Tema 11: Probabilidad y Combinatoria

11.0.- Introducción

A cualquiera que preguntemos cuanto tiempo tardaríamos en recorrer los 350 kilómetros que separan Valencia de Barcelona, si nos desplazamos con velocidad constante de 100 km/h, nos contestará sin dudar que 3 horas y media. Su actitud sería muy distinta si, previamente a su lanzamiento, le preguntamos por la cara que nos mostrará un dado. Se trata de dos fenómenos de naturaleza bien distinta;

- el primero pertenece a los que podemos denominar ***deterministas***, aquellos en los que la relación causa-efecto aparece perfectamente determinada. En nuestro caso concreto, la conocida ecuación $e = v \cdot t$, describe dicha relación,

- el segundo pertenece a la categoría de los que denominamos ***aleatorios***, que se caracterizan porque aun repitiendo en las mismas condiciones el experimento que lo produce, el resultado variará de una repetición a otra dentro de un conjunto de posibles resultados.

La Teoría de la Probabilidad pretende emular el trabajo que los físicos y, en general, los científicos experimentales han llevado a cabo. Para entender esta afirmación observemos que la ecuación anterior, $e = v \cdot t$, es un resultado experimental que debemos ver como un modelo matemático que, haciendo abstracción del móvil concreto y del medio en el que se desplaza, describe la relación existente entre el espacio, el tiempo y la velocidad.

La Teoría de la Probabilidad nos permitirá la obtención de modelos aleatorios o estocásticos mediante los cuales podremos conocer, en términos de probabilidad, el comportamiento de los fenómenos aleatorios.

11.1.- Experimentos Aleatorios

Un experimento se llama aleatorio cuando se conocen todos los posibles resultados del mismo, pero no puede predecirse cuál de ellos se producirá en una experiencia correcta. Son ejemplos de experimentos aleatorios: lanzar una moneda al aire, extraer un naipe de la baraja, lanzar un dado, etc.

En un experimento Aleatorio: ***"Sabemos lo que puede ocurrir, pero no lo que va a ocurrir."***

11.2.- Espacio Muestral

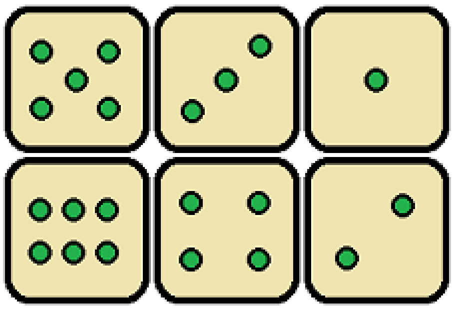
Conjunto de todos los resultados que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Si lanzamos una moneda al aire, caben dos posibilidades C y +.

El espacio muestral es **E={C,+}.**

Al lanzar un dado caben seis posibilidades, 1,2,3,4,5 y 6, por tanto,

El espacio muestral es **E={1,2,3,4,5,6}**



11.3.- Sucesos

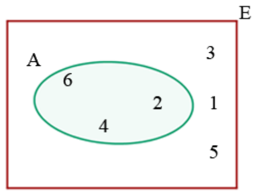
Se llama suceso a cualquier subconjunto del espacio muestral E. Los sucesos se simbolizan por las letras A,B,C…. Si E es un conjunto con n elementos hay 2^n posibles sucesos.

11.3.1.- Tipos de Sucesos

- Sucesos Elementales: Formados por un solo elemento del experimento, A{C}, B{+}.
- Suceso Compuesto: Es un suceso formado por varios sucesos elementales. A{1,2,3}.
- Suceso Seguro: Es el suceso que siempre ocurre, está formado por todos los sucesos elementales. Coincide con el espacio muestral.
- Suceso Imposible: Es el suceso que nunca ocurre, se representa por ϕ. (Conjunto Vacío)

Ejemplos: El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número igual o menor que 6 es A={1,2,3,4,5,6}.
✓ El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número superior a 6 es el suceso imposible ϕ .

- Suceso contrario u opuesto de A: Es el que se verifica para todos los resultados que no verifican A. Se simboliza por $\overline{A}$ ó por A^c.



Ejemplo:
El suceso contrario del suceso " Obtener un número par al lanzar un dado" es A^c ={1,3,5} ya que A={2,4,6}.

- Sucesos incompatibles o excluyentes: los sucesos A y B son incompatibles si su realización simultánea es imposible, es decir si no pueden ocurrir a la vez. En particular dos sucesos contrarios son incompatibles.

Dos sucesos son incompatibles si no tienen elementos en común.

- Sucesos Compatibles: Los sucesos A y B son compatibles si su realización simultánea es posible.
  - **Dos sucesos son compatibles si tienen elementos en común**. $A \cap B \neq \phi$

11.3.2.- Operaciones con Sucesos

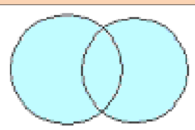
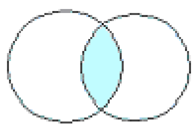
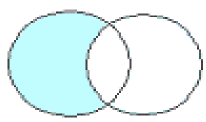
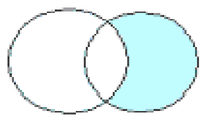
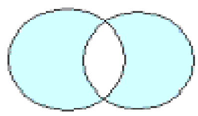
- Unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando uno al menos de los sucesos A y B se realiza. Se simboliza por $A \cup B$.

