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para realizar el reparto de una cantidad *n* de forma **directamente proporcional** a unas cantidades *a*, *b*, *c*…, hacemos lo siguiente:

a) **Se suman las cantidades** en las que hay que repartir: $a + b + c + \ldots$

b) **Se divide la cantidad *n* entre esa suma.** El cociente nos da la constante de proporcionalidad.

c) Para calcular cada parte basta con multiplicar cada cantidad ***a*, *b*, *c***…, por esa constante.

EJEMPLO

Un padre ha ganado un premio de 18.000 € y quiere repartirlo entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años. ¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno?

a) Se suman los años por los que hay que repartir: $8 + 10 + 12 = 30$

b) Dividimos la cantidad del dinero entre la suma anterior: $\dfrac{18.000}{30} = 600$

c) Al hijo de 8 años le corresponderán: $600 \cdot 8 = 4.800$ €

Al hijo de 10 años le corresponderán: $600 \cdot 10 = 6.000$ €

Y al hijo de 12 años le corresponderán: $600 \cdot 12 = 7.200$ €

Para comprobar que el reparto está bien hecho, sumamos las tres partes:

$$4.800 + 6.000 + 7.200 = 18.000 \text{ €}$$

1 **Para comprar una papeleta en una rifa que costaba 12 €, tres amigos han puesto 7, 4 y 1 €, respectivamente, y les ha tocado un premio de 60 €. ¿Qué parte del premio le corresponderá a cada uno?**

2 **Cuatro vecinos deciden poner césped en sus jardines, que miden 12, 15, 18 y 16 m^2, respectivamente y se lo encargan a un jardinero para que les salga más barato. Si el jardinero les cobra 732 € en total, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno?**

Repartir una cantidad *n* de forma **inversamente proporcional** a otras cantidades *a*, *b*, *c*…, es equivalente a repartirla de forma directamente proporcional a los inversos de las cantidades ***a***, ***b***, ***c***…

En la práctica, para hacer un reparto inversamente proporcional, hay que plantear una ecuación de primer grado.

EJEMPLO

El padre del ejemplo anterior quiere repartir ahora el premio entre sus tres hijos de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 8, 10 y 12 años. ¿Qué cantidad le correspondería a cada uno?

	1.er hijo	2.º hijo	3.er hijo
Edades	8	10	12
Partes del premio	x	y	z

$$8x = 10y \qquad\qquad 8x = 12z$$

$$y = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5} \qquad\qquad z = \frac{8x}{12} = \frac{4x}{3}$$

Como la suma de las tres partes en que se va a repartir el premio tiene que ser igual al premio, se cumplirá que:

$$x + y + z = x + \frac{4x}{5} + \frac{4x}{3} = 18.000$$

Y reduciendo a común denominador resulta:

$$\frac{15x}{15} + \frac{12x}{15} + \frac{20x}{15} = \frac{47x}{15} = 18.000 \rightarrow x = \frac{15 \cdot 18.000}{47} = 5.744{,}70 \text{ €}$$

Las partes de los otros dos hijos serán:

$$y = \frac{4x}{5} = \frac{4 \cdot 5.744{,}7}{5} = 4.595{,}70 \text{ €} \qquad\qquad z = \frac{4x}{3} = \frac{4 \cdot 5.744{,}7}{3} = 7.659{,}60 \text{ €}$$

Por último, para comprobar que el reparto está bien realizado, sumamos las tres partes:

$$5.744{,}70 + 4.595{,}70 + 7.659{,}60 = 18.000 \text{ €}$$

3 **Reparte 93 en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 5. Comprueba el resultado.**

4 OBJETIVO 4
APLICAR LA REGLA DE TRES COMPUESTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para **resolver un problema de proporcionalidad**:

1.º Se ordenan las magnitudes y los datos, y se averigua el tipo de proporcionalidad que hay entre cada magnitud y la magnitud que tiene la incógnita.

2.º Se hace la reducción a la unidad.

Si las magnitudes son directamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

EJEMPLO

En un mes, tres amigos han ido juntos tres veces al cine, costándoles la entrada la misma cantidad los tres días. En total, se han gastado 40,50 € en ese mes en ir al cine. ¿Cuánto se gastarían en total cinco amigos que han ido cinco veces juntos al cine?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de amigos*, *número de veces* y *precio total*.

– Cuantos más amigos vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.

– Cuantas más veces vayan, mayor será el gasto total; son magnitudes directamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta directa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes directamente proporcionales, se divide:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 3 amigos} \longrightarrow \text{en 3 veces} \longrightarrow \text{gastan } 40{,}50 \text{ € al mes}\\ \text{1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gastará } \dfrac{40{,}5}{3 \cdot 3} = 4{,}30 \text{ € al mes}\end{array}\right\}$$

Y resolvemos el caso planteado multiplicando:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si 1 amigo} \longrightarrow \text{en 1 vez} \longrightarrow \text{gasta } 4{,}50 \text{ € al mes}\\ \text{5 amigos} \longrightarrow \text{en 5 veces} \longrightarrow \text{gastarán } x \text{ € al mes}\end{array}\right\}$$

$$x = 4{,}5 \cdot 5 \cdot 5 = 112{,}50 \text{ €}$$

1 **Cinco albañiles, trabajando durante 3 días, han levantado un muro de 12 metros de longitud. ¿Cuántos metros de muro levantarían 7 albañiles durante dos días?**

2 **Si seis pasteleros en 3 días hacen quince tartas, ¿cuántas tartas harán nueve pasteleros trabajando durante 2 días al mismo ritmo que los anteriores?**

Si las magnitudes que se relacionan en el problema son inversamente proporcionales, se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

EJEMPLO

Para llenar una piscina, 3 grifos han estado manando agua 5 horas diarias durante 6 días. ¿Cuántos días tardaría en llenarse la piscina si hay 4 grifos abiertos durante 3 horas diarias?

En primer lugar hay que averiguar qué tipo de proporcionalidad existe entre las magnitudes del problema: *número de grifos*, *número de horas diarias* y *número de días*.

- Cuantos más grifos estén abiertos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.
- Cuantas más horas al día estén abiertos los grifos, menor será el número de días; son magnitudes inversamente proporcionales.

Se trata de una **regla de tres compuesta inversa**.

Reducimos a la unidad, y por ser magnitudes inversamente proporcionales, se multiplica:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Si 3 grifos} & \longrightarrow & \text{5 horas al día} & \longrightarrow & \text{tardan 6 días} \\ \text{1 grifo} & \longrightarrow & \text{5 horas al día} & \longrightarrow & \text{tardará } 6 \cdot 3 \text{ días} \\ \text{1 grifo} & \longrightarrow & \text{1 hora al día} & \longrightarrow & \text{tardará } 6 \cdot 3 \cdot 5 \text{ días} \end{array}\right\}$$

Y resolvemos el caso planteado dividiendo:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Si 1 grifo} & \longrightarrow & \text{1 hora al día} & \longrightarrow & \text{tarda } 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90 \text{ días} \\ \text{4 grifos} & \longrightarrow & \text{1 hora al día} & \longrightarrow & \text{tardarán } \dfrac{90}{4} \text{ días} \\ \text{4 grifos} & \longrightarrow & \text{3 horas al día} & \longrightarrow & \text{tardarán } \dfrac{90}{4 \cdot 3} \text{ días} \end{array}\right\}$$

$$\frac{90}{4 \cdot 3} = 7{,}5 \text{ días}$$

3 **Tres tractores, trabajando durante 6 horas al día, han tardado un día en arar un campo de trigo. ¿Cuánto tardarían en arar dicho campo 5 tractores iguales a los anteriores, trabajando durante 8 horas al día?**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RESOLVER PROBLEMAS CON PORCENTAJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

1 **En un periódico local leemos que para el próximo puente el 38 % de las plazas hoteleras de la región están ya reservadas. Sabiendo que el número total de plazas es de 850, calcula las plazas que están ya reservadas y las plazas que quedan aún libres.**

2 **En un colegio juegan a baloncesto 169 alumnos, que representan el 26 % del total de los alumnos. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio? ¿Y cuántos no juegan a baloncesto?**

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Para calcular en qué se transforma una cantidad *C* cuando aumenta o disminuye en un *p* %, se multiplica dicha cantidad por el índice de variación:

$C(1 + p/100)$, si aumenta.

$C(1 - p/100)$, si disminuye.

3 **Para fomentar el uso del transporte público en una ciudad, se ha decidido rebajar un 7 % el precio del billete de autobús, que era de 0,80 €, y aumentar un 11 % el precio de 1 hora de aparcamiento, que era de 1,20 €. Calcula los nuevos precios del billete y del aparcamiento.**

4 **El año pasado en mi colegio había 72 alumnos que jugábamos al fútbol, pero este año somos 108 alumnos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento?**

Para calcular aumentos o disminuciones porcentuales sucesivos, se multiplican los índices de variación: $(1 + p)$ para los aumentos y $(1 - p)$ para las disminuciones.

EJEMPLO

A lo largo del año, la cifra de parados de una Comunidad ha ido variando según los siguientes aumentos y disminuciones porcentuales.

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
+2 %	+3 %	+4 %	−2 %	−1 %	−3 %	−5 %	0 %	0 %	+3%	+3 %	+2 %

Si al comienzo del año había 380.000 parados en esa Comunidad, calcula los parados que hay al finalizar el año.

Hallamos en primer lugar los sucesivos índices de variación:

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
1,02	1,03	1,04	0,98	0,99	0,97	0,95	1	1	1,03	1,03	1,02

Multiplicamos los sucesivos índices de variación:

$$1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}95 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02 = 1{,}06$$

El número de parados al finalizar el año será: $380.000 \cdot 1{,}06 = 402.800$ personas

Ha aumentado un 6 %, como vemos por el índice de variación total.

5 **La entrada de un cine cuesta 4,50 €, pero me aplican un descuento del 20 %. Como además es el día del espectador, me aplican un descuento adicional del 30 %. Calcula cuánto me cuesta la entrada ese día.**

6 **El precio de un modelo de coche ha experimentado las siguientes variaciones a lo largo de los últimos cinco años.**

2004	2005	2006	2007	2008
+2,5 %	+3 %	0 %	−1,5 %	−2 %

Si su precio en 2004 era de 15.000 €, calcula cuál será su precio en 2008.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 6

CALCULAR EL INTERÉS SIMPLE O EL INTERÉS COMPUESTO DE UNA CANTIDAD

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Si depositamos un capital C en una entidad bancaria que funciona con un tanto por ciento de interés r y retiramos periódicamente el beneficio obtenido, estamos ante un caso de **interés simple**, y se calcula así:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}, \text{ si el tiempo } t \text{ viene dado en años.}$$

EJEMPLO

Luis ingresa 200 € en una cuenta bancaria al 4 % de interés anual simple, y quiere saber cuánto dinero tendrá al cabo de dos años.

Podemos calcular el interés que le rentan 200 € al año aplicando una regla de tres simple:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100 \text{ €} \rightarrow 4 \text{ € de interés en 1 año}\\ \text{por } 200 \text{ €} \rightarrow x_1 \text{ € de interés en el 1.}^{\text{er}} \text{ año}\end{array}\right\} \rightarrow x_1 = 8 \text{ €}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si por } 100 \text{ €} \rightarrow 4 \text{ € de interés en 1 año}\\ \text{por } 200 \text{ €} \rightarrow x_2 \text{ € de interés en el 2.º año}\end{array}\right\} \rightarrow x_2 = 8 \text{ €}$$

Al final del primer año tendrá: $200 + 8 = 208$ € en la cuenta.

Al final del segundo año tendrá: $200 + 16 = 216$ € en la cuenta.
Habrá ganado 16 € en los dos años.

Otra forma más sencilla de calcular los intereses generados al cabo de los dos años es aplicando la fórmula:

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 16 \text{ €}$$

Y, por tanto, el capital acumulado es: $200 + 16 = 216$ €

1 **Calcula cuánto tiempo ha de permanecer un capital de 600 € a un interés simple del 4 % para que se duplique.**

2 **Calcula cuántos euros habría que ingresar y mantener durante 5 años en una cuenta, al 5 % de interés simple, para que los intereses obtenidos a lo largo de los 5 años sean 100 €.**

Si los intereses generados durante el primer año (mes o día, dependiendo de cómo sea el tanto por ciento de interés) se suman al capital inicial, dando un nuevo capital sobre el que actuará el tanto por ciento de interés, estamos ante un caso de **interés compuesto**.

Para calcular el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital inicial C en t años al tanto por ciento anual r, aplicamos esta fórmula.

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

El interés generado al cabo de esos t años será el capital final menos el capital inicial: $i = C_f - C$

EJEMPLO

Luis quiere saber si le conviene ingresar los 200 € en una cuenta joven al 4 % de interés anual compuesto, para lo cual necesita calcular cuánto dinero se habrá generado al cabo de 2 años y qué capital tendrá entonces.

Al final del 1.er año, el interés generado será de 8 € (igual que con el interés simple), pero sobre el capital al final del 1.er año se aplicarán los intereses, y será: $C_1 = C + i_1 = 200 + 8 = 208$ €.

