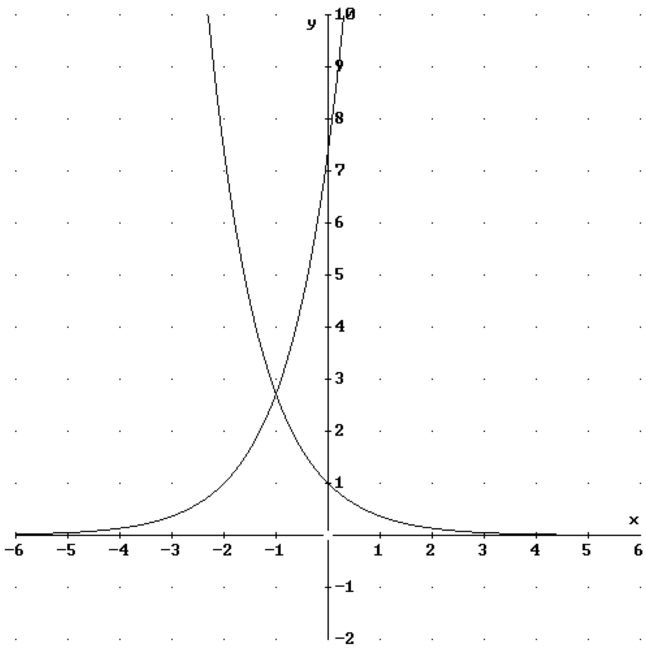
a) Dibuja el recinto limitado por las curvas: $y = e^{x+2}$; $y = e^{-x}$; $x = 0$
b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

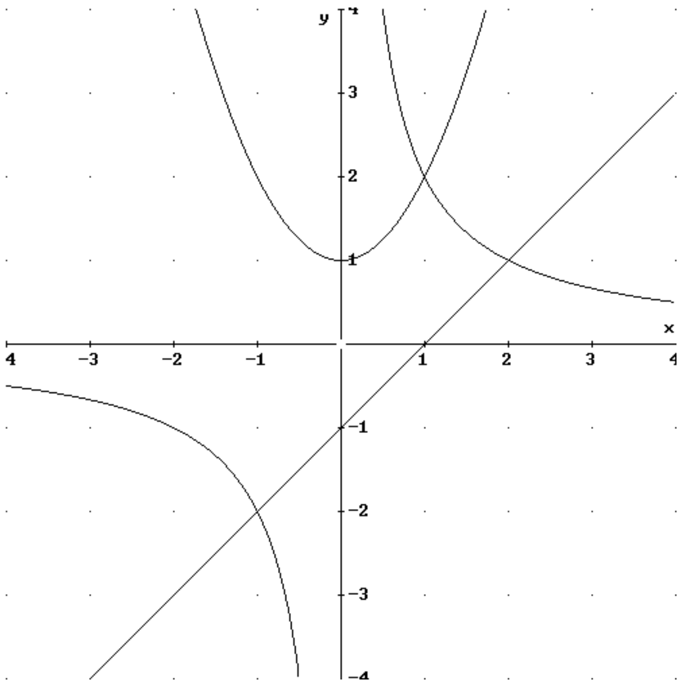
$$A = \int_{-1}^{0} (e^{x+2} - e^{-x})\, dx = \left[e^{x+2} + e^{-x} \right]_{-1}^{0} = e^2 - 2e + 1 \ u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas:

$$y = x^2 + 1 \;;\; y = \frac{2}{x} \;;\; y = x - 1$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



$$Área = \int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 \left[\frac{2}{x} - x + 1\right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + \left[2\ln x - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} + 1 + 2\ln 2 - 2 + 2 - 2\ln 1 + \frac{1}{2} - 1\right] = \frac{5}{6} + 2\ln 2 \; u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y=\dfrac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x=1$ y el eje de abscisas.
b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

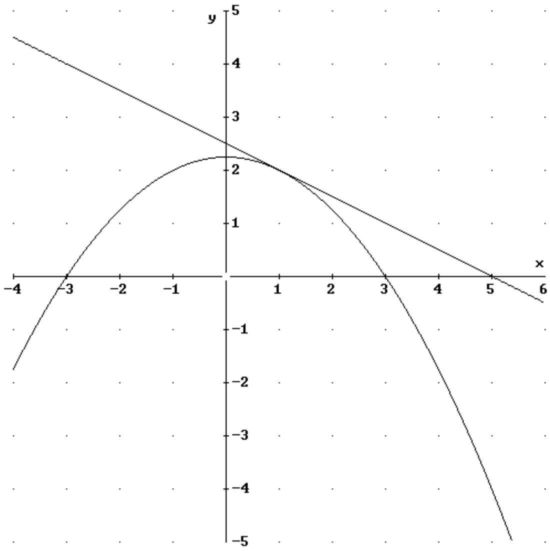
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=1$.