- Intersección de los sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando A y B se realizan de forma simultánea. Se simboliza por $A \cap B$.

Ejemplos:
 Si A es el suceso "Obtener un número par" al lanzar un dado, y B el suceso "Obtener un múltiplo de tres" A = {2,4,6}: B= {3,6} .
El suceso $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ El suceso $A \cap B = \{6\}$.

 Si A es el suceso "Obtener un número par" al lanzar un dado, B el suceso "Obtener un múltiplo de 3" y C el suceso "Obtener un múltiplo de 5". A={2,4,6}; B={3,6}; C={5}
$A \cap B = \{6\}$ $A \cap C = \phi$
Los sucesos A y B son compatibles, mientras que los sucesos A y C son incompatibles.

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituyen una partición de E si ninguno es el ϕ, son incompatibles dos a dos y $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E$

Resumen de Operaciones con Sucesos				
				
Unión	**Intersección**	**Diferencia**	**Diferencia**	**Diferencia Simétrica**
$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$	$A \cup B - A \cap B$

11.4.- Frecuencias

Si se realizan n pruebas de un experimento aleatorio y el suceso A se presenta N_A, veces, se dice que la ***frecuencia absoluta*** del suceso A en las n pruebas es N_A, y la ***frecuencia relativa*** que la simbolizaremos por $f_r(A)$, se calcula:

$$f_r(A) = \frac{N_A}{n}$$

***Ejemplo:* Se lanza un dado 10 veces, obteniendo los siguientes resultados 5, 2, 1, 1, 3, 2, 6, 4. 3, 1. Si el suceso A es "Obtener un número impar", calcula la frecuencia Absoluta y la relativa.**

Si A={5,1,1,3,3,1} la frecuencia absoluta de A es $N_A = 6$ mientras que la frecuencia relativa es: $f_r(A) = \frac{N_A}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

11.5.- Probabilidad

Una probabilidad *P* es una aplicación en el intervalo [0,1] que satisface las tres propiedades siguientes. Para todo suceso A:

$$P(A) \geq 0$$
$$P(E) = 1$$
Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ son suscesos de E incompatibles dos a dos:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$$

P(A) se leerá **probabilidad del suceso A**, o simplemente probabilidad de A.

La asignación de probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio suele hacerse considerando las frecuencias relativas de los sucesos elementales en un número elevado de pruebas.

***Ejemplo:* Se lanza 100 veces un dado trucado cuyas caras están numeradas con los números 1,2,3,4,5 y 6, obteniendo los siguientes resultados:**

	1	2	3	4	5	6
n_i	12	9	15	22	16	26

Asignando a cada suceso elemental una probabilidad igual a su frecuencia relativa, se tendrá:

$$P(1) = \frac{12}{100} \quad P(2) = \frac{9}{100} \quad P(3) = \frac{15}{100} \quad P(4) = \frac{22}{100} \quad P(5) = \frac{16}{100} \quad P(6) = \frac{26}{100}$$

La probabilidad del suceso A “obtener número impar” es:

$$P(A) = P(1,3,5) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{12}{100} + \frac{15}{100} + \frac{16}{100} = \frac{43}{100}$$

<u>De la definición de probabilidad se deduce las siguientes propiedades:</u>

- Las probabilidades de dos sucesos contrarios suman uno: $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- La probabilidad del suceso imposible es cero $P(\phi) = 0$
- Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- Para dos sucesos cualesquiera A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup \bar{B}) = P(\bar{B}) + P(A \cap B)$$
$$P(\text{alguno}) = 1 - p(\text{ninguno})$$

- Si los sucesos A_1, A_2.......,A_n constituyen una partición de E: $P(A_1)+P(A_2)+......+P(A_n)=1$

11.6.- Regla de Laplace

En una experiencia aleatoria en que todos los casos posibles son igualmente probables, la probabilidad de un suceso A es:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

¡¡¡ Atención !!! Para poder aplicar la regla de Laplace es imprescindible que todos los casos posibles sean igualmente probables. Esto, que suele suceder en los juegos de azar sencillos no es siempre cierto, ni mucho menos.

Ejemplo: En el caso del tratamiento médico, el espacio muestral, sólo consta de dos sucesos: E = {éxito, fracaso}

Al aplicar la regla de Laplace resultaría: $P(\textit{éxito})=P(\textit{fracaso})=\frac{1}{2}$, lo que manifiestamente es falso como acredita el 95% de éxito constatado

11.7.- Probabilidad Condicionada

Sean dos sucesos del mismo experimento aleatorio, tales que P(B)> O. Se llama ***probabilidad condicionada de A respecto de B*** a la probabilidad de que se realice A sabiendo que se ha realizado B y se simboliza por P(A/B).