Al final del 2.º año, el interés generado ese año es:

$$i_2 = 208 \cdot \frac{4}{100} = 8{,}32 \text{ €}$$

Y el capital acumulado es: $C_2 = C_1 + i_2 = 208 + 8{,}32 = 216{,}32$ €

Así, los intereses generados en los dos años son: $i_1 + i_2 = 8 + 8{,}32 = 16{,}32$ €

Si aplicamos directamente la fórmula para este tipo de interés, tenemos que:

$$C_f = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 200 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 200 \cdot 1{,}04^2 = 216{,}32 \text{ €}$$

Y los intereses generados son: $i = C_f - C = 216{,}32 - 200 = 16{,}32$ €

Por tanto, vemos que los intereses generados y el capital final al cabo de los dos años son mayores en la cuenta a interés compuesto. Esta diferencia se hace mayor cuantos más años transcurren.

Normalmente, las cuentas en bancos y cajas de ahorro funcionan a interés compuesto.

3 **Una persona abre una cuenta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto e ingresa 15.000 €, manteniéndolos durante 15 años.**

a) ¿Cuál será el capital final y qué intereses le habrán sido abonados al cabo de los 15 años?

b) ¿Y si mantiene ese dinero en la cuenta durante 20 años?

EJEMPLO

Una persona ha vendido 150 acciones que tenían un *valor nominal* de 4,50 € al *cambio* del 175 %. Si los *gastos de comisión* por la venta suponen el 3 % del *valor efectivo* de las acciones, ¿cuál ha sido el importe neto que ha cobrado?

Las acciones tienen dos valores: el valor **nominal**, es el que figura en el título de la acción, y el valor **efectivo** o real, es el valor con el que dicha acción cotiza en ese momento en la Bolsa. En este caso, el valor nominal de estas acciones era:

$$N = 150 \cdot 4{,}5 = 675 \text{ €}$$

El cambio o **cotización** expresa el porcentaje de ganancia o pérdida del valor efectivo sobre el valor nominal. En este caso, 175 % supone que 1 € nominal se ha convertido en 1,75 € efectivos, y se obtienen 0,75 euros por cada euro invertido en estas acciones.

El valor efectivo con el que se han vendido las acciones ha sido:

$$E = 675 \cdot \frac{175}{100} = 1.181{,}25 \text{ €}$$

Los gastos por comisión son:

$$1.181{,}25 \cdot \frac{3}{100} = 35{,}44 \text{ €}$$

El importe neto de la venta es: $1.181{,}25 - 35{,}44 = 1.145{,}81$ €.

El dinero ganado con la operación es: $1.145{,}81 - 675 = 470{,}81$ €.

4 **Calcula el beneficio o pérdida neto que se obtendría al vender 85 acciones de una empresa de valor nominal 8 € al cambio del 85 %, con un gasto por comisión del 3 %.**

5 **Si necesito disponer de 300 €, ¿cuántas acciones de una empresa de 11 € de valor nominal deberé vender al cambio actual del 140 % para que, una vez restado el gasto del 3 % por gastos de comisión, obtenga los 300 €.**

$$300 = x \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 0{,}97 \cdot x \rightarrow x =$$

5 Polinomios

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros conceptos asociados a él.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos, se estudiará cómo operar con polinomios. Las dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Conviene seguir los ejemplos resueltos, dejar claro el proceso seguido y hacer hincapié a los alumnos en la necesidad de colocar correctamente cada término para operar sin cometer errores.

Asimismo, es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una suma de monomios.
- Un *polinomio reducido* no tiene monomios semejantes. Su grado es el grado del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.
- La *suma de dos polinomios* se hace sumando los términos semejantes de ambos.
- La *resta de dos polinomios* se hace sumando al primer polinomio el opuesto del segundo.
- La *multiplicación de dos polinomios* se hace multiplicando cada uno de los monomios de uno por todos los monomios del otro.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- *Igualdades notables.*

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, y los elementos que forman un polinomio.	• Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Reducción de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	• Valor numérico de un polinomio.	• Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar operaciones con polinomios: sumas y restas.	• Suma y resta de polinomios.	• Suma y resta de polinomios.
4. Realizar operaciones con polinomios: multiplicación.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicación de la propiedad distributiva.
5. Realizar operaciones con polinomios: división.	• División de polinomios.	• División de polinomios. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia.	• Identificación y desarrollo de las igualdades notables.

RECONOCER EL GRADO Y LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio lo primero que hay que hacer es operar:

$$P(x) = 5x^2 \underbrace{-\,3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2$$ **Polinomio reducido**

b) El grado del polinomio es grado 2: $P(x) = 5x^2 - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2}$ → -2 es el término independiente.

→ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ es un **polinomio completo**.

grado: 2 1 0

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underline{7x^3} + \underline{2x^2} + \underline{3}$ es un **polinomio incompleto**, pues falta el término de grado 1.

grado: 3 2 0

1 **Reduce los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$P(x) =$ ______

- Tiene ______ términos.
- El término independiente es ______
- El grado del polinomio es ______
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ______

3 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$ ______

- Tiene ______ términos.
- El término independiente es ______
- El grado del polinomio es ______
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ______

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTAN LOS TÉRMINOS
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:**

a) Si el polinomio es ordenado.
b) Si el polinomio está reducido.
c) Si el polinomio es completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

OBJETIVO 2

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor a sustituyendo a x:

Para $x = 2$:
$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 2, es 9.

Para $x = 10$:
$P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 10, es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ \ ) = \boxed{} + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ +\quad Q(x) = & 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{rr} P(x) = & 3x^3 - 5x^2 \qquad + 5 \\ -\quad Q(x) = & -(5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de estos polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Solo se suman términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplica los monomios.

$$= \boxed{} - \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} =$$

$=$

Suma los términos.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{lr}
P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times\ Q(x) = & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
+ & 7x^5 + 2x^4 + 21x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
\end{array}$$

← *Producto de 3 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Producto de x^2 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Suma de monomios semejantes.*

2 **Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$**

$$\begin{array}{lr}
P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times\ Q(x) = & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
+ & \\
\hline
\boxed{P(x) \cdot Q(x) =} &
\end{array}$$

← *Producto de 2 por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Producto de 3x por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Suma de monomios semejantes.*

3 **Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

  La **división** es **exacta**.

  El polinomio ***P*(*x*) es divisible por *Q*(*x*)**.

- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\quad -25x & \\ \hline \quad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

Multiplicamos 5x por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\quad -25x & \\ \hline \quad \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ \quad -\cancel{3x^2} \qquad\; - 15 & \\ \hline \qquad -20x - 22 & \end{array}$$

Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé 20x, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$
En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

1 **Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

OBJETIVO 6

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$(4x + y) = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$(x^2 - 2) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(3x + 2) \cdot (3x - 2)} = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$\mathbf{(5x - 3y) \cdot (5x + 3y)} = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla los siguientes productos.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla los productos.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

6 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

INTRODUCCIÓN

Para resolver ecuaciones de primer grado aprendemos a transponer términos, resolviendo ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. Para resolver ecuaciones de segundo grado, distinguimos entre ecuaciones completas e incompletas.

A lo largo de la unidad se exponen los tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción. Se deben dejar claros los pasos que hay que dar para resolver un sistema por cada uno de los métodos, así como señalar sus similitudes y diferencias.

Es importante que los alumnos asimilen el método general de resolución de problemas mediante ecuaciones y sistemas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación de primer grado* es una expresión del tipo: $ax = b$. Su solución es $x = \frac{b}{a}$.
- Una *ecuación de segundo grado* es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Un *sistema* de dos *ecuaciones* con dos incógnitas x e y se expresa de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números tales que, al sustituirlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un sistema es *compatible* si tiene solución.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Resolver ecuaciones de primer grado.	• Transposición de términos. • Resolución de ecuaciones.	• Resolución de ecuaciones de 1.^{er} grado transponiendo términos.
2. Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.	• Eliminación de paréntesis. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuaciones de primer grado	• Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. • Comprobación de la solución de una ecuación.
3. Ecuaciones de segundo grado.	• Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. • Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.	• Identificación de una ecuación de segundo grado. • Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas y completas.
4. Resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	• Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.
5. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Coeficientes y términos independientes.	• Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. • Representación gráfica de sistemas, para comprobar si son o no equivalentes.
6. Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.	• Método de sustitución. • Método de igualación. • Método de reducción.	• Resolución de un sistema por los métodos de sustitución, de igualación y de reducción.
7. Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones.	• Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de ecuaciones.	• Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones. • Comprobación de la solución.

OBJETIVO 1

RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que cumple la ecuación.

Para resolver una ecuación de primer grado, **transponemos términos**, lo que consiste en pasar a un miembro (normalmente, al izquierdo) todos los términos con x, y al otro miembro (el derecho), todos los números o términos independientes (términos sin x).

Se deberán tener en cuenta las siguientes reglas.

- **Regla de la suma:** un término que está **sumando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **restando**, y si está **restando** pasa **sumando**.
- **Regla del producto:** un término que está **multiplicando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **dividiendo**, y si está **dividiendo** pasa **multiplicando**.

EJEMPLO

Resuelve esta ecuación de primer grado por transposición: $5x - 3 = 3x + 11$

- Sumamos 3 en los dos miembros:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Para eliminar el término con x del segundo miembro, restamos $3x$ en ambos miembros:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Para despejar la incógnita x, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

1 **Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

RESOLVER ECUACIONES DE 1.er GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS

Para resolver una ecuación de primer grado que contiene paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos, poniendo atención en los cambios de signo cuando haya un signo negativo delante del paréntesis.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$

- Quitamos los paréntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reducimos términos semejantes: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transponemos términos: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Despejamos la x: $x = \dfrac{-8}{-8} = 1$
- Comprobamos la solución:

$$(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$$
$$(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$$
$$3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$$

La solución es correcta, porque el resultado final de las operaciones es el mismo número en ambos miembros de la ecuación.

1 **Resuelve las ecuaciones de primer grado, comprobando la solución.**

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES

Para eliminar los denominadores, hay que calcular su mínimo común múltiplo (m.c.m.) y multiplicar los dos miembros de la ecuación por dicho valor.

EJEMPLO

Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1$

- Calculamos el m.c.m. (2, 3) = 6
- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6:

$$\frac{6(x-5)}{3} - 6 \cdot 2 = \frac{6(x+1)}{2} + 6 \cdot 1 \qquad 2(x-5) - 12 = 3(x+1) + 6$$

- Quitamos los paréntesis: $2x - 10 - 12 = 3x + 3 + 6$
- Reducimos términos semejantes: $2x - 22 = 3x + 9$
- Transponemos términos: $2x - 3x = 9 + 22 \rightarrow -x = 31 \rightarrow x = -31$
- Comprobamos la solución: $\dfrac{x-5}{3} - 2 = \dfrac{x+1}{2} + 1 \rightarrow \dfrac{-31-5}{3} - 2 = \dfrac{-31+1}{2} + 1$

$$\frac{-36}{3} - 2 = \frac{-30}{2} + 1 \rightarrow -12 - 2 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando las soluciones.**

a) $\dfrac{3x-1}{5} = \dfrac{2x+1}{3}$

b) $\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+4}{30}$

c) $\dfrac{x}{3} + 1 = \dfrac{x+2}{5} - \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2x}{6}$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, y comprueba el resultado.**

a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x+1\right)$

c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{6}-\frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{2}+2\left(1-\frac{x}{2}\right)=3\left(\frac{x-2}{5}\right)+3$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga c, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$
  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$
  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:
  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$
- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.
  Tiene una única solución, $x = 0$.
- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$
  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

1 **Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

– Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

– Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.
Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

2 **Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones.**

a) $(x-1)(x+6)-4(3x-4)=0$

b) $x(x-1)+6(x+1)=0$

c) $(x+5)(x-1)-2(x+1)+(x+11)=0$

d) $(x+3)(x-5)+2(x-17)=0$

RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1	$\frac{2x}{3} - 1$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11	$\frac{2x}{3} - 1 = 11$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

1 **Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.**
(Con los números** x**,** $x + 1$ **y** $x + 2$**, plantea la ecuación correspondiente.)

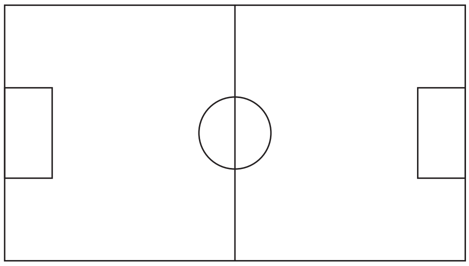
2 **Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.**

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
Su mitad	$\frac{x}{2}$
Su triple	$3x$
5 unidades menor que su triple	$3x - 5$
Su mitad es 5 unidades menor que su triple	$\frac{x}{2} = 3x - 5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).**

El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2\,(x + 40) = 280$



4 **Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.**

Llamamos $x =$ edad de Pepe, $x - 2 =$ edad de María y $x - 3 =$ edad de Juan

5 **El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.**

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
María	13	$13 + x$
Juan	12	$12 + x$
Padre	46	$46 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

6 **La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.**

	EDAD ACTUAL	**DENTRO DE *x* AÑOS**
Pepe	15	$15 + x$
Madre	42	$42 + x$

Planteamos la ecuación:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

7 **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.**

Si representamos los números por x y $x + 1$, sus cuadrados serán x^2 y $(x + 1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

8 **El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.**

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

9 **Un campo de baloncesto tiene 1.000 m² de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.**

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.