- $x=1 \Rightarrow y=\dfrac{9-1}{4}=2$

- $y'=\dfrac{-2x}{4}=-\dfrac{x}{2} \Rightarrow m=y'(x=1)=-\dfrac{1}{2}$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=\dfrac{-x+5}{2}$.



b)

$$Área=\int_1^5 \frac{-x+5}{2}\,dx-\int_1^3 \frac{9-x^2}{4}\,dx=\left[-\frac{x^2}{4}+\frac{5x}{2}\right]_1^5-\left[\frac{9x}{4}-\frac{x^3}{12}\right]_1^3=$$

$$=\left[-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\right]-\left[\frac{27}{4}-\frac{27}{12}-\frac{9}{4}+\frac{1}{12}\right]=\frac{5}{3}\,u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2+x-x^2$. Calcula α, $\alpha<2$, de forma que:
$$\int_{\alpha}^{2} f(x)dx=\frac{9}{2}$$
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el área encerrada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=1$.

$$\int_{\alpha}^{2}(2+x-x^2)\,dx=\left[2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{2}=4+2-\frac{8}{3}-2\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}=\frac{9}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{7}{2}\ ;\ \alpha=-1$$

Como $\alpha<2$, el valor pedido es $\alpha=-1$.

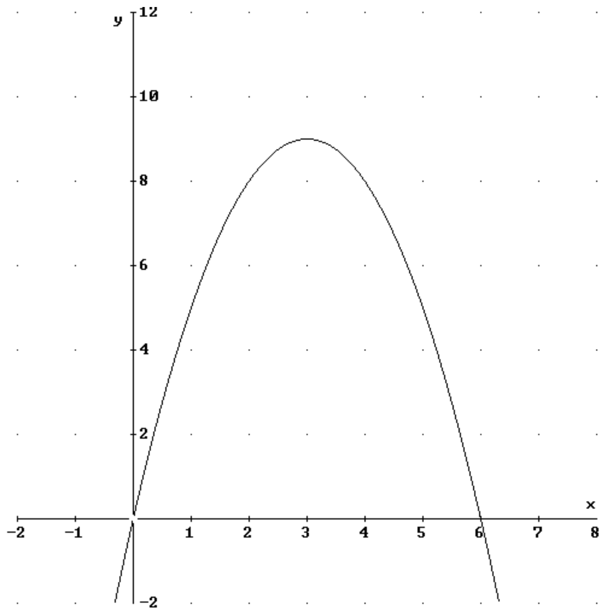
Calcule el valor de α positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Represente la curva que se obtiene para dicho valor de α.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\alpha x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \alpha$$

$$\int_0^\alpha (\alpha x - x^2)\, dx = \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{6} = 36 \Rightarrow \alpha = 6$$



Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{3} (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx$, que es una integral por partes.

$u = x^2+5;\ du = 2x\ dx$
$dv = e^{-x}\ dx;\ v = -e^{-x}$

$u = x;\ du = dx$
$dv = e^{-x}\ dx;\ v = -e^{-x}$

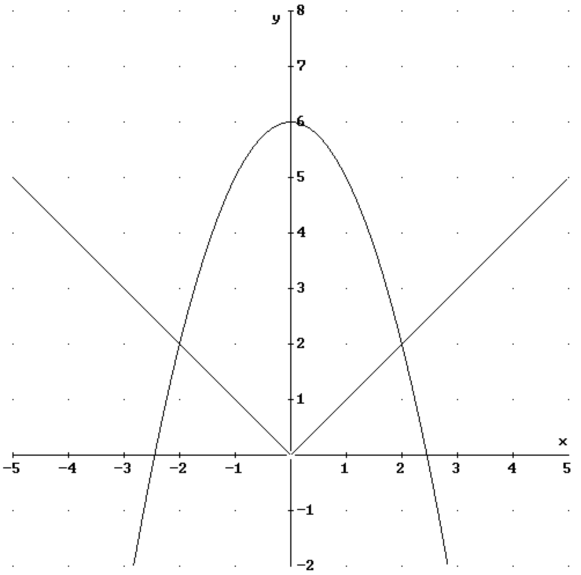
$$I = \int (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx = -(x^2+5)\cdot e^{-x} + 2\int x\cdot e^{-x}\ dx = -(x^2+5)\cdot e^{-x} + 2\left[-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx\right] = -e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)$$

$$\int_{-1}^{3} (x^2+5)\cdot e^{-x}\ dx = \left[-e^{-x}\left(x^2+2x+7\right)\right]_{-1}^{3} = \frac{6e^4-22}{e^3}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