Matemáticamente:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

El valor P(A/B) se refiere a un suceso ya realizado, por lo que a P(A/B) se le da el nombre de probabilidad de B a posteriori de A, en contraposición al valor de P(A) se da el nombre de probabilidad a priori de A, es decir, antes de hacer ninguna prueba y saber si se ha realizado o no.

De forma similar, ***probabilidad condicionada de B respecto de A***, es la probabilidad de que se realice A sabiendo que B ya ha ocurrido.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Si A y B son sucesos de probabilidad no nula, y despejamos de ambas la probabilidad de la intersección, obtenemos:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A) \qquad\qquad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$

que recibe el nombre de ***Teorema de la probabilidad Compuesta*** ó *Teorema de la intersección*.

Ejemplo: ***En un instituto, el 60% de los alumnos de COU estudian Matemáticas, y el 80% de los que estudian Matemáticas también estudian Física. Se elige al azar un estudiante de COU de dicho Instituto ¿Cuál es la probabilidad de que estudie matemáticas y Física?***

Sea M el suceso "Estudiar Matemáticas"; F el suceso "estudiar Física"; por el Teorema de la probabilidad compuesta:

$$P(M\cap F)=P(M)\cdot P(F/M)=\frac{60}{100}\cdot\frac{80}{100}=0{,}48$$

Por tanto, el 48% de los alumnos de COU de dicho Instituto estudian ambas asignaturas.

Si A y B son dos sucesos incompatibles, ocurre que: $P(A/B)=\frac{P(\phi)}{P(B)}=0$

11.8.- Sucesos Independientes

Dos sucesos A y B son ***independientes***, si el resultado de uno no influye en el resultado del otro. Matemáticamente dos sucesos son independientes:

$$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$$

De esta definición y del teorema de la probabilidad compuesta, resulta que los sucesos A y B son independientes si y sólo si:

$$P(A/B)=P(A) \qquad\qquad P(B/A)=P(B)$$

Ejemplo: ***Calcula la probabilidad de que, al extraer 3 cartas, con reemplazamiento, de una baraja española, sean todas copas.***

Como la carta extraída se vuelve a introducir, los sucesos son independientes y la probabilidad buscada es:

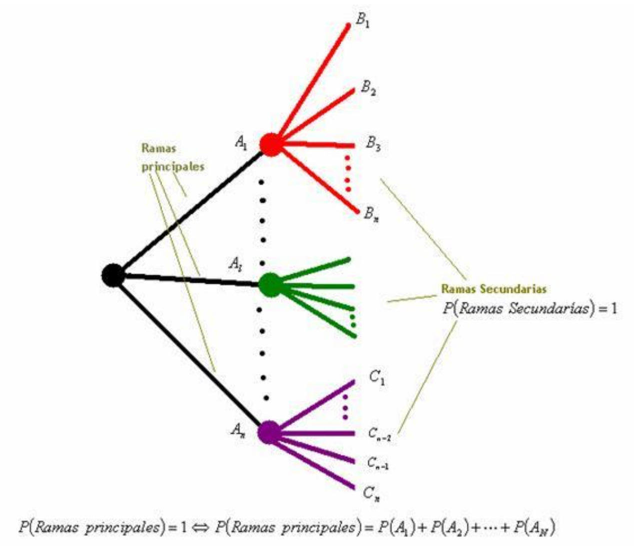
$$P(C_1\cap C_2\cap C_3)=P(C_1)\cdot P(C_2/C_1)\cdot P(C_3/C_1,C_2)=P(C_1)\cdot P(C_2)\cdot P(C_3)=\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}\cdot\frac{10}{40}$$

Donde C_i denota el suceso salir copas en la extracción número *i*.

11.9.- Experimentos Compuestos. Diagramas en árbol

Hay una serie de técnicas que ayudan a efectuar recuentos. La más práctica y sencilla es el diagrama en árbol, que permite representar de forma clara y ordenada el proceso que se sigue al ir contando los diferentes casos que pueden presentarse.

Para la construcción de tal diagrama se partirá poniendo una rama para cada una de las distintas posibilidades, acompañada de su probabilidad. El final de cada rama parcial, constituye a su vez un nudo, del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo presenta un posible final del experimento (nudo final).



Hay que tener en cuenta:

- En cada nudo, la suma de las probabilidades de todas las ramas que parten de él es igual a uno.
- La probabilidad de cada suceso se calcula multiplicando las probabilidades de cada rama.