10 **Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m². Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.**

	ANTES	**DESPUÉS**
Lado	x	$x + 2$
Superficie	x^2	$(x + 2)^2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\}$$

- **Coeficientes** de las incógnitas: a, a', b, b'
- **Términos independientes:** k, k'
- Una **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve este sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\}$

Las incógnitas son x e y.
Los coeficientes de las incógnitas son 2, −1, 1 y 1.
Los términos independientes son 3 y 3.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la primera ecuación:

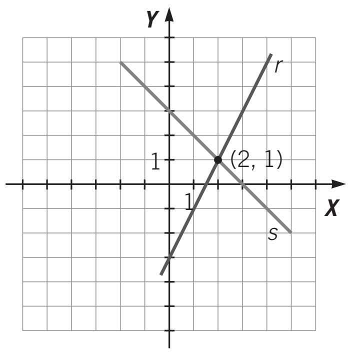
x	0	1	2	3	4	5
y	−3	−1	1	3	5	7

Las parejas de valores de la tabla cumplen la segunda ecuación:

x	0	1	2	3	4	5
y	3	2	1	0	−1	−2

Como vemos, la pareja de valores (2, 1) cumple las dos ecuaciones, por lo que será la solución del sistema.

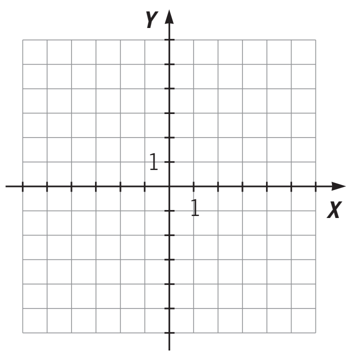
Si representamos las parejas de valores (x, y) de las tablas anteriores, obtenemos dos rectas, r y s, que se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.



1 **Halla las parejas de valores que son soluciones de las ecuaciones del sistema, y determina cuál es la solución.**

Represente las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones, comprobando que el punto en el que se cortan es la solución del sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 8 \\ 3x - 2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$



Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

EJEMPLO

Los sistemas $\left.\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ x + y &= 6 \end{aligned}\right\}$ y $\left.\begin{aligned} x - y &= -2 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$ son equivalentes, ya que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 4$

Si representamos gráficamente ambos sistemas, obtenemos:

Recta r: $3x - y = 2$

x	0	1	2	3
y	−2	1	4	7

Recta t: $x - y = -2$

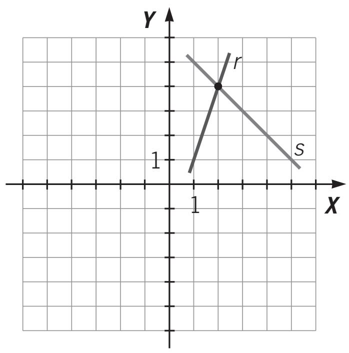
x	0	1	2	3
y	2	3	4	5

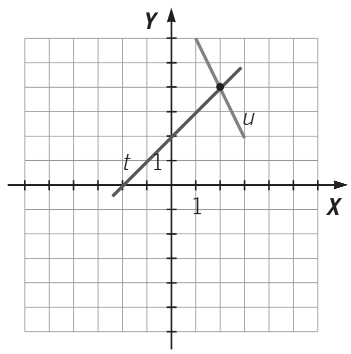
Recta s: $x + y = 6$

x	0	1	2	3
y	6	5	4	3

Recta u: $2x + y = 8$

x	0	1	2	3
y	8	6	4	2





El punto donde se cortan los dos pares de rectas es el mismo: (2, 4), que es la solución de ambos sistemas. Son sistemas equivalentes.

2 **Representa gráficamente las dos ecuaciones de los sistemas. ¿Son equivalentes?**

a) $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 5x - y &= 6 \\ x + y &= 2 \end{aligned}\right\}$

Recta r: $x - 3y = 4$

x	0	1	2	3
y				

Recta t: $5x - y = 6$

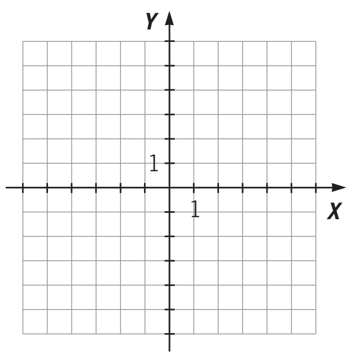
x	0	1	2	3
y				

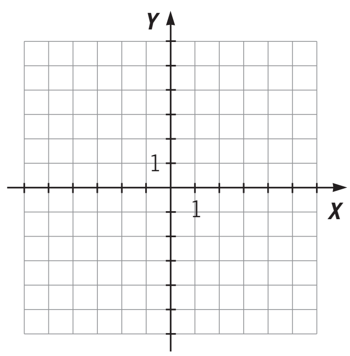
Recta s: $x + y = 0$

x	0	1	2	3
y				

Recta u: $x + y = 2$

x	0	1	2	3
y				





6 OBJETIVO 6

RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones. Si un sistema tiene solución, se dice que es **compatible**.
- **Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar la solución o las soluciones de dicho sistema.

EJEMPLO

Estudia si el par de números (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{8} \end{aligned}\right\}$.

Para ver si el par de números (2, 3) es solución del sistema, hay que comprobar si cumplen o no las dos ecuaciones. Sustituyendo en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ &\rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{aligned}\left.\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de números (2, 3) es una solución del sistema, y el sistema es compatible.

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas hay tres métodos de resolución:

(I) Método de **sustitución**.
(II) Método de **igualación**.
(III) Método de **reducción**.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**:

- **Despejar** la incógnita en una de las ecuaciones.
- **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución: $\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{8} \end{aligned}\right\}$

- **Elegimos** para despejar la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 8 - 2y$
- **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$

- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita y obtenida:

$$16 - 4y - y = 1 \rightarrow 16 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 16 = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{-5} \rightarrow y = 3$$

- **Sustituimos** el valor $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2x - 3 = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (2, 3) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ &\rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{aligned}\left.\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 2$, $y = 3$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

1 **Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{array}\right\}$

2 **Resuelve por el método de sustitución, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + y = 2 \\ \dfrac{2x}{3} + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, seguimos estos pasos.

1.º En cada ecuación reducimos a común denominador:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x+3}{6} + \dfrac{6y}{6} = \dfrac{6 \cdot 2}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y \cdot 3}{3} = -\dfrac{1 \cdot 3}{3} \end{array}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3.º Resolvemos por sustitución el sistema resultante, comprobando la solución:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resuelve por el método de sustitución y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3}{2}+\frac{y}{4}&=1\\ \frac{5x-1}{2}-\frac{4y+39}{5}&=-1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{6}+\frac{y-1}{4}&=2\\ \frac{x-2}{5}-\frac{y+5}{10}&=0 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} \frac{3x-6}{3}-\frac{2y-3}{7}&=-1\\ x+\frac{3y}{2}&=-3 \end{aligned}\right\}$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**:

- **Sustituir** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- **Igualar** las expresiones obtenidas.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 12} \end{aligned}\right\}$$

- **Elegimos** para despejar la incógnita y de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y = 2x - 3 \\ y = 12 - x \end{aligned}\right\}$$

- **Igualamos** las expresiones obtenidas: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita x obtenida:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Sustituimos** el valor $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (5, 7) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ 5 + 7 = 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 5$, $y = 7$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

4 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\frac{x+1}{2} + \frac{2y+2}{3} = 2} \\ \mathbf{\frac{x}{3} - \frac{y-4}{6} = 0} \end{aligned}\right\}$$

1.º Reducimos a común denominador las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3(x+1)}{6} + \frac{2(2y+2)}{6} = \frac{12}{6} \\ \frac{2x}{6} - \frac{y-4}{6} = 0 \end{aligned}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 3 + 4y + 4 = 12 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resolvemos por igualación el sistema resultante:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{aligned}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y+4}{3} &= 1 \\ x - \frac{y-1}{3} &= 2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{y+1}{5} - y &= -2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{5} &= -\frac{1}{15} \end{aligned}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**:

- **Buscar un sistema equivalente** en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando una incógnita.
- **Resolver** la ecuación con una sola incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x - 2y} &= \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{5x + 3y} &= \boldsymbol{18} \end{aligned}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**. Para ello, **elegimos** la incógnita que sea más sencilla para reducir, en este caso *x*. Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$5(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{aligned} 5x - 10y &= 5 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\}$$

- **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar los términos con *x* y reducir el sistema:

$$\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ \underline{-\ (5x + 3y = 18)} \\ -\ 13y = -13 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en la que resulta más sencilla para operar, en este caso la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprobamos** el resultado. Para ello hemos de sustituir el par de valores (3, 1) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 5x + 3y &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3 - 2 \cdot 1 &= 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 &= 18 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 18 &= 18 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ &\rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{aligned}$$

Por tanto, el par de valores $x = 3$, $y = 1$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

6 **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{3x - 2y = 7}\\ \mathbf{2x + 3y = 9}\end{aligned}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**:

  En este caso, la variable *x* o la variable *y* no aparecen multiplicadas por 1 en ninguno de los términos de las ecuaciones, así que podemos elegir una u otra. Elegimos, por ejemplo, la variable *y*.

  Para lograr que los dos términos con variable *y* tengan el mismo coeficiente, hay que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, de forma que:

$$\left.\begin{aligned}3 \cdot (3x - 2y = 7)\\ 2 \cdot (2x + 3y = 9)\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}9x - 6y = 21\\ 4x + 6y = 18\end{aligned}\right\}$$

- **Sumamos** las dos ecuaciones para eliminar los términos con *y*:

$$\begin{array}{r} 9x - \cancel{6y} = 21 \\ + \quad 4x + \cancel{6y} = 18 \\ \hline 13x \qquad = 39 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida: $x = \ldots$
- **Sustituimos** este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de *y*:

- **Comprobamos** la solución:

7 **Resuelve por el método de reducción los sistemas y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{aligned}7x + 3y = 2\\ 5x + 2y = 1\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned}3x - 3y = 3\\ 2x + 5y = 72\end{aligned}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

8 **Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos. Comprueba la solución y decide cuál de los métodos es más sencillo para resolver cada sistema.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es ____________________

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para resolver un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que realizar los siguientes pasos.

1.º **Comprender** el problema.
2.º **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
3.º **Resolver** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
4.º **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

EJEMPLO

La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.

1.º Lee el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

2.º Plantea las ecuaciones y forma el sistema:

- Elegir las incógnitas: $x =$ número de goles marcados por el equipo A
  $y =$ número de goles marcados por el equipo B

- Plantear el problema:

		AHORA		CUANDO HAYAN MARCADO 5 GOLES MÁS
Equipo A	→	x	→	$x + 5$
Equipo B	→	y	→	$y + 5$
		$x + y = 30$		$(x + 5) - (y + 5) = 2$

- Formar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ (x+5) - (y+5) &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$$

3.º Resuelve el sistema por el método que creas más conveniente, en este caso por reducción.
Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar los términos con y:

$$\begin{array}{r} x + y = 30 \\ + \quad x - y = \ \ 2 \\ \hline 2x = 32 \end{array} \quad \rightarrow x = 16$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $16 + y = 30 \rightarrow y = 14$
Por tanto, el equipo A ha marcado 16 goles, y el equipo B, 14 goles.

4.º Comprobamos la solución:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 16 + 14 &= 30 \\ 16 - 14 &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 30 &= 30 \\ 2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Ambas ecuaciones se cumplen, y la solución obtenida es correcta.

1 **Calcula dos números cuya suma es 15 y su diferencia es 1.**

2 En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?

3 En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.

4 Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.

10 Funciones

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de las funciones es la forma más adecuada de entender la relación entre las variables. Estas gráficas se usan en diferentes disciplinas para interpretar y deducir las leyes que rigen determinados fenómenos.

Uno de los objetivos principales de esta unidad es que los alumnos tengan clara la relación entre la representación gráfica de una función y su expresión algebraica, y que sean capaces de realizar ambas.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función*: correspondencia entre variables que asocia a una de ellas, como máximo, un único valor de la otra.
- *Variable independiente*: puede tomar cualquier valor. *Variable dependiente*: su valor depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Función discontinua*: presenta uno o varios puntos en los que una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer las expresiones de una función.	• Formas de expresar la relación entre dos variables.	• Obtención de unas expresiones de una función a partir de otras.
2. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Cálculo del dominio y el recorrido de una función.
3. Distinguir entre funciones continuas y discontinuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de ambos tipos de funciones.
4. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos de una gráfica.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
5. Puntos de corte con los ejes.	• Puntos de corte con el eje *Y*. • Puntos de corte con el eje *X*.	• Cálculo de los puntos de corte con ambos ejes.
6. Conocer las funciones definidas por trozos de recta.	• Funciones definidas por trozos de recta.	• Representación de una función definida a trozos.