- $A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\,dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3}\ u^2$

Sea $F:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por: $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\ dt$

a) Determina $F(1)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $F(x)=x^2+\dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow F(1)=\dfrac{5}{3}$

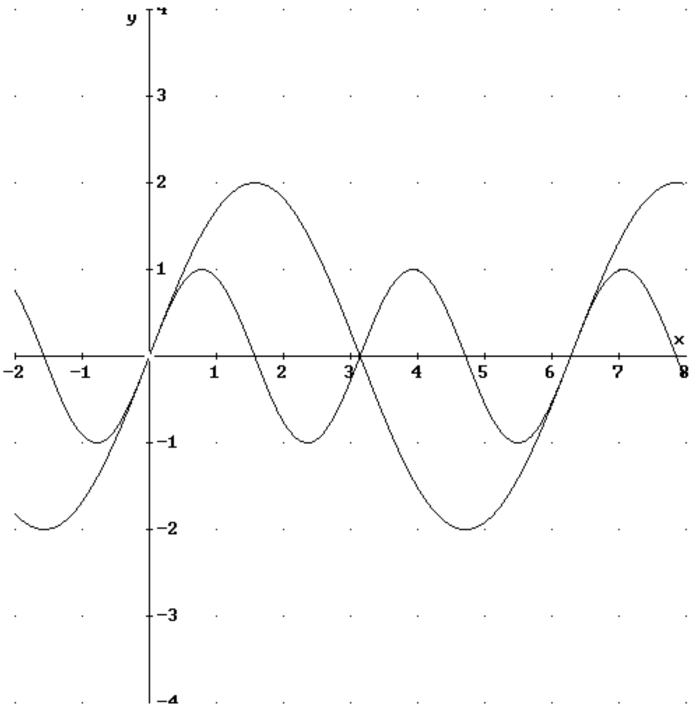
b)

$$\left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ F(x_0)=\dfrac{5}{3} \\ F'(x_0)=2x+\sqrt{x}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-F(x_0)=F'(x_0)\cdot(x-x_0) \Rightarrow y-\frac{5}{3}=3\cdot(x-1) \Rightarrow y=\frac{9x-4}{3}$$

Considera las funciones $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2\,sen\,x$ y $g(x) = sen\,2x$
a) Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de *f* y de *g*.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$A = \int_0^{\pi} (2sen\,x - sen\,2x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (sen\,2x - 2senx)dx = 4 + 4 = 8\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1+x)\cdot e^{x}$

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I=\int (1+x)\cdot e^{x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1+x;\ du=dx \\ dv=e^{x}\,dx;\ v=e^{x} \end{array}}$$

$$I=\int (1+x)\cdot e^{x}\,dx=(1+x)\cdot e^{x}-\int e^{x}\,dx=(1+x)\cdot e^{x}-e^{x}=x\cdot e^{x}+C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,3)$.

$$3=0+C\Rightarrow C=3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I=x\cdot e^{x}+3$

Calcula la siguiente integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$. ¿Qué representa geométricamente?

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+4x+3=0 \Rightarrow x=-1$; $x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=-1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx=\int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx+\int \frac{-\frac{1}{2}}{x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+3)+C$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln(x+3)\right]_0^2=\frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{2}$$

Siendo ln x el logaritmo neperiano de x, considera la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\cdot\ln x$. Calcula:

a) $\int f(x)dx$.

b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot lnx\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\frac{x^2}{2}\end{array}}$$