Ejemplo: ***Un jugador lleva en su bolsillo dos monedas: una moneda con cara y cruz y otra con dos caras. Elige una de ellas ala azar y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que haya elegido la moneda normal?***

Si representamos las distintas posibilidades en un diagrama en árbol, tenemos:

Obtención de moneda → Moneda Normal → Cara: P(Normal∩Cara) = 0,5·0,5 = 0,25

Obtención de moneda → Moneda Normal → +: P(Normal∩+) = 0,5·0,5 = 0,25

Obtención de moneda → Moneda Trucada → Cara: P(Trucada∩Cara) = 0,5·1 = 0,5

$$\text{Así, } P(Normal/Cara)=\frac{P(Normal\cap Cara)}{P(Cara)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1}=\frac{1}{3}$$

11.10.- Tablas de Contingencia

Un método útil para clasificar los datos obtenidos en un recuento es mediante las tablas de contingencia.

Se trata de tablas en cuyas celdas figuran probabilidades, y en la cual podemos determinar unas probabilidades conociendo otras.

Ejemplo: ***Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casad@s y 45 son mujeres casadas. Se pide:***

a) ***¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?***
b) ***Si del afortunado se sabe que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?***

Escribimos los datos del problema y obtenemos la tabla de la izquierda, y la completamos calculando los otros (tabla de la derecha):

	Hombres	**Mujeres**	Total
Casad@s		45	80
Solter@s			
Total		65	120

	Hombres	**Mujeres**	Total
Casad@s	**35**	45	80
Solter@s	**20**	**20**	**40**
Total	**55**	65	120

Una vez completada, ya podemos calcular las probabilidades pedidas:

a) Probabilidad de hombre y soltero: $P(Hombre \cap Soltero) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

b) Probabilidad de mujer sabiendo que está casada: $P\left(Mujer/Casada\right) = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$

11.11.- Combinatoria

Se llama factorial de un número natural *x*, y se representa por $x!$ al producto de *x* factores consecutivos y decrecientes desde x hasta 1.

$$x! = x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot(x-n)\cdot\ldots\ldots\cdot 1$$

Ejemplos: 0! =1 por convenio, 1! = 1; 2! = 2·1 = 2; 3! = 3·2·1= 6; 4! = 4·3·2·1 = 24; 5!=5·4!=120

11.11.1.- Variaciones ordinarias

Variaciones de n elementos tomados de m en m (m<n) son todos los grupos que se pueden formar con estas características:

- Un mismo elemento no puede aparecer repetido.
- Si los elementos se cambian de orden resulta un grupo distinto.
- Si se sustituye un elemento por otro resulta un grupo distinto.

El número de variaciones sin repetición se calcula mediante la expresión:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ejemplo: ***¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar con las cinco letras vocales (tengan o no sentido)?.***

Aquí n=5 y m=3, por tanto: $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$

11.11.2.- Variaciones con repetición

Variaciones con repetición de n elementos, tornados de m en m, son todos los grupos que se pueden formar con estas características:

- Un mismo elemento puede aparecer repetido (Reposición).
- Si los elementos se cambian de orden resulta un grupo distinto.
- Si se sustituye un elemento por otro resulta un grupo distinto.

Su número se calcula mediante:

$$RV_n^m = n^m$$

donde la R indica repetición.

Ejemplo: ***Si en el ejemplo anterior pudieran repetirse las letras ¿Cuantas palabras se podrían formar?***

Aquí n=5 y m=3, por tanto: $RV_5^3 = 5^3 = 125$

11.11.3.- Permutaciones

A las Variaciones de n elementos tomados de n en n (n = m) se las llama ***permutaciones de n elementos*** y su número se calcula mediante la expresión:

$$P_n = n!.$$

Ejemplo: **¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse con las 5 letras vocales?** $P_5 = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

11.11.4.- Permutaciones con Repetición

Posibles ordenaciones de una secuencia de *n* signos entre los que hay algunos repetidos (uno se repite α veces, otro β veces, otro γ veces... etc.).

Su calculan mediante:

$$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\cdot\beta!\cdot\gamma!\cdot\ldots\ldots}$$

Ejemplo: **¿Cuántos números distintos de 6 cifras se pueden escribir usando tres unos, dos cincos y un ocho?**

Como tenemos 6 números y uno se repite dos veces y otro tres: $P_6^{3,2,1} = P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\cdot2!} = \frac{720}{12} = 60$

11.11.5.- Combinaciones

Combinaciones de n elementos, tomados de m en m $(m \le n)$, son todos los grupos que se pueden formar con estas características:

- Un mismo elemento no puede aparecer repetido.
- Si los elementos se cambian de orden resulta el mismo grupo.
- Si se sustituye un elemento por otro resulta un grupo distinto.

Su número se calcula mediante:

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo: ***Si en una clase de 40 alumnos queremos formar grupos de 5 sin que importe el orden en que se elige a los componentes. ¿Cuántos grupos saldrían?***

$$C_{40}^{5}=\frac{40!}{5!\cdot 35!}=\frac{40\cdot 49\cdot 38\cdot 37\cdot 36}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=658008$$

11.11.6.- Combinaciones con repetición

Combinaciones de n elementos, tomados de m en m $(m \le n)$, son todos los grupos de elementos que se pueden formar con estas características:

- Un mismo elemento ***si*** puede aparecer repetido.
- Si los elementos se cambian de orden resulta el mismo grupo.
- Si se sustituye un elemento por otro resulta un grupo distinto.