10 OBJETIVO 1
CONOCER LAS EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante tablas:** los valores de la variable independiente y sus valores asociados para la variable dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante gráficos:** nos dan una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** con ella podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente, y viceversa.

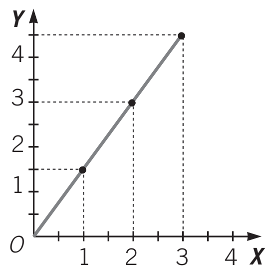
EJEMPLO

El precio de las naranjas es 1,50 €/kg. Vamos a expresarlo de las maneras que acabamos de explicar.

- **Mediante un texto:** el importe que se paga es el producto de 1,50 € por el número de kilogramos adquiridos.
- **Mediante una tabla:** el número de kilogramos es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

KILOGRAMOS DE NARANJAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

- **Mediante un gráfico:** representamos la situación mediante puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos P al importe en euros y n al número de kilos de naranjas, la fórmula es: $P = 1{,}5 \cdot n$.

1 **En un aparcamiento vemos la siguiente tarifa de precios. Obtén la tabla, el gráfico y la fórmula que expresan la relación entre el tiempo (número de horas) que permanece el coche en el aparcamiento y el dinero que se abona.**

TARIFAS

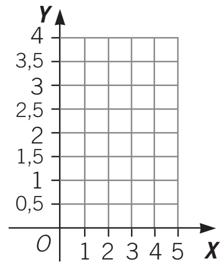
1.ª hora o fracción	2 €
Cada hora adicional o fracción	1,50 €

Máximo: 10 € por 24 horas

La **gráfica** de una función es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

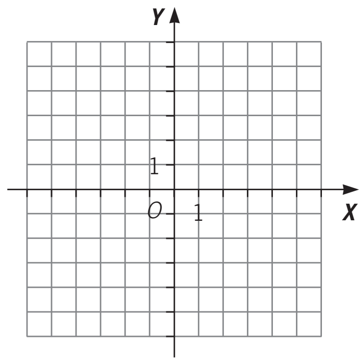
2 **La tabla expresa la relación entre los litros de leche adquiridos y su precio. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LITROS DE LECHE	PRECIO (€)
1	0,75
2	1,50
3	2,25
4	3



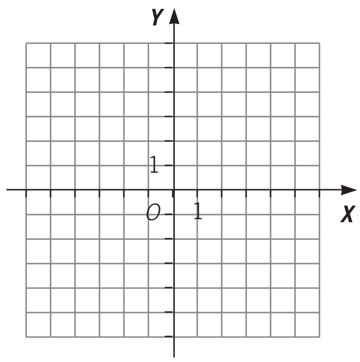
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = 3x - 1$, obtén su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
–1	
2	
–2	



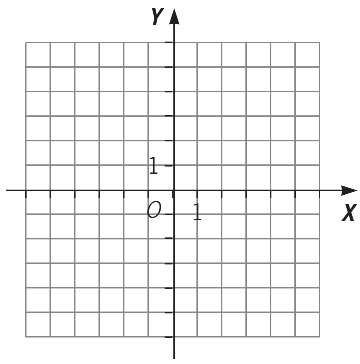
4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 1$, halla su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
–1	
2	
–2	



5 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^3 + 1$, determina su tabla de valores y su gráfica.**

x	$y = f(x)$
0	
1	
–1	
2	
–2	



CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ____________ CURSO: ________ FECHA: ________

Una **función** $y = f(x)$ es una relación entre dos magnitudes o variables, tal que a cada valor de la variable independiente x se le asocia, como máximo, un único valor de la variable dependiente y.

Para indicar que a cada valor de x se le asocia un único valor de y se escribe: $x \rightarrow f(x)$.

Se llama **original** al valor x, e **imagen** al valor y; o también puede ser el valor y la **imagen** y el valor x su **antiimagen**.

El conjunto de valores que puede tomar la variable x se llama **dominio** de la función, y el conjunto de valores que puede tomar la variable y se denomina **recorrido** de la función.

EJEMPLO

Halla el dominio y el recorrido de las funciones.

a) $f(x) = -5x - 2$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, y para cada uno de esos números reales se obtiene un valor real de la variable dependiente y. Así, tenemos que: Im $f = \mathbb{R}$, Dom $f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ En este caso, la variable independiente x puede tomar cualquier valor real, salvo aquel valor para el que se anula el denominador, ya que no existe la división entre cero. Por tanto, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

El recorrido es todos los números reales, Im $f = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$ En este caso, la variable independiente puede tomar cualquier valor real positivo mayor o igual que cero, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Así, el dominio es Dom $= \mathbb{R}^+$. El recorrido es el conjunto de los números reales positivos, $R = \mathbb{R}^+$.

1 **Sea la función $f(x)$ que asocia a cada número real su doble más 5 unidades.**

a) Halla su fórmula o su expresión algebraica.

b) Calcula $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Obtén la antiimagen de $\dfrac{16}{3}$.

d) Determina su dominio y su recorrido.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la resta de ese número menos 3:**

a) Determina si es o no una función y, en caso de serlo, obtén su fórmula.

b) Halla $f(0)$, $f(-1)$ y $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Calcula la antiimagen de $\dfrac{1}{4}$.

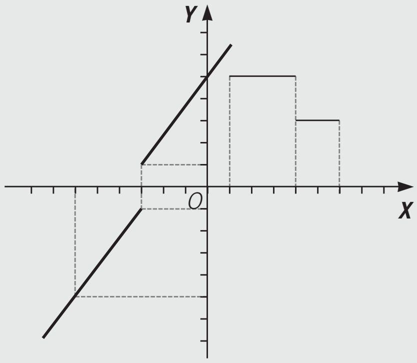
d) Determina su dominio y su recorrido.

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

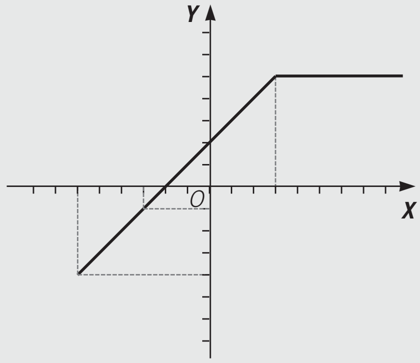
FUNCIÓN NO CONTINUA

Una función no es continua si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente. Esos puntos se denominan puntos de discontinuidad.



FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, no presenta puntos de discontinuidad.



1 **En una tienda de fotocopias tienen la siguiente lista de precios.**

CANTIDAD	PRECIO POR COPIA
Menos de 10	0,06 €
De 11 a 20	0,04 €
De 21 a 50	0,03 €
Más de 50	0,02 €

Representa la función que relaciona el número de fotocopias realizadas y el importe total.

¿Es una función continua?

2 **La tarifa por la bajada de bandera en un taxi es 2 € y por cada 500 metros recorridos hay que abonar 0,50 €.**

a) Construye la tabla de valores y representa la función.

b) ¿Es una función continua o discontinua?

c) Calcula el precio de un recorrido de 3 km.

10 OBJETIVO 4
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA GRÁFICA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dados una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_1) - f(x_2) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_1) - f(x_2) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

La temperatura de un enfermo evolucionó a lo largo de 14 días según se muestra en el gráfico siguiente.

a) ¿En qué días subió la temperatura?

b) ¿En qué días permaneció constante?

c) ¿Y en qué días bajó?

d) ¿Cuál fue la temperatura máxima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

e) ¿Cuál fue la temperatura mínima alcanzada? ¿En qué día la alcanzó?

f) Si le dieron una pastilla los días en que la temperatura subió por encima de 38 ºC, ¿qué días tomó la pastilla?

a) Vemos que la temperatura subió los días 5.º, 6.º y 8.º. Los intervalos de crecimiento de la función son (4, 6) y (7, 8).

b) Permaneció constante los días 1.º, 2.º, 4.º, 7.º, 10.º, 12.º, 13.º y 14.º.

c) La temperatura descendió los días 3.º, 9.º y 11.º. Los intervalos de decrecimiento de la función son (2, 3), (8, 9) y (10, 11).

d) La temperatura máxima fue de 40 °C, y la alcanzó el día 8.º.

e) La temperatura mínima fue de 36 °C. La alcanzó el undécimo día y la mantuvo hasta el final.

f) Tomó la pastilla los días 6.º, 7.º, 8.º, 9.º, 10.º y 11.º.

1 **Representa una función definida por los siguientes valores.**

$f(x = 0) = 2$	$f(2) = 1$	$f(4) = 3$	$f(6) = 6$	$f(8) = 4$
$f(1) = 2$	$f(3) = 3$	$f(5) = 5$	$f(7) = 4$	$f(9) = 2$

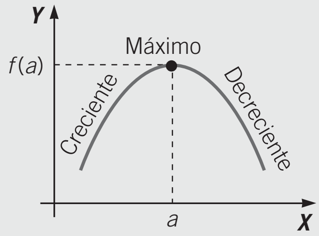
a) ¿En qué tramos la función es creciente?

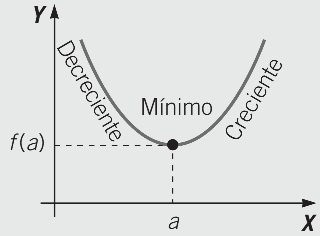
b) ¿En qué tramos es decreciente?

c) ¿Y en qué tramos es constante?

d) ¿Tiene algún punto de discontinuidad?

- Una función tiene un **máximo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es creciente, y a la derecha, la función es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si a la izquierda de ese punto la función es decreciente, y a la derecha, la función es creciente.





2 **Dada la función $y = x^2 - 1$, construye su tabla de valores, represéntala y estudia si es continua o discontinua, su crecimiento y decrecimiento, y si tiene máximos y mínimos.**

3 **En la siguiente tabla aparecen las temperaturas medias registradas durante un año en una localidad.**

MES	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
***T* (°C)**	4	9	11	16	15	22	26	25	22	14	11	7

a) Dibuja una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) Di cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) ¿Tiene algún máximo o mínimo?

OBJETIVO 5

PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

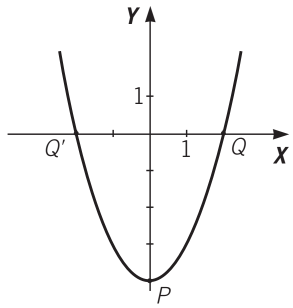
Los puntos en los que la función $y = f(x)$ corta a los ejes se calculan de esta manera.

- **Puntos de corte con el eje *Y*:** haciendo $x = 0$ se obtiene $f(0)$. Los puntos de corte son del tipo $P(0, f(0))$.
- **Puntos de corte con el eje *X*:** haciendo $f(x) = 0$ se obtiene el valor o los valores correspondientes de x. Los puntos de corte son del tipo $Q(x, 0)$.

EJEMPLO

La función $f(x) = x^2 - 4$ tiene estos puntos de corte.

- Con el eje Y, si $x = 0 \rightarrow y = 0 - 4 = -4$.
  Tiene un único punto de corte con el eje Y: $P(0, -4)$.
- Con el eje X, si $y = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$.
  Tiene dos puntos de corte con el eje X: $Q(2, 0)$ y $Q'(-2, 0)$.



1 **Dadas las siguientes funciones, resuelve.**

1.º Construye su tabla de valores y dibuja la función.
2.º Determina su dominio y su recorrido.
3.º Di cuáles son sus intervalos de crecimiento o decrecimiento, y si tienen algún máximo o mínimo.
4.º Halla los puntos de corte con los ejes, si los hubiera.

a) $f(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{-x + 6}{3}$

CONOCER LAS FUNCIONES DEFINIDAS POR TROZOS DE RECTA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EJEMPLO

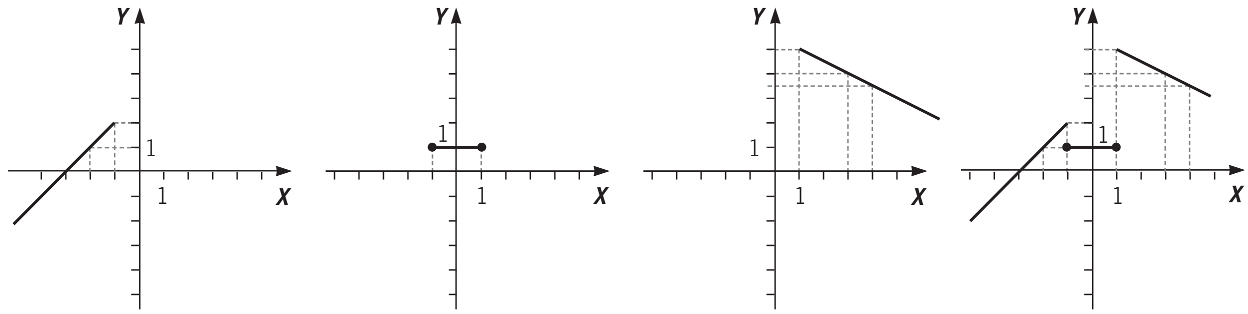
Consideramos la función definida por: $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Esta función tiene tres trozos rectos que determinan el dominio formado por los números reales.
Para cada intervalo construimos su tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	–4	–3	–2
***f*(*x*)**	–1	0	1

x	–1	0	1
***f*(*x*)**	1	1	1

x	2	3	4
***f*(*x*)**	9/2	4	7/2



Señalamos con un punto (•) para indicar que el punto está incluido en dicho trozo de recta.