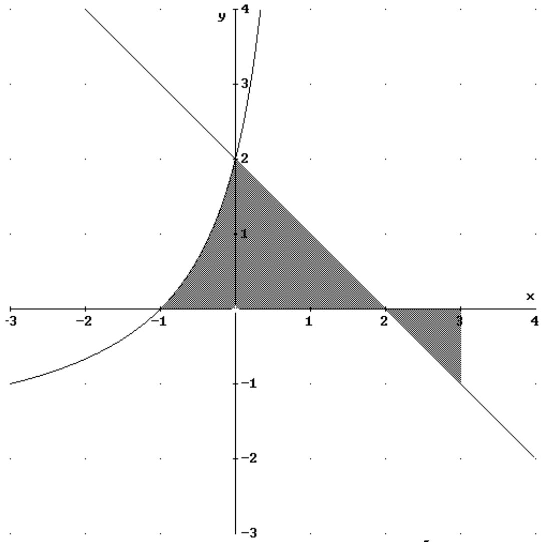
$$I=\int x\cdot ln\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto (1,0).

$$0=\frac{1^2}{2}\cdot ln1-\frac{1}{4}1^2+C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I=\frac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}$

Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x+2}{1-x}$



MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{1-x}\, dx = \int_{-1}^{0} \left(-2 + \frac{4}{1-x}\right) dx = \left[-2x - 4\ln(1-x)\right]_{-1}^{0} = 4\ln 2 - 2$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (-x+2)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{2} = 2$$

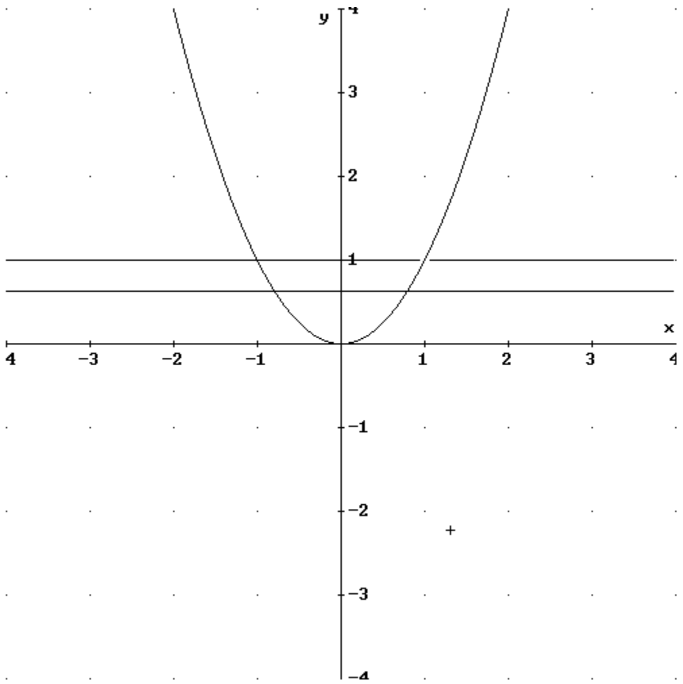
$$A_3 = \int_{2}^{3} 0 - (-x+2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3} = \frac{1}{2}$$

El área pedida es:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4\ln 2 - 2 + 2 + \frac{1}{2} = 4\ln 2 + \frac{1}{2}$$

Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Hallar el valor de *a*.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

$$Área = 2\cdot\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\cdot\left[1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4}{3}\ u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$.

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

$$\frac{2}{3} = 2\cdot\int_0^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx = 2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 2\cdot\left[a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right] = \frac{4}{3}a\sqrt{a} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **la función definida por:** $f(x)=\begin{cases} 5x+10 & si\ \ x\le -1 \\ x^2-2x+2 & si\ \ x>-1 \end{cases}$

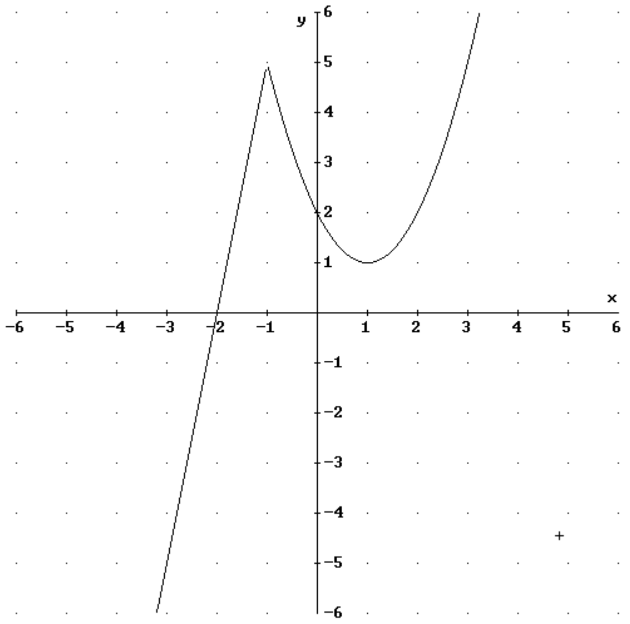
a) Esboza la gráfica de *f*.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x=3$**.**