Su número se calcula mediante la expresión:

$$CR_n^m=C_{n+m-1}^m=\binom{n+m-1}{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$$

Ejemplo: ***Un banco ofrece un regalo a elegir entre 5 posibles regalos por cada cartilla. Un señor que tiene tres cartillas en dicho banco ¿de cuántas formas puede elegir el lote de tres obsequios si no le importa repetir regalos?***

$$CR_5^3=C_7^3=\binom{5+3-1}{3}=\binom{7}{3}\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{4!}}=35$$

11.12.- Experimentos Dicotómicos. Distribución Binomial

11.12.1.- Experiencia dicotómica

Si en una experiencia aleatoria destacamos un suceso A y prestamos atención, exclusivamente, a si ocurre A o su contrario, A', se trata de una experiencia dicotómica. Al suceso A se le denomina éxito y a su probabilidad:

P(A)=p La probabilidad de su contrario es P(A')=1-p=q

Son ejemplo de estas experiencias, lanzar una moneda, lanzar una chincheta, lanzar un dado y ver si sale 5, etc.

11.12.2.- Distribución Binomial

Si se repite n veces una misma experiencia dicotómica, y nos preguntamos por el número, k, de éxitos, observamos que la variable es discreta, pues puede tomar los valores 0,1,2,……,n.

La distribución de probabilidad de la variable k se llama distribución binomial B(n,p), donde n es el número de veces que se repite la experiencia y p=P[A] es la probabilidad de éxito en cada una de las experiencias.

$$B(n,p)$$

Ejemplos:

- Si lanzamos un dado 6 veces y nos preguntamos por el número de cincos, se trata de una distribución binomial con n=6 y p=1/6.
  Por tanto $B\left(6,\frac{1}{6}\right)$
- Si dejamos caer al suelo 100 chinchetas y contamos cuantas caen con la pinta hacia arriba, 35, se trata de una binomial ***B(100,0,35)***

11.12.3.- Cálculo de probabilidades en una distribución binomial

Sea un experimento aleatorio en el que se verifican estas hipótesis:

- El resultado de cada prueba pertenece a uno de estos dos sucesos, A ó $\bar{A}$.
- La probabilidad del suceso A es la misma en cada prueba.
- Los resultados de cada prueba son independientes entre si.

Si p es la probabilidad del suceso A en cada sola prueba y q=1-p es la probabilidad del suceso $\bar{A}$ en una sola prueba, la probabilidad de que el suceso A se presente exactamente x veces en n pruebas (y no se presente en las n-x pruebas restantes) es:

$$P(x)=\binom{n}{x}p^x \cdot q^{n-x}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

Ejemplo ***: Explica cuál es la fórmula de la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras.***

La Fórmula de Bernoulli: B(3,x)

Supongamos ahora que se han lanzado tres monedas bien construidas Se pide:

a) Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 1 cara: $P(x=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras? $P(x=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3!}{3!\cdot 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 caras?

$$P(x\le 2)=P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

- lo que es lo mismo: $P(\overline{3\ caras})=1-P(x=3)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

d) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras sea 1?

$$P(impar)=P(x=1)+P(x=3)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(1Cara/impar)=\frac{P(1cara\cap impar)}{P(impar)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

11.13.- Ejercicios Resueltos

1.- *Si A y B son dos sucesos tales que P(A)=0,6 y P(B)=0,7, calcular $P(A\cup B)$ y $P(A\cap B)$, si sabemos que:* $P(A\cup B)\cdot P(A\cap B)=0,4$.

Tenemos que como $A\cap B\neq\phi$, los sucesos son compatibles, por tanto:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Y como

$$P(A\cup B)\cdot P(A\cap B)=0,4$$

Entonces:

$$P(A\cup B)=1,3-\frac{0,4}{P(A\cup B)} \rightarrow (P(A\cup B))^2-1,3P(A\cup B)+0,4=0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos: $P(A\cup B)=\begin{cases}0,5\\0,8\end{cases}$

Y si sustituimos en $P(A\cup B)\cdot P(A\cap B)=0,4$ obtenemos: $P(A\cap B)=\begin{cases}0,5\\0,8\end{cases}$

Como $P(A\cup B)>P(A\cap B)$ Tenemos que: $\boxed{P(A\cup B)=0,8 \quad P(A\cap B)=0,5}$

2.- *Explica qué significa que dos sucesos A y B sean independientes. Se lanza un dado al aire y se consideran los sucesos A "Obtener múltiplo de 3", B "Obtener número par". Justificar si los sucesos A y B son o no son independientes.*

Dos sucesos son independientes si el resultado de uno no influye en el otro.