La función $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$, es creciente en el primer trozo y decreciente en el tercero.

1 **Representa la función.**

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < -4 \\ -\dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ \dfrac{2}{5}x - 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \leq 0 \\ x - 7 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 7x & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 7x - 2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

11 Funciones polinómicas, racionales y exponenciales

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de esta unidad es que los alumnos aprendan a hallar la ecuación de una recta dados dos puntos por los que pasa, o su pendiente y un punto.

Estudiaremos la función cuadrática más simple, $y = ax^2$, su representación gráfica, y sus traslaciones. La función cuadrática en su forma general, $y = ax^2 + bx + c$, supone mayores dificultades.

A los alumnos les cuesta diferenciar las funciones potenciales de las funciones exponenciales, por lo que habrá dedicar el tiempo necesario a trabajar este aspecto.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa*: $y = mx$.
- *Función afín*: $y = mx + n$
- *Función cuadrática*: $y = ax^2$. Su representación es una parábola.
- *Función de proporcionalidad inversa*: $y = \dfrac{1}{x}$
- *Funciones exponenciales:* $f(x) = a^x$, $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{(x+b)}$.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer la función de proporcionalidad directa.	• Función lineal o de proporcionalidad directa.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$.
2. Conocer la función afín.	• Función afín. Representación gráfica.	• Representación de funciones de la forma $y = mx + n$.
3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, o de la recta de la que conocemos su pendiente y un punto por el que pasa.
4. Distinguir entre rectas paralelas y rectas secantes.	• Posición relativa de dos rectas.	• Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes. • Cálculo del punto de corte de dos rectas secantes.
5. Conocer la función cuadrática $y = ax^2$.	• Parábolas de ecuación $y = ax^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2$.
6. Efectuar traslaciones de la función $y = x^2$.	• Traslaciones verticales y horizontales de $y = x^2$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + k$, $y = (x + h)^2$ y $y = (x + h)^2 + k$.
7. Representar la función $y = ax^2 + bx + c$.	• Gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.	• Representación de parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.
8. Conocer la función de proporcionalidad inversa.	• Función de proporcionalidad inversa.	• Representación de hipérbolas de ecuación $y = \dfrac{1}{x}$.
9. Reconocer funciones exponenciales.	• Definición de la función $f(x) = a^x$. • Gráficas y características de las funciones: $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$.	• Estudio de las características de la función $f(x) = a^x$. • Construcción de tablas y gráficas de: $f(x) = a^x + b$ y $f(x) = a^{x+b}$
10. Aplicar funciones exponenciales al interés compuesto.	• Definición de la función capital final para el interés compuesto.	• Cálculo del capital final.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función de proporcionalidad directa**, o **función lineal**, se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = m \cdot x}$, siendo m un número cualquiera.

La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.

La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas viene representada por el número m, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forme con la horizontal.

Cuando entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es de tipo lineal.

EJEMPLO

Determina, a partir de los pares de valores de la tabla, si la relación entre las magnitudes que aparecen en ella es o no de proporcionalidad.

ENTRADAS DE CINE	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	4,50	9	13,50	18	22,50	27

El número de entradas y el importe que se abona son magnitudes directamente proporcionales, ya que si multiplicamos el número de entradas, multiplicaremos por el mismo número el dinero que hay que abonar.

La constante de proporcionalidad es:

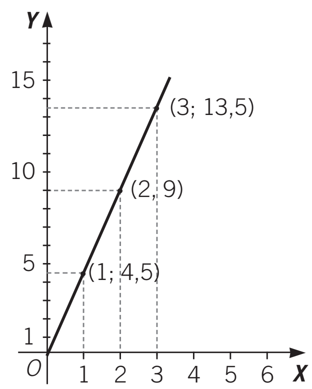
$$m = \frac{4,5}{1} = \frac{9}{2} = \frac{13,5}{3} = \frac{18}{4} = \ldots = 4,5$$

La expresión algebraica de la función que relaciona ambas magnitudes es:

$$y = m \cdot x \rightarrow y = 4,5 \cdot x$$

donde x es el número de entradas e y es el importe que se abona.

La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = 4,5$.
Para representarla hay que señalar en un sistema de ejes de coordenadas los puntos: (1; 4,5), (2, 9), (3; 13,5), (4, 18)…



1 **Un atleta ha recorrido las distancias que se muestran en la tabla en los tiempos que se indican.**

TIEMPO (min)	1	2	3	4
RECORRIDO (km)	0,2	1	1,6	2,4

Determina, a partir de estos pares de valores, si la relación entre ambas magnitudes es o no de proporcionalidad y, en caso de serlo, deduce la expresión algebraica de la función que las relaciona y represéntala.

CONOCER LA FUNCIÓN AFÍN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **función afín** se expresa de la forma: $\boldsymbol{y = m \cdot x + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

- m es la **pendiente** de la recta. Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta es **creciente**, y si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta es **decreciente**.
- n es la ordenada en el origen.

La representación gráfica de estas funciones es una **recta que no pasa por el origen de coordenadas**, sino que pasa por el punto $(0, n)$.

Las funciones de proporcionalidad directa, o funciones lineales, son un caso particular de las funciones afines, cuando $n = 0$.

EJEMPLO

Dadas las siguientes funciones: $\boldsymbol{y = 2x + 2}$ $\quad$ $\boldsymbol{y = -x + 2}$

a) Determina su pendiente y su ordenada en el origen.

b) ¿Cómo serán las rectas, crecientes o decrecientes?

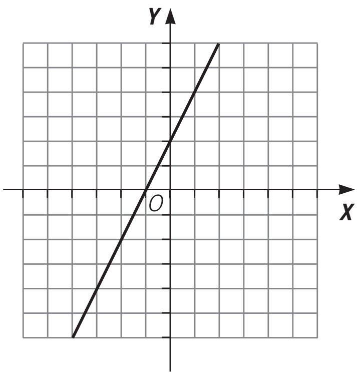
c) Construye su tabla de valores y represéntala.

a) $y = 2x + 2$; pendiente: $m_1 = 2$, $n_1 = 2$

b) Al ser la pendiente positiva: $m_1 = 2 > 0$, la primera recta es creciente.

c)

x	*y*
0	2
1	4
–1	0
2	6

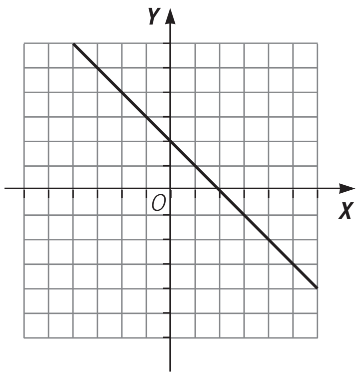


a) $y = -x + 2$, pendiente: $m_2 = -1$, $n_2 = 2$

b) Al ser la pendiente negativa: $m_2 = -1 < 0$, la segunda recta es decreciente.

c)

x	*y*
0	2
1	1
–1	3
2	0



1 **Clasifica las siguientes funciones en lineales o afines. Escribe, en cada caso, el valor de la pendiente y de la ordenada en el origen. Construye sus tablas de valores y represéntalas.**

a) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ b) $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

OBJETIVO 3

OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para representar una recta hay que conocer dos puntos por los que pasa. Así, para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente**: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta $y = mx + n$. y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen, *n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$
$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

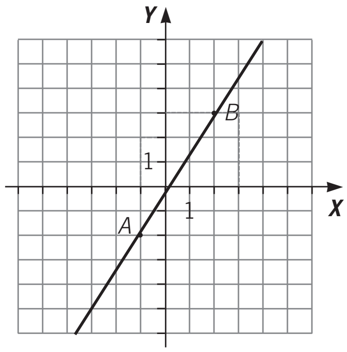
3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n) en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos *A*(−1, −2) y *B*(2, 3).

1.º Calculamos el valor de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{5}{3}$$



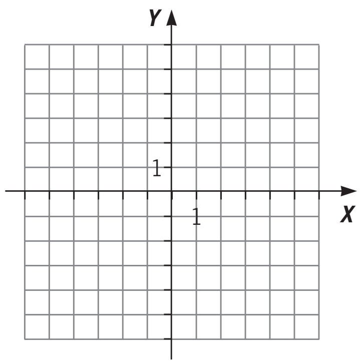
2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen, sustituyendo, por ejemplo, el punto A:

$$y = mx + n \rightarrow -2 = \frac{5}{3} \cdot (-1) + n$$

$$n = -2 + \frac{5}{3} = \frac{-6 + 5}{3} = \frac{-1}{3}$$

3.º Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación general: $y = \dfrac{5}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

1 **Escribe y representa la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(0, 4) y *B*(3, 1).**



2 **Obtén la ecuación de la recta que tiene por pendiente $m = 2$ y que pasa por el punto (0, 3).**

3 **Halla la ecuación de la recta que tiene por ordenada en el origen $n = -1$ y que pasa por el punto (4, 5).**

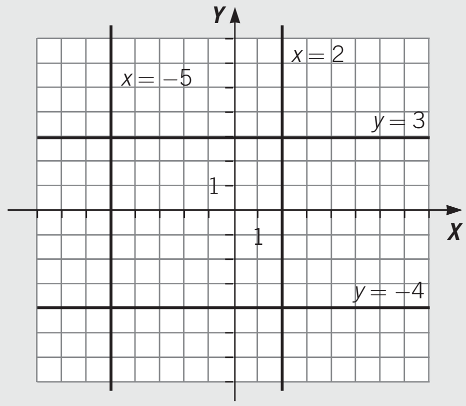
DISTINGUIR ENTRE RECTAS PARALELAS Y SECANTES

El eje horizontal o eje *X* es la recta de ecuación $y = 0$.

Las **rectas paralelas al eje *X*** tienen ecuaciones de la forma $y =$ constante.

El **eje vertical o eje *Y*** es la recta de ecuación $x = 0$.

Las rectas paralelas al eje *Y* tienen ecuaciones de la forma $x =$ constante.



EJEMPLO

Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 1$ y que pasa por el punto (1, 2).

Por ser paralelas, las rectas tendrán la misma pendiente, $m = 3$. Por tanto, su ecuación es $y = 3x + n$.

Como la recta pasa por el punto (1, 2), las coordenadas de este punto deberán cumplir la ecuación de dicha recta:

$$y = 3x + n \rightarrow 2 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -1$$

La recta es $y = 3x - 1$.

1 **Determina la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{2}x$, y que pasa por el origen de coordenadas.**

2 **Obtén la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{array}\right\}$.**

3 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = x - \frac{1}{2}$, y que pasa por el punto donde se cortan las rectas $\left.\begin{array}{r} y = x + 7 \\ y = -5x + 1 \end{array}\right\}$.**

CONOCER LA FUNCIÓN CUADRÁTICA $y = ax^2$

NOMBRE: ______________________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

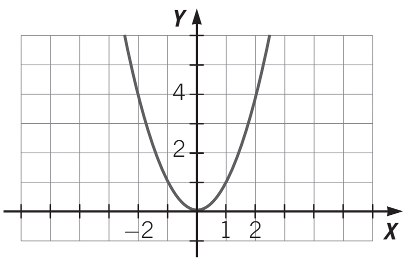
- Cuando $a > 0$, la gráfica de la función $y = ax^2$ es una parábola abierta hacia arriba (en forma de vaso). Cuando $a < 0$, es una parábola abierta hacia abajo (en forma de campana).
- En las parábolas de ecuación $y = ax^2$, el eje Y es su eje de simetría.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

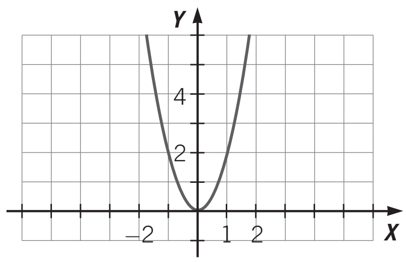
a) $y = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



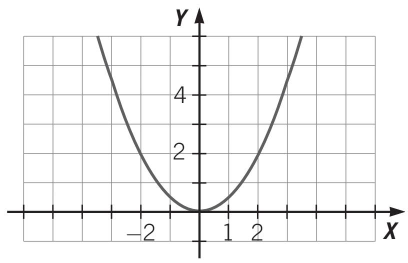
b) $y = 2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



c) $y = \frac{1}{2}x^2$

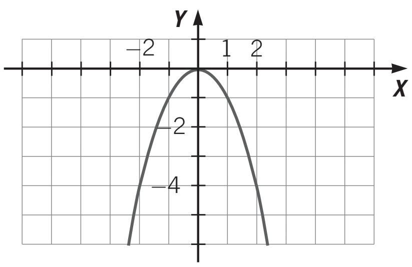
x	−2	−1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	2



Las tres parábolas tienen forma de vaso. Vemos que la parábola $y = 2x^2$ es más estrecha que la parábola $y = x^2$. En cambio, la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha que la parábola $y = x^2$.