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$Área=\int_{-2}^{-1}(5x+10)\,dx+\int_{-1}^{3}(x^2-2x+2)\,dx=\left[\frac{5x^2}{2}+10x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{-1}^{3}=\frac{5}{2}+\frac{28}{3}=\frac{71}{6}\ u^2$$

Considera la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} a(x-1) & si\ \ -1<x\le 1 \\ x\ln x & si\ \ \ \ x>1\end{cases}$

a) Determina el valor de *a* sabiendo que *f* es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 1 OPCIÓN B.

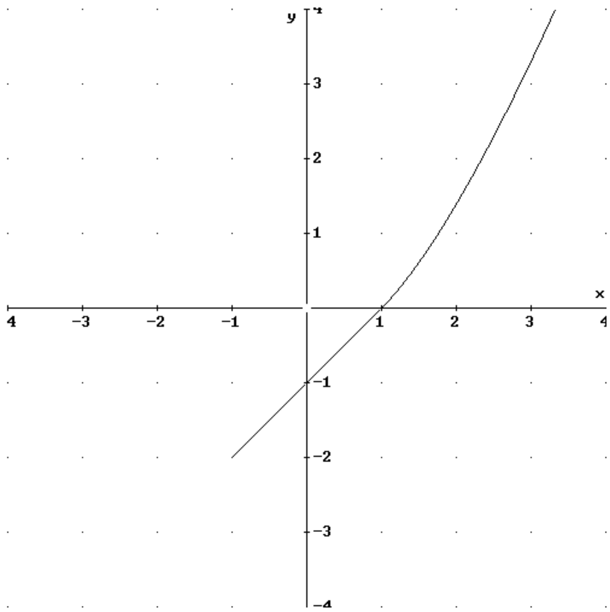
R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} a\cdot(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x\cdot\ln x=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 1^-}=\lim\limits_{x\to 1^+}=0\Rightarrow \text{Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} a & si\ \ -1<x\le 1 \\ \ln x+1 & si\ \ \ \ x>1\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=a \\ f'(1^+)=1\end{array}\right\}\Rightarrow a=1$$



b)

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1)\,dx+\int_1^2 x\cdot\ln x\,dx=\left[\frac{x}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\frac{1}{2}-1+2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por : $f(x)=\left|x^2-1\right|$

a) Esboza la gráfica de *f*.

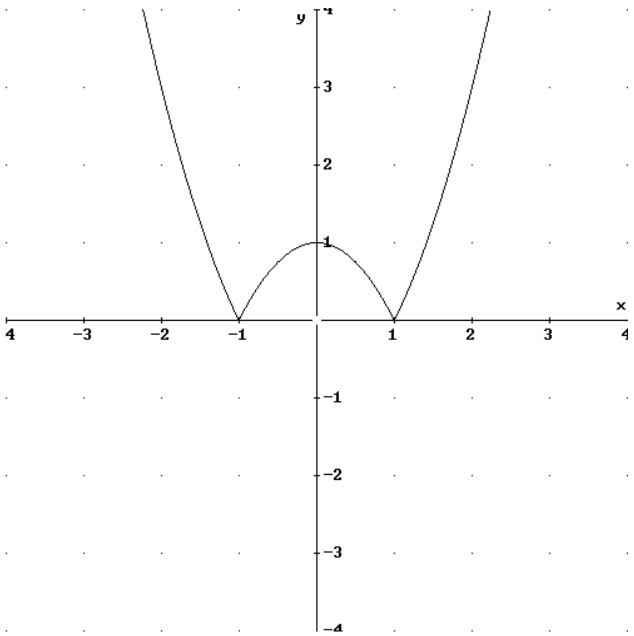
b) Estudia la derivabilidad de *f*.

c) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Abrimos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+1 & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & si \quad x>1 \end{cases}$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=-2 \\ f'(-1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)\ne f'(-1^+) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-2 \\ f'(1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+)$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

c)