El espacio muestral es: E={1,2,3,4,5,6}, el suceso A={3,6} y el suceso B={2,4,6}

El suceso $A \cap B = \{6\}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

El suceso $A \cup B = \{2,3,4,6\}$ $\qquad P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Por tanto $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$ ➔ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Así que los sucesos son independientes porque dos sucesos son independientes si ocurre que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3.- Dos sucesos A y B verifican $P(A \cap B) = 0,3$, $P(\bar{A}) = 0,4$, $P(\bar{B}) = 0,5$. Hallar $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

Tenemos que $P(A \cap B) = 0,3$ y que $P(\bar{A}) = 0,4$, por tanto $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$ y $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,5 = 0,5$
Como son procesos dependientes: $P(A \cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$

$$P(A \cup B) = 0,8 \qquad \text{y} \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

4.- En una ciudad hay 55% de mujeres y 45 % de hombres. El 60% de las mujeres y el 40% de los hombres padecen dolores de cabeza.
¿Cuál es la probabilidad de que una persona de esa ciudad sufra dolores de cabeza?.

Representamos en una tabla:

	Hombres	Mujeres	Total
Dolor de Cabeza	18	33	51
Sin dolor de Cabeza	27	22	49
	45	55	100

La probabilidad de que una persona de la cuidad sufra dolor de cabeza es: $P_{Dolor} = \frac{51}{100} = 0,51$

También lo podemos calcular como:

$$P_{Dolor} = P(Mujer \cap Dolor) + P(Hombre \cap Dolor) = \frac{55}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{45}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{51}{100} = 0,51$$

5.- Sacamos al azar, tres cartas de una baraja española de 40 naipes. Calcular:
a) La probabilidad de que las tres cartas sean copas.
b) La probabilidad de que dos de las tres cartas sean ases y una rey.

a) En una baraja española hay 10 cartas de copas.

La Probabilidad de que la primera sea copas es $\frac{10}{40}$, la probabilidad de que la segunda sea copas es: $\frac{9}{39}$, y la probabilidad de que la tercera también lo sea es: $\frac{8}{38}$

Si sacamos tres cartas la probabilidad de que las tres sean copas: $P_{Copas} = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = 0,012$

b) En la baraja española hay 4 reyes y 3 ases.

Podemos obtener el suceso A={(R,A,A), (A,R,A), (A,A,R)}

Entonces la probabilidad de obtener 2 Ases y 1 Rey es:

$$P(A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{3}{38} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{3}{38} + \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{3 \cdot 48}{40 \cdot 39 \cdot 38} = 0,0024$$

6.- Las tres bolas blancas y las cuatro bolas negras de una urna tienen la misma probabilidad de ser extraídas. Se sacan tres bolas sucesivas y con reemplazamiento.

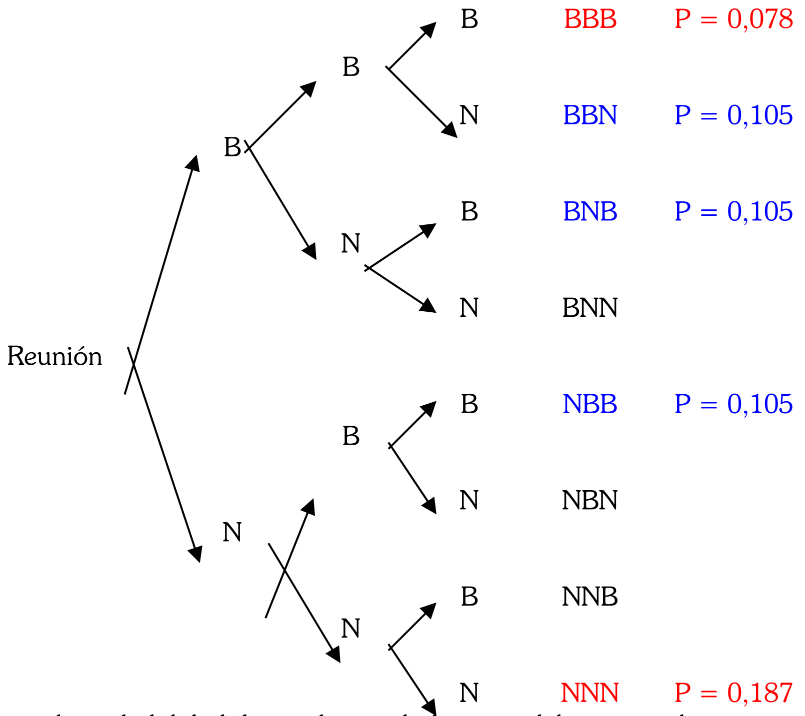
a) Hallar la probabilidad de que sean las tres del mismo color.

b) La probabilidad de que aparezcan dos blancas y una negra.

a) Tenemos 7 bolas en una urna en la que extraemos las bolas con reemplazamiento.

Vamos a hacer un esquema en árbol:

Sabemos que la probabilidad de que sea blanca es 3/7 y la de que sea negra es 4/7.