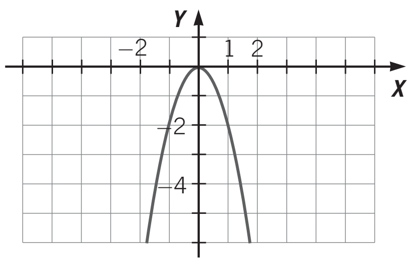
d) $y = -x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4



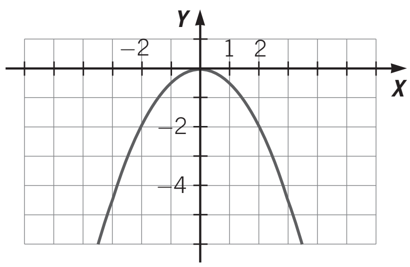
e) $y = -2x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−2	0	−2	−8



f) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	−1/2	0	−1/2	−2



Estas tres parábolas son iguales que las anteriores, pero están abiertas hacia abajo, y tienen forma de campana.

1 **Sin representarlas, di cuáles de las siguientes parábolas tienen forma de vaso o de campana y cuáles son más anchas o estrechas que $y = x^2$.**

a) $y = \frac{1}{4}x^2$ b) $y = -\frac{1}{3}x^2$ c) $y = 5x^2$ d) $y = -7x^2$ e) $y = \frac{5}{3}x^2$ f) $y = -9x^2$

EFECTUAR TRASLACIONES DE LA FUNCIÓN $y = x^2$

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TRASLACIONES VERTICALES

La gráfica de $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando verticalmente k unidades la gráfica de $y = x^2$.

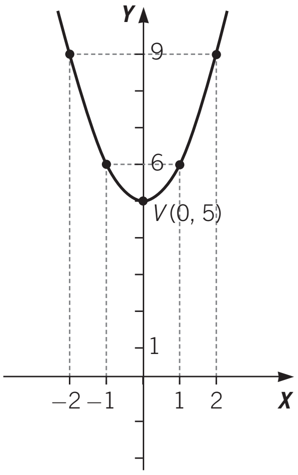
- Si $k > 0$, la traslación vertical es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación vertical es hacia abajo.

EJEMPLO

Representa las siguientes funciones.

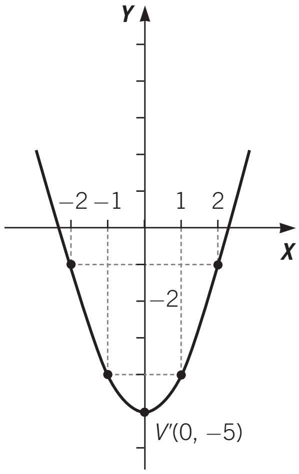
a) $y = x^2 + 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	9	6	5	6	9



b) $y = x^2 - 5$

x	−2	−1	0	1	2
y	−1	−4	−5	−4	−1



La parábola $y = x^2 + 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = x^2 - 5$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 5 unidades hacia abajo.

El vértice de $y = x^2 + 5$ está en $V(0, 5)$, mientras que el vértice de $y = x^2 - 5$ está en $V'(0, -5)$. Así, el eje de simetría es igual en ambas gráficas: el eje Y, y pasa por el vértice de cada una de ellas.

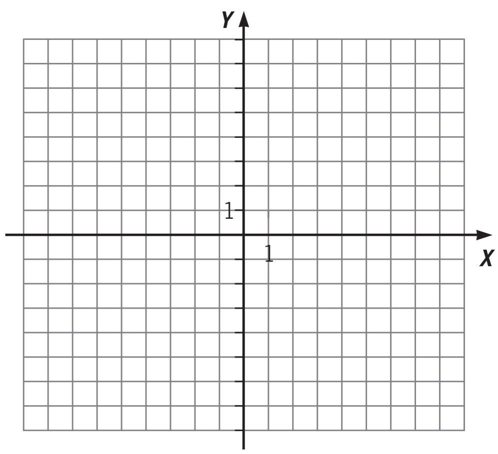
1 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 1$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

TRASLACIONES HORIZONTALES

La gráfica de $y = (x + h)^2$ se obtiene trasladando horizontalmente h unidades la gráfica de $y = x^2$.

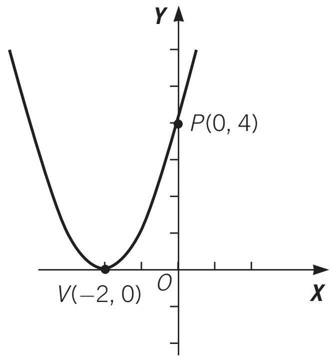
- Si $h > 0$, la traslación horizontal es hacia la izquierda.
- Si $h < 0$, la traslación horizontal es hacia la derecha.

EJEMPLO

Representa las funciones.

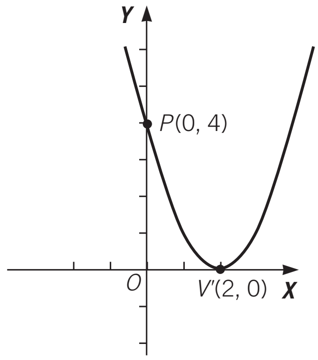
a) $y = (x + 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	4	9	16



b) $y = (x - 2)^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	16	9	4	1	0



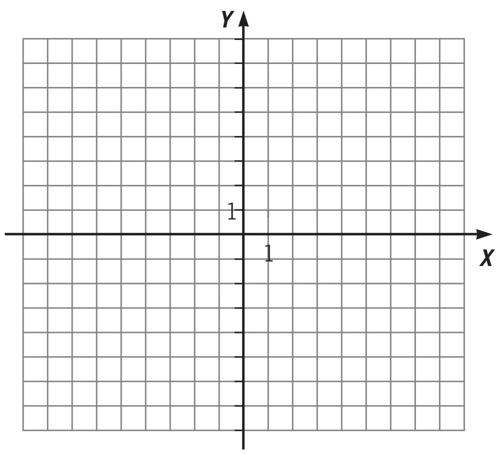
La parábola $y = (x + 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la izquierda, mientras que la parábola $y = (x - 2)^2$ es igual que $y = x^2$, pero trasladada 2 unidades hacia la derecha.

El vértice de $y = (x + 2)^2$ está en $V(-2, 0)$, mientras que el vértice de $y = (x - 2)^2$ está en $V'(2, 0)$. Así, el eje de simetría de la parábola $y = (x + 2)^2$ es la recta $x = -2$, mientras que el eje de $y = (x - 2)^2$ es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

2 **Representa sobre el mismo sistema de ejes, y con colores diferentes, las siguientes parábolas.**

a) $y = (x - 1)^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = x^2 + 3$

Halla las coordenadas de sus vértices y de sus puntos de corte con el eje *Y*, igualando $x = 0$.



TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

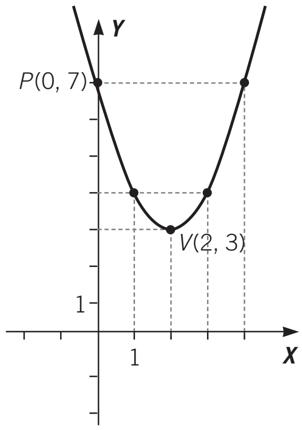
La gráfica de $y = (x - h)^2 + k$ es una parábola como la gráfica de $y = x^2$, pero con el vértice en el punto (h, k).

EJEMPLO

Representa la función $y = (x - 2)^2 + 3$.

Obtenemos su tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	7	4	3	4	7



Si trasladamos la parábola $y = x^2$ en 2 unidades a la derecha se obtiene la parábola $y = (x - 2)^2$. Si a continuación trasladamos esta parábola en 3 unidades hacia arriba, obtenemos la parábola de ecuación $y = (x - 2)^2 + 3$.

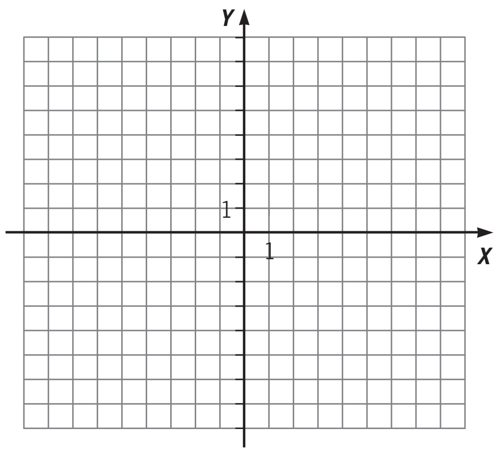
El vértice de $y = (x - 2)^2 + 3$ está en el punto $(h, k) = (2, 3)$.

Su eje de simetría es la recta $x = 2$, que es paralela al eje Y.

3 **A partir de la parábola $y = x^2$, representa las siguientes parábolas sobre el mismo sistema de ejes, con colores diferentes, explicando cómo lo haces.**

a) $y = (x + 2)^2 - 3$ b) $y = (x + 1)^2 + 3$ c) $y = (x - 3)^2 - 1$

Obtén las coordenadas de sus vértices y de su punto de corte con el eje Y, igualando $x = 0$.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 7

REPRESENTAR LA FUNCIÓN $y = ax^2 + bx + c$

NOMBRE: ______ CURSO: ______ FECHA: ______

Para representar una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se siguen estos pasos.

1.º Se calculan los puntos de corte con el eje X. Después, se halla el punto de corte con el eje Y, si lo hubiera.

2.º Se halla el vértice, que tiene por abscisa $x = -\dfrac{b}{2a}$, y que es el valor que debe coincidir con la abscisa del punto medio entre los dos puntos de corte con el eje X.

EJEMPLO

Representa la función $y = 2x^2 - 9x - 18$.

1.º Calculamos los puntos de corte con el eje X, igualando $y = 0$.

$$2x^2 - 9x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 \\ -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son $P(6, 0)$ y $Q\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

Para hallar el punto de corte con el eje Y hacemos $x = 0 \rightarrow y = -18 \rightarrow R(0, -18)$.

2.º El vértice tendrá por abscisa el valor $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-9}{2 \cdot 2} = \dfrac{9}{4}$.

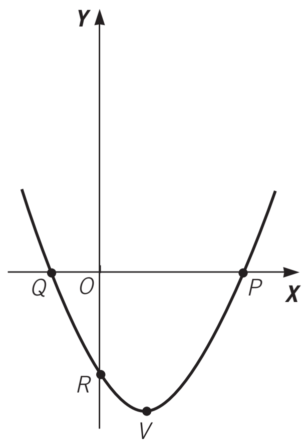
El valor de la ordenada y_V lo obtenemos sustituyendo el valor de x_V en la ecuación de la parábola:

$$y_V = 2x_V^2 - 9x_V - 18 = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9 \cdot \frac{9}{4} - 18 =$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 18 = \frac{81 - 162 - 144}{8} = -\frac{225}{8}$$

Así, el vértice es el punto $V\left(\dfrac{9}{4}, -\dfrac{225}{8}\right)$.

El eje de simetría de la parábola $y = 2x^2 - 9x - 18$ es la recta $x = \dfrac{9}{4}$.



1 **Representa las siguientes parábolas.**

a) $y = -x^2 + 6x - 8$

b) $y = x^2 - 4x - 5$

12 Estadística

INTRODUCCIÓN

La Estadística es la ciencia que estudia los métodos y procedimientos para recoger datos, clasificarlos, analizarlos, tomar decisiones y sacar conclusiones científicas a partir de ellos. Se divide en dos ramas: la Estadística *descriptiva*, que se encarga de la recogida y el análisis de datos pertenecientes a una muestra o a la población, y la Estadística *inductiva*, que se ocupa de generalizar a toda la población los resultados y las conclusiones obtenidos a partir de muestras.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Estadística:* ciencia que recoge, analiza e interpreta los datos de un conjunto de elementos.
- *Medidas de centralización:* parámetros estadísticos de un conjunto de datos que reflejan la tendencia de los datos a concentrarse alrededor de ciertos valores.
- *Medidas de dispersión:* parámetros estadísticos que reflejan el mayor o menor agrupamiento de un conjunto de datos.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer y diferenciar los conceptos de población y muestra.	• Estadística. • Población y muestra.	• Distinción de los conceptos de población y muestra.
2. Clasificar variables estadísticas: cuantitativas y cualitativas.	• Variables cualitativas y cuantitativas. • Variables estadísticas discretas y continuas.	• Diferenciación de las variables cualitativas y cuantitativas, y dentro de estas, de las variables discretas y continuas.
3. Obtener la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.	• Tablas estadísticas. • Marca de clase.	• Construcción de tablas estadísticas adecuadas al conjunto de datos.
4. Hallar la frecuencia absoluta y relativa de un conjunto de datos.	• Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas.	• Cálculo, a partir de la tabla estadística, de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.
5. Construir la tabla de frecuencias acumuladas.	• Frecuencias absolutas acumuladas. • Frecuencias relativas acumuladas.	• Obtención, a partir de la tabla estadística, de frecuencias absolutas acumuladas y de frecuencias relativas acumuladas.
6. Utilizar y analizar los gráficos adecuados para representar datos.	• Gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias.	• Representación de las variables estadísticas mediante gráficos, diferenciando según el tipo de datos recogidos.
7. Calcular las medidas de centralización de un conjunto de datos.	• Media. • Mediana. • Moda.	• Cálculo e interpretación de la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos.
8. Calcular las medidas de dispersión de un conjunto de datos.	• Recorrido. • Desviación media. • Varianza y desviación típica.	• Obtención del recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de un conjunto de datos.