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(-x^2+1)\,dx+\int_1^2(x^2-1)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1=2$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=-2x^3-9x^2-12x$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
b) Determina los extremos relativos α y β de f con $\alpha<\beta$ y calcula $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=-6x^2-18x-12=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo y'	–	+	–
Función	D	C	D

Máximo en $(-1,5)$; mínimo en $(-2,4)$

b)

$$\int_{-2}^{-1}(-2x^3-9x^2-12x)\,dx=\left[-\frac{2x^4}{4}-\frac{9x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}+3-6+8-24+24=\frac{9}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & si \quad x<0\\ 1-mx-x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Determina *m* sabiendo que *f* es derivable.

b) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}1-mx-x^2=1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0^-}=\lim\limits_{x\to 0^+}=1\Rightarrow \text{ Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & si \quad x<0\\ -m-2x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=1\\ f'(0^+)=-m\end{array}\right\}\Rightarrow m=-1$$

b)

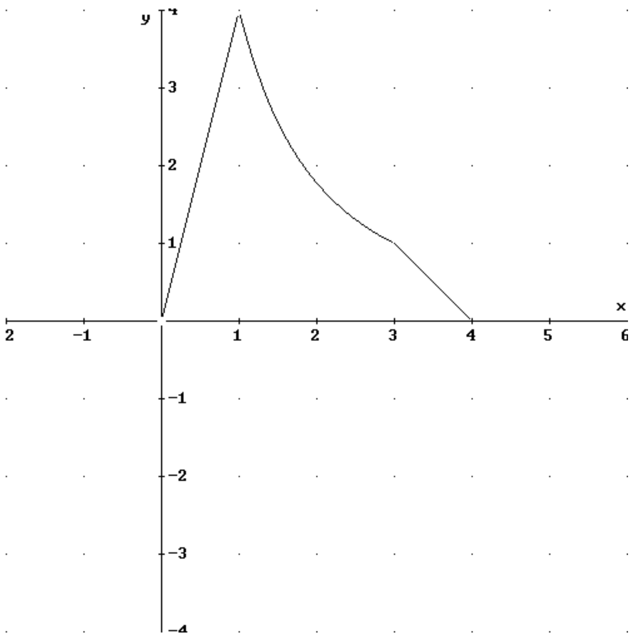
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}\,dx+\int_{0}^{1}(1+x-x^2)\,dx=\left[-\ln(1-x)\right]_{-1}^{0}+\left[x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\ln 2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\ln 2+\frac{7}{6}$$

Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} 4x & si\ \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & si\ \ 1<x<3 \\ 4-x & si\ \ 3\le x\le 4 \end{cases}$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

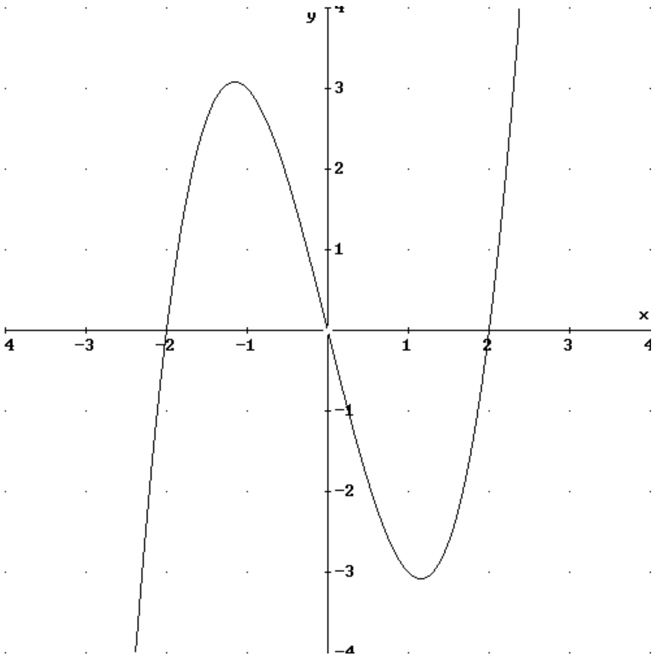


b)

$$Área=\int_0^1 4x\,dx+\int_1^3\frac{16}{(x+1)^2}\,dx+\int_3^4(4-x)\,dx=\left[2x^2\right]_0^1+\left[-\frac{16}{(x+1)}\right]_1^3+\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4=2+4+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}\ u^2$$