Por tanto, la probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color es:

$$P(XXX) = P(BBB) + P(NNN) = 0,078 + 0,187 = 0,265$$

Y la probabilidad de que sean 2 blancas y una negra es:

$$P(2B, N) = P(BBN) + P(BNB) + P(NBB) = 3 \cdot 0,105 = 0,315$$

7.- En una reunión se encuentran 4 matrimonios. Se eligen al azar cuatro personas. Calcular las siguientes probabilidades dando el resultado en forma de fracción irreducible.

a) Las cuatro personas son mujeres.

b) Dos hombres y dos mujeres.

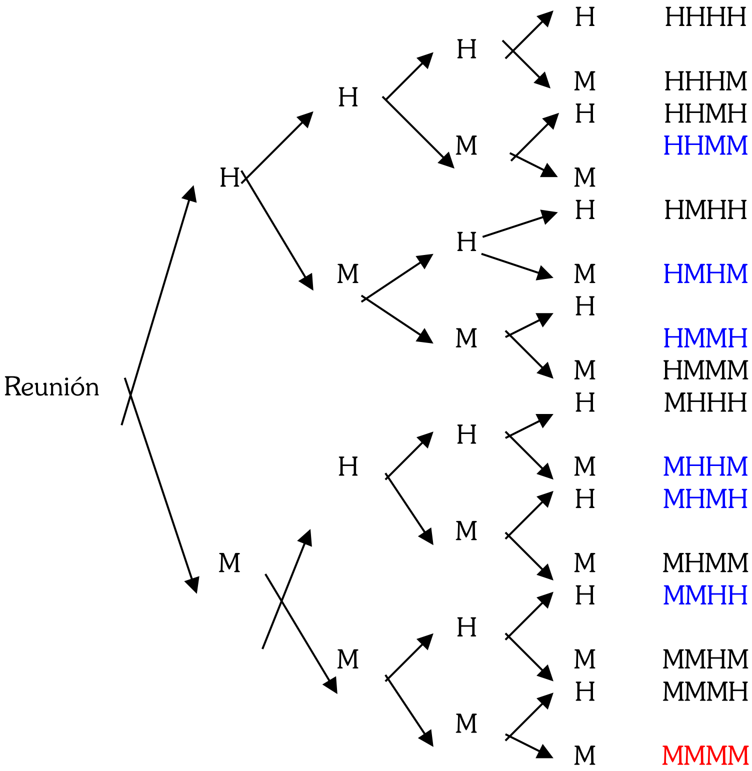
A) Tenemos 4 hombres y 4 mujeres: Si hacemos una árbol:

La Probabilidad de que las 4 sean mujeres es:

$$P(MMMM) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{24}{1680} = 0,0143$$

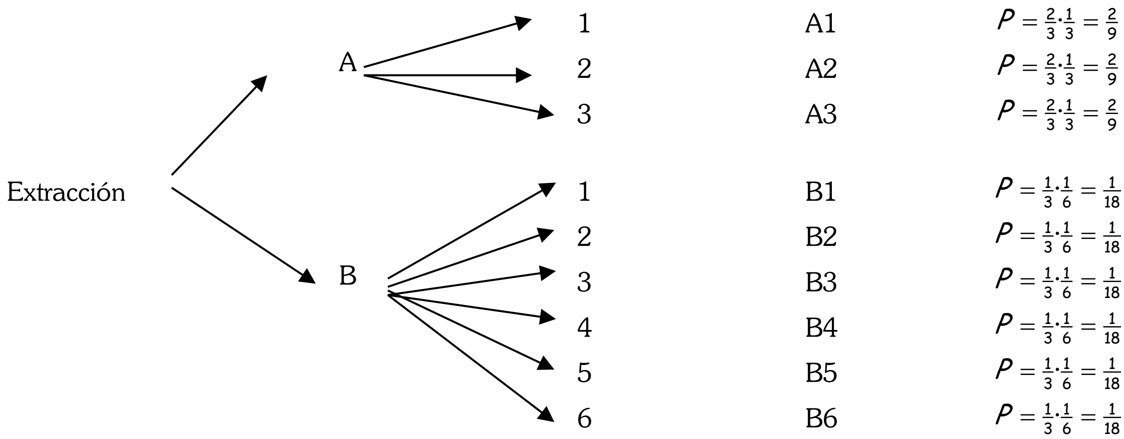
b) La probabilidad de que sean 2 hombres y dos mujeres es:

$$P(XXYY) = P(HHMM) + P(HMMH) + P(HMHM) + P(MMHH) + P(MHHM) + P(MHMH) =$$
$$= 6 \frac{4}{8} \frac{3}{7} \frac{4}{6} \frac{3}{5} = \frac{864}{1680} = 0,51$$



8.- Una urna A contiene 3 bolas numeradas del 1 al 3, y otra B contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. La urna A tiene el doble de probabilidad de ser elegida que la urna B. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.
a) Cual es la probabilidad de que sea una bola con el número 1.
b) Si extraída la bola con el número uno, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?.

a) La probabilidad de que la bola sea una bola con el número 1 es:



$$P(1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{18}=\frac{5}{18}=0{,}28$$