RECONOCER Y DIFERENCIAR LOS CONCEPTOS DE POBLACIÓN Y MUESTRA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **Estadística** es la ciencia encargada de recoger, analizar e interpretar los datos relativos a un conjunto de elementos.
- La **población** es el conjunto de elementos sobre los que se va a estudiar un determinado aspecto o característica.
- La **muestra** es una parte de la población. Es importante escoger bien la muestra, ya que esta ha de ser representativa, es decir, debe dar una información correcta y similar a la obtenida si estudiásemos toda la población.
- El **tamaño** de una muestra es el número de elementos que la componen.

EJEMPLO

Los resultados a la pregunta: ¿Cómo clasificarías las desigualdades que actualmente existen entre hombres y mujeres en nuestro país en el ámbito laboral?, del sondeo de opinión sobre «Las mujeres y el empleo» están recogidos en porcentajes (%) en la tabla.

	TOTAL	**SEXO**	
		Hombres	**Mujeres**
Muy grandes	9	6	13
Bastante grandes	45	40	50
Bastante pequeñas	28	32	24
Casi inexistentes	14	19	9
No sabe/No contesta	4	3	4

Junto al sondeo de opinión aparece esta ficha técnica.

Ámbito: territorio español, excluyendo Ceuta y Melilla.

Universo: población española de ambos sexos de 18 años o más.

Tamaño de la muestra: 2.488 entrevistas.

Error muestral: para un nivel de confianza del 95,5 %, el error es del ± 2 %.

Fecha de realización: 23-27 de enero de 1997 (Centro de Investigaciones Sociológicas, CIS).

El error del ± 2 % significa que a la respuesta de «Muy grandes», que es el 9 % en la muestra (2.488 casos), la respuesta en la población sería del 9 ± 2 %; es decir, entre un 7 % y un 11 % de las personas contestarían «Muy grandes», afirmándolo en el 95,5 % de las estimaciones (nivel de confianza).

En los estudios estadísticos se eligen muestras en lugar de poblaciones cuando estas son muy amplias, por motivos económicos, por la rapidez en conocer los resultados, etc.

1 **Hazle esa misma pregunta a tus compañeros de clase y construye una tabla similar a la anterior, pero sin calcular porcentajes, es decir, apuntando cuántos compañeros han dado cada una de las respuestas y su género.**

CLASIFICAR VARIABLES ESTADÍSTICAS: CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Una **variable estadística** es cualquier característica o aspecto de los elementos de una población o de una muestra que se puede estudiar.

Las variables estadísticas pueden ser:

- **Variables cuantitativas:** se pueden medir y se expresan mediante números. A su vez, pueden ser discretas o continuas.
  – Las **variables cuantitativas discretas** toman un número determinado de valores.
  – Las **variables cuantitativas continuas** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos valores dados.
- **Variables cualitativas:** no se pueden medir y se expresan mediante cualidades o descripciones.

EJEMPLO

Señala, en cada caso, qué *tipo de variable* es, y di si es más conveniente estudiar la *población* o una *muestra*.

a) La estatura de los 20 alumnos de una clase: *variable cuantitativa continua*, y estudiamos la *población*.

b) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano: *variable cualitativa*, y estudiamos una *muestra* de la población.

c) La talla de pantalones de los varones de una Comunidad Autónoma: *variable cuantitativa discreta*, y estudiamos una *muestra*.

d) Las aficiones deportivas de los alumnos de un instituto: *variable cualitativa*, y podemos estudiar una *muestra* de alumnos de los diferentes cursos.

e) El color del pelo de los alumnos de una clase: *variable cualitativa*, y en este caso es conveniente estudiar la *población*.

1 **Señala en cada caso lo que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA	POBLACIÓN	MUESTRA
	Discreta	Continua			
Profesión del padre					
Número de personas que viven en cada piso de un edificio					
Número de llamadas realizadas desde un teléfono al día					
Equipo de fútbol preferido por cada alumno de una clase					
Temperaturas medidas a lo largo de una semana					
El peso de cada uno de los 20 alumnos de una clase					

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 3

OBTENER LA TABLA ESTADÍSTICA ASOCIADA A UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **tablas estadísticas** sirven para ordenar y estudiar los datos de una variable estadística.

Si la variable es **discreta**, es decir, si tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas. En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna se indica el número de veces que aparece cada uno de ellos.

Si la variable es **continua**, y tenemos un conjunto de datos grande:

1.º Se halla el **recorrido** de la variable, o la diferencia entre sus valores mayor y menor.
2.º Se agrupan los valores en **intervalos de igual amplitud**.
3.º Se establece la **marca de clase**, que es el punto medio de cada intervalo.
4.º Se hace el **recuento** de cada uno de los datos.

EJEMPLO

Las notas obtenidas en un examen de Matemáticas por los 20 alumnos de una clase de 4.º ESO, han sido: 6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8, 7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5 y 5. Ordena estos datos en una tabla.

El número de valores que puede tomar la variable es pequeño, y es una variable discreta.

Para recoger los datos en una tabla, ponemos en la primera columna los posibles valores de las notas, que en este caso es la variable estadística, y en la segunda columna, el número de veces que ha salido cada una de ellas.

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RECUENTO	1	1	1	1	5	3	3	2	2	1

EJEMPLO

El número de personas que viven en cada uno de los edificios de una calle son:

69, 85, 139, 114, 103, 84, 97, 133, 155, 127, 110, 138, 94, 143, 106, 99, 80, 74, 102, 93, 128, 78, 86, 104, 121, 137, 89, 107, 92 y 101

Haz una tabla, el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, el número de posibles valores que puede tomar la variable es grande, pues varía entre 69 y 155. Agrupamos los datos en intervalos. Para ello, hallamos el recorrido (diferencia entre el mayor y el menor valor):

$$155 - 69 = 86$$

Tomaremos 6 intervalos de amplitud 15 ($6 \cdot 15 = 90 > 86$), empezando por el menor valor: 69.

INTERVALO	**MARCA DE CLASE**	**RECUENTO**
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

Las marcas de clase son: $\frac{69+84}{2} = 76{,}5$ $\quad \frac{99+114}{2} = 106{,}5$ $\quad \frac{129+144}{2} = 136{,}5$

$\frac{84+99}{2} = 91{,}5$ $\quad \frac{114+129}{2} = 121{,}5$ $\quad \frac{144+159}{2} = 151{,}5$

HALLAR LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La **frecuencia absoluta f_i** de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable x_i en el total de los datos.

La **frecuencia relativa h_i** es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos:

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, *n*. La suma de todas las frecuencias relativas es 1.

Multiplicando la frecuencia relativa por 100, obtenemos el porcentaje (%).

EJEMPLO

Con los datos de las notas del examen de Matemáticas del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias y porcentajes.

En la segunda columna colocamos el recuento, es decir, el número de veces que aparece cada valor. Este recuento se llama *frecuencia absoluta*.

En la tercera columna colocamos el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos (20). Este número se llama *frecuencia relativa*.

$$h_1 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad h_6 = \frac{3}{20} = 0{,}05$$

$$h_2 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \qquad h_7 = \frac{3}{20} = 0{,}05$$

$$h_3 = \frac{1}{20} = 0{,}25 \qquad h_8 = \frac{2}{20} = 0{,}15$$

$$h_4 = \frac{1}{20} = 0{,}15 \qquad h_9 = \frac{2}{20} = 0{,}10$$

$$h_5 = \frac{5}{20} = 0{,}10 \qquad h_{10} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

x_i	f_i	h_i	%
1	1	0,05	5
2	1	0,05	5
3	1	0,05	5
4	1	0,05	5
5	5	0,25	25
6	3	0,15	15
7	3	0,15	15
8	2	0,10	10
9	2	0,10	10
10	1	0,05	5
Suma	20	1	100

En la cuarta columna colocamos el porcentaje, que es el resultado de multiplicar por 100 cada valor de la frecuencia relativa h_i.

1 **Se ha lanzado un dado 20 veces, obteniendo los siguientes resultados:**
2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 y 3. Construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa y los porcentajes.

EJEMPLO

Con los datos del ejemplo anterior del número de habitantes de cada edificio construye la tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes.

En la primera columna colocamos los valores de la variable (número de habitantes por edificio), agrupados en 6 *intervalos* de amplitud 15; en la segunda columna ponemos la *marca de clase* de cada intervalo; en la tercera columna indicamos la *frecuencia absoluta*; en la cuarta, la *frecuencia relativa*, y en la quinta, el *porcentaje*.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4/30 = 0,13	13
[84, 99)	91,5	8	8/30 = 0,27	27
[99, 114)	106,5	8	8/30 = 0,27	27
[114, 129)	121,5	4	4/30 = 0,13	13
[129, 144)	136,5	5	5/30 = 0,17	17
[144, 159)	151,5	1	1/30 = 0,03	3
Suma		30	1	100

2 **El peso (en kilos) de una muestra de 30 individuos, escogidos al azar, es: 59, 69, 74, 70, 68, 85, 83, 75, 56, 92, 86, 94, 58, 61, 74, 77, 79, 67, 84, 73, 82, 74, 79, 80, 81, 65, 60, 59, 73 y 62. Agrupa los datos en intervalos y construye una tabla con las frecuencias absoluta y relativa y los porcentajes.**

Hay que calcular el recorrido de la variable (peso, en este caso). Para ello, observamos cuáles son los valores menor y mayor.

valor **menor** = 56   valor **mayor** = 94   **recorrido** = 94 − 56 = 38

Podemos tomar 5 intervalos de amplitud 10, ya que $5 \cdot 10 = 50 > 38$.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[50, 60)				
[60, 70)				
[70, 80)				
[80, 90)				
[90, 100)				
Suma				

CONSTRUIR LA TABLA DE FRECUENCIAS ACUMULADAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **frecuencia absoluta acumulada F_i** de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_i de todos los valores menores o iguales que él.
- La **frecuencia relativa acumulada H_i** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos: $H_i = \frac{F_i}{N}$.

EJEMPLO

Con los datos de las notas del examen de Matemáticas del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

Obtenemos la frecuencia absoluta acumulada de cada valor:

$F_1 = f_1 = 1$

$F_2 = F_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$

$F_3 = F_2 + f_3 = 2 + 1 = 3$

$F_4 = F_3 + f_4 = 3 + 1 = 4$

$F_5 = F_4 + f_5 = 4 + 5 = 9$

$F_6 = F_5 + f_6 = 9 + 3 = 12$

$F_7 = F_6 + f_7 = 12 + 3 = 15$

$F_8 = F_7 + f_8 = 15 + 2 = 17$

$F_9 = F_8 + f_9 = 17 + 2 = 19$

$F_{10} = F_9 + f_{10} = 19 + 1 = 20$

Calculamos la frecuencia relativa acumulada de los distintos valores:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = H_1 + h_2 = 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}10$$

$$H_3 = \frac{F_3}{N} = H_2 + h_3 = 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}15$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = H_3 + h_4 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20$$

$$H_5 = \frac{F_5}{N} = H_4 + h_5 = 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}45$$

$$H_6 = \frac{F_6}{N} = H_5 + h_6 = 0{,}45 + 0{,}15 = 0{,}60$$

$$H_7 = \frac{F_7}{N} = H_6 + h_7 = 0{,}60 + 0{,}15 = 0{,}75$$

$$H_8 = \frac{F_8}{N} = H_7 + h_8 = 0{,}75 + 0{,}10 = 0{,}85$$

$$H_9 = \frac{F_9}{N} = H_8 + h_9 = 0{,}85 + 0{,}10 = 0{,}95$$

$$H_{10} = \frac{F_{10}}{N} = H_9 + h_{10} = 0{,}95 + 0{,}05 = 1$$

DATOS	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
1	1	1	0,05	0,05
2	1	2	0,05	0,10
3	1	3	0,05	0,15
4	1	4	0,05	0,20
5	5	9	0,25	0,45
6	3	12	0,15	0,60
7	3	15	0,15	0,75
8	2	17	0,10	0,85
9	2	19	0,10	0,95
10	1	20	0,05	1

1 **Un dado se ha lanzado 20 veces, obteniéndose los siguientes resultados.**

2, 3, 5, 4, 2, 4, 6, 5, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 4, 6, 3 y 3

Construye la tabla de frecuencias con las columnas de las frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

EJEMPLO

Con los datos de los habitantes de cada edificio del ejemplo anterior, construye una tabla de frecuencias absolutas y relativas acumuladas.