B) $$P(A/1)=\frac{P(1\cap A)}{P(1)}=\frac{\frac{10}{54}}{\frac{5}{18}}=0.83$$

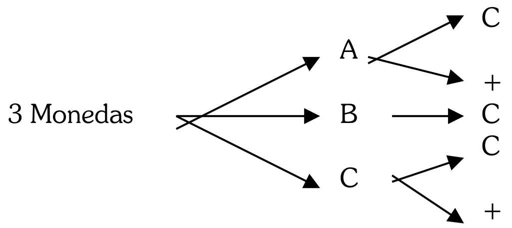
9.- En una caja hay seis bolas rojas y cuatro blancas. Se extraen a la vez dos bolas al azar.
a) Describe el espacio muestral.
b) Obtener la probabilidad de cada suceso elemental.

a) Si extraemos a la vez dos bolas, o son blancas, o son rojas o una blanca y una roja, por tanto: E={BB, RR, RB}.

b) En la urna hay 10 bolas.

$$P(BB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=0{,}133 \qquad P(RR)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=0{,}33 \qquad P(Roja-Blanca)=P(RB)+P(BR)=2\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=0{,}52$$

10.- Una caja contiene 3 monedas. Una es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire. Hallar la probabilidad de que salga cara.



P = 1/3·1/2

P=1/3·1

P=1/3·1/3

$$P(Cara)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{18}=0{,}61$$

11.- En una urna hay 5 bolas rojas, 3 bolas negras y dos bolas blancas. Al azar se extrae una bola y sin devolverla se extrae otra.
a) Calcular la probabilidad de que ambas sean del mismo color.
b) Calcular la probabilidad de que ambas sean de distinto color.

$$P(XX)=P(RR)+P(BB)+P(NN)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}=0{,}311$$

La probabilidad de que sean de distinto color es el caso contrario a que sean del mismo color:

$$P(XY)=1-P(XX)=1-0{,}311=0{,}688$$

12.- Una urna contiene 15 bolas blancas y 10 negras. Se realiza la extracción simultánea de dos bolas de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean negras? ¿Cuál es la probabilidad de que tengan el mismo color?

P(NN) = 0,15

P(XX) = P(BB) + P(NN) = 0,35 + 0,15 = 0,50

13.- Escogidas 5 personas al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en el mismo día de la semana?

P[Ninguna coincidencia] = 1·P[2ª en dist. dia que la 1ª]·………·P[5ª dist. Día de la 1ª,2ª,3ª y 4ª]=

$$=1\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{360}{2401}=0{,}15$$

Por tanto P[Alguna coincidencia] = 1- P[Ninguna coincidencia] = 1 - 0,15 = 0,85

14.- Hallar la probabilidad de un suceso, sabiendo que el cuadrado de esta probabilidad menos el cuadrado de la del suceso contrario es 0,3.

$$\begin{aligned}
&P(A)^2 - P(\bar{A})^2 = 0{,}3\\
&P(A)^2 - \left(1 - P(A)\right)^2 = 0{,}3\\
&P(A)^2 - 1 - P(A)^2 + 2P(A) = 0{,}3\\
&2P(A) = 1{,}3\\
&P(A) = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65
\end{aligned}$$

15.- En la urna A hay 2 bolas blancas y 3 negras, y en la urna B hay 3 bolas blancas y a negras. Una persona elige una urna y extrae una bola. Calcular el valor de a para que la probabilidad de que la bola extraída sea blanca sea 0,5.

$$\begin{aligned}
&P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3+1} = \frac{1}{2}\\
&\frac{2}{5} + \frac{3}{3+a} = 1\\
&a = 2
\end{aligned}$$

En la urna B hay 2 bolas blancas.

16.- En una caja hay cien bolas, numeradas del 1 al 100. Se extrae una bola. Calcular la probabilidad de que el número de la bola extraída sea:

a) múltiplo de tres.
b) múltiplo de cinco.
c) múltiplo de tres, sabiendo que es múltiplo de cinco.

a) Sea A el suceso multiplo de 3, A={3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48,51,54,57, 60,63,66,69,72,75,78,81,84,87,90,93,96,99}

$$P(A) = \frac{33}{100} = 0{,}33$$

b) Sea B el suceso multiplo de 5 B={5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90, 95,100}

$$P(A) = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

C) Calculamos $A \cap B = \{15,30,45,60,75,90\}$ ➔ $P(A \cap B) = 0{,}06$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}06}{0{,}25} = 0{,}24$$

17.- Se lanza un dado dos veces. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Que la suma de las caras sea 3.
b) Que la suma sea menor o igual que 9.

a) Para que la suma sea tres, tenemos que obtener 1 en la primera tirada y 2 en la segunda, ó 2 en la primera tirada y 1 en la segunda.

$$P(Suma = 3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

b) Para que la suma sea menor o igual que 9:

Tenemos 30 casos en los que la suma de los dos dados es menor o igual que 9, como la probabilidad de cada caso es 1/36.

$$P(Suma \le 9) = 30\cdot\frac{1}{36} = \frac{30}{36} = 0{,}83$$