INTERVALO	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[69, 84)	76,5	4	4	4/30 = 0,13	0,13
[84, 99)	91,5	8	12	8/30 = 0,27	0,40
[99, 114)	106,5	8	20	8/30 = 0,27	0,67
[114, 129)	121,5	4	24	4/30 = 0,13	0,80
[129, 144)	136,5	5	29	5/30 = 0,17	0,97
[144, 159)	151,5	1	30	1/30 = 0,03	1
Suma		30		1	

2 **Con los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior, completa la tabla con las frecuencias absolutas y relativas acumuladas.**

INTERVALO	x_i	f_i	F_i	h_i	%
[50, 60)	55				
[60, 70)					
[70, 80)					
[80, 90)					
[90, 100)					
Suma					

UTILIZAR Y ANALIZAR LOS GRÁFICOS ADECUADOS PARA REPRESENTAR DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Los **gráficos** representan la información que contienen las tablas estadísticas. Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

VARIABLES DISCRETAS

- **Diagrama de barras:** para representar datos cuantitativos o cualitativos discretos.
  Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- El **polígono de frecuencias** es una línea poligonal que se obtiene al trazar, en el diagrama de barras, una línea desde cada extremo de una barra hasta el extremo de la barra siguiente.

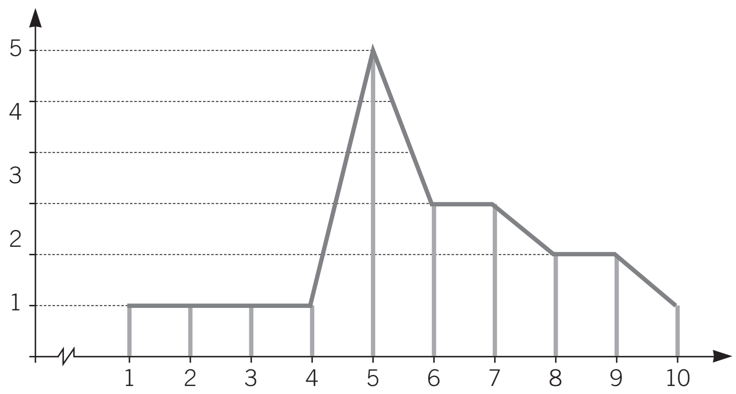
VARIABLES CONTINUAS

- **Histograma:** para representar variables cuantitativas continuas.
  Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual que la frecuencia que se va representar.
- El **polígono de frecuencias** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo de las notas en el examen de Matemáticas, construye el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20

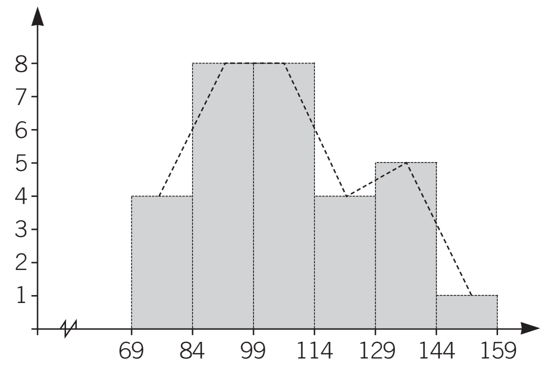


1 **Con los datos del ejemplo del lanzamiento del dado, construye el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.**

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo anterior de los habitantes de cada edificio, construye el histograma y el polígono de frecuencias.

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1



2 **Con los datos del peso de las 30 personas, construye el histograma y el polígono de frecuencias.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2
Suma		

GRÁFICO DE SECTORES

Se divide un círculo en sectores de ángulo proporcional a la frecuencia absoluta de cada valor de la variable estadística.

EJEMPLO

Con las frecuencias absolutas del ejemplo de las notas en el examen de Matemáticas, construye el diagrama de sectores.

x_i	f_i
1	1
2	1
3	1
4	1
5	5
6	3
7	3
8	2
9	2
10	1
Suma	20

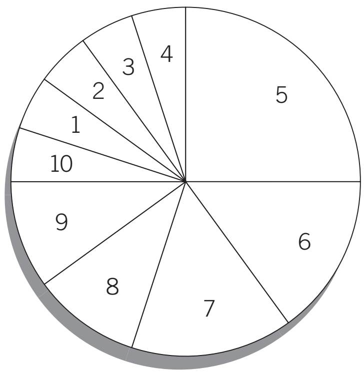
Para hallar la amplitud de cada sector, aplicamos con cada valor una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 1 \text{ caso}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 1}{20} = 18°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 5 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 5}{20} = 90°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 3 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 3}{20} = 54°$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 360° \longrightarrow 20 \text{ casos}\\ x \longrightarrow 2 \text{ casos}\end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{360 \cdot 2}{20} = 36°$$



3 **Representa en un gráfico de sectores las frecuencias del ejemplo de los habitantes de cada edificio.**

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

ADAPTACIÓN CURRICULAR

CALCULAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

La media, la mediana y la moda son medidas de centralización, ya que reflejan la tendencia de los datos a concentrarse alrededor de ciertos valores.

La **media**, $\bar{x}$, de un conjunto de datos $x_1, x_2, \dots, x_n$ es: $\bar{x} = \dfrac{x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la nota media de las notas obtenidas por los 20 alumnos en el examen de Matemáticas.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Suma
f_i	1	1	1	1	5	3	3	2	2	1	20
$x_i \cdot f_i$	1	2	3	4	25	18	21	16	18	10	118

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N} = \frac{118}{20} = 5{,}9$$

1 **Determina la media de habitantes en cada edificio de una calle del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[69, 84)	76,5	4	
[84, 99)	91,5	8	
[99, 114)	106,5	8	
[114, 129)	121,5	4	
[129, 144)	136,5	5	
[144, 159)	151,5	1	

2 **Halla la media de los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

- La **mediana** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores que él. Se representa por ***Me***.
- Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central, colocados los datos de forma creciente.
- Si el conjunto de datos es par, la mediana es la media de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el valor de la variable o el intervalo que más se repite. Se representa por ***Mo***.
- El valor de la moda puede no ser único, es decir, puede haber varios valores de la variable o intervalos que se repitan por igual.

EJEMPLO

En el ejemplo del examen de Matemáticas, el número de notas es par, y la mediana será:

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$$

La moda es el valor que más se repite: $Mo = 5$.

3 **Halla la mediana y la moda en el ejemplo de los habitantes de cada edificio, tomando para ello las marcas de clase.**

INTERVALO	x_i	f_i
[69, 84)	76,5	4
[84, 99)	91,5	8
[99, 114)	106,5	8
[114, 129)	121,5	4
[129, 144)	136,5	5
[144, 159)	151,5	1

4 **Obtén la mediana y la moda de los datos del peso de las 30 personas del ejemplo anterior.**

INTERVALO	x_i	f_i
[50, 60)	55	4
[60, 70)	65	7
[70, 80)	75	10
[80, 90)	85	7
[90, 100)	95	2

CALCULAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Las **medidas de dispersión** son las medidas estadísticas que indican el mayor o menor grado de agrupamiento de los valores que forman un conjunto de datos.
- El rango o recorrido, la desviación, la desviación media, la varianza y la desviación típica son medidas de dispersión.
- El **rango o recorrido** se calcula como la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de la variable estadística.
- La **desviación respecto a la media** es la diferencia entre cada valor de la variable y la media de dicha variable.

  La suma de las desviaciones es siempre cero.

EJEMPLO

En una ciudad hay dos coros, A y B, formados por 9 personas cada uno, cuyas edades son:

CORO A	10	10	20	30	30	30	40	50	50
CORO B	25	25	30	30	30	30	30	35	35

Halla la media de edad de cada coro, la mediana, la moda, el recorrido y la desviación.

- La media de cada coro es:

$$\bar{x}_A = \frac{10+10+20+30+30+30+40+50+50}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ años}$$

$$\bar{x}_B = \frac{25+25+30+30+30+30+30+35+35}{9} = \frac{270}{9} = 30 \text{ años}$$

- La mediana es 30 en ambos casos, ya que ocupa el lugar central en cada serie.
- La moda es también igual en las dos series, 30.

  Se observa que los dos coros tienen los tres promedios iguales, pero son muy desiguales respecto a las edades. El coro A tiene dos niños de 10 años y dos personas mayores de 50 años, es decir, hay cuatro valores muy alejados de la edad media; en cambio, en el coro B, las edades son más homogéneas, pues todas están próximas a la media.

  Si queremos tener en cuenta estos aspectos, hay que medir el grado de separación o de dispersión de los datos con respecto a la media.
- El recorrido del coro A es: $50 - 10 = 40$ años, mientras que el recorrido del coro B es: $35 - 25 = 10$ años.
- Para los componentes de cada coro, las desviaciones son:

CORO A	10	10	20	30	30	30	40	50	50
$x - 30$	–20	–20	–10	0	0	0	10	20	20

CORO B	25	25	30	30	30	30	30	35	35
$x - 30$	–5	–5	0	0	0	0	0	5	5

Observa que, en ambos casos, la suma de las desviaciones es cero.

1 **En un examen se han obtenido las siguientes notas: 3, 5, 7, 2, 9, 5 y 3. Obtén el recorrido y la desviación.**

- La **desviación media (*DM*)** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.

$$DM = \frac{\Sigma\,|x_i - \overline{x}|}{N}$$

Si los datos vienen dados con sus frecuencias, la desviación media es:

$$DM = \frac{\Sigma\,|x_i - \overline{x}| \cdot f_i}{N}$$

- La **varianza** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
Mide las desviaciones respecto de la media al cuadrado.

- La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza. Se designa con la letra σ.

Para datos simples, su fórmula es: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}}$

Para datos agrupados, su fórmula es: $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{N}}$

EJEMPLO

Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica de los dos coros del ejemplo anterior.

En este caso, los datos no vienen dados con sus frecuencias (la frecuencia de cada dato es 1).

- Las desviaciones medias son:

$$DM_A = \frac{|-20| + |-20| + |-10| + 0 + 0 + 0 + |10| + |20| + |20|}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

$$DM_B = \frac{|25 - 30| + |25 - 30| + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + |35 - 30| + |35 - 30|}{9} = \frac{20}{9} = 2{,}22$$

Se observa que la desviación media del coro A es mayor que la del coro B.

- Las varianzas y las desviaciones típicas de ambos coros son:

$$\text{Varianza del coro A} = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 + d_9^2}{9} =$$

$$= \frac{(-20)^2 + (-20)^2 + (-10)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 10^2 + 20^2 + 20^2}{9} =$$

$$= \frac{400 + 400 + 100 + 0 + 0 + 0 + 100 + 400 + 400}{9} = \frac{1.800}{9} = 200$$

Desviación típica: $\sigma_A = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{200} = 14{,}14$

$$\text{Varianza del coro B} = \frac{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2 + 5^2}{9} =$$

$$= \frac{25 + 25 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 25 + 25}{9} = \frac{100}{9} = 11{,}11$$

Desviación típica: $\sigma_B = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{11{,}11} = 3{,}33$

Se observa que la desviación típica en el coro A es bastante mayor que en el coro B, es decir, $\sigma_A > \sigma_B$.
Esto refleja que la dispersión de las edades en el coro A es mucho mayor que en el coro B.
La desviación típica aumenta a medida que se incrementa la dispersión de los datos.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **En la tabla aparecen los resultados obtenidos en una prueba de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.**

INTERVALO	x_i	f_i
[0, 30)	15	12
[30, 60)	45	20
[60, 90)	75	10
[90, 120)	105	7

3 **Las alturas (en cm) de los alumnos de una clase de 4.º ESO se distribuyen según la tabla.**

INTERVALOS DE ALTURAS	FRECUENCIAS ABSOLUTAS
[145, 150)	51
[150, 155)	95
[155, 160)	141
[160, 165)	152
[165, 170)	120
[170, 175)	88
[175, 180)	58

Resuelve.

a) Completa la tabla con las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas.

b) Dibuja el histograma y el polígono de frecuencias correspondiente.

c) Calcula la media aritmética.

d) Determina el intervalo modal y toma como moda la marca de clase correspondiente.

e) Calcula la mediana.

f) Halla la desviación típica.

(Sugerencia: averigua el intervalo cuya frecuencia absoluta acumulada** F_i **es inmediatamente superior que la mitad del número de datos. Ese es el intervalo en el que se encuentra la mediana, y su marca de clase se puede tomar como valor aproximado de la mediana.)