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas $y = 0$

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = 2 \; ; \; x = -2$$

Por lo tanto, el área pedida será:

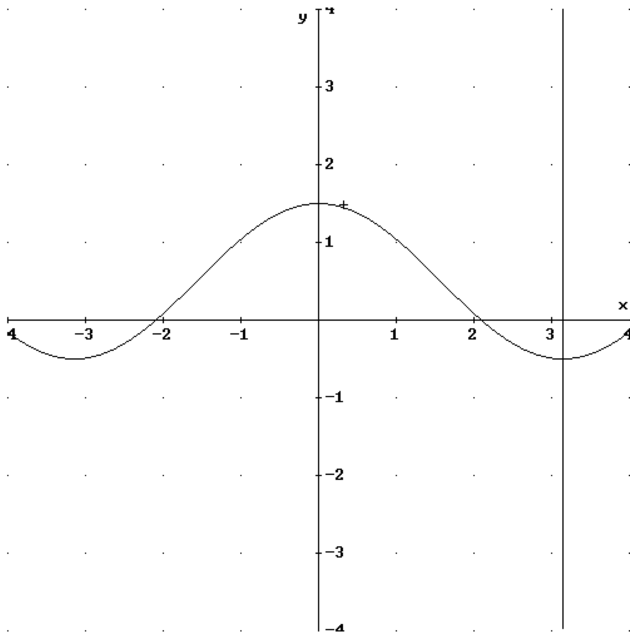
$$A = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(-x^3 + 4x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(-4 + 8\right) + \left(-4 + 8\right) = 8 \; u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y=\frac{1}{2}+\cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x=\pi$.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y=\frac{1}{2}+\cos x$ y el eje de abscisas $y=0$

$$\frac{1}{2}+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$A=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}-\cos x\right)dx=\left[\frac{x}{2}+sen\,x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}+\left[-\frac{x}{2}-sen\,x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}-0+\frac{2\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\ u^2$$

Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0)=P(2)=1$ y $\int_0^2 P(x)\,dx=\frac{1}{3}$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

El polinomio que queremos hallar será de la forma: $P(x)=ax^2+bx+c$

- $P(0)=1 \Rightarrow c=1$

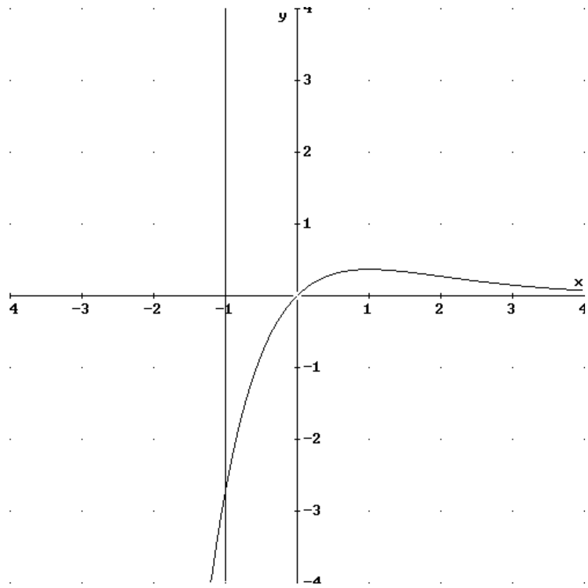
- $P(2)=1 \Rightarrow 4a+2b+1=1 \Rightarrow 4a+2b=0$

- $\int_0^2 (ax^2+bx+1)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+x\right]_0^2=\frac{8a}{3}+2b+2=\frac{1}{3}$

Resolviendo el sistema sale que: $P(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x\cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y=f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x=-1$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



$$A=\int_{-1}^{0} -xe^{-x}\,dx=\left[x\cdot e^{-x}+e^{-x}\right]_{-1}^{0}=1\,u^2$$

Sea $Ln(x)$ el logaritmo neperiano de x y sea $f : D \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$

a) Determina el conjunto D sabiendo que está formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que existe $f(x)$.

b) Usa el cambio de variable $t = Ln(x)$ para calcular una primitiva de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $Ln(x)$ sólo existe para $x > 0$, por tanto, el dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x(Ln(x))^2}$ puesto que es un cociente, aparte de considerar los números $x > 0$ hemos de quitar aquellos que anulan el denominador que en nuestro caso es $x = 1$, ya que $Ln(1) = 0$. Luego el dominio pedido es $(0,1) \cup (1,\infty)$.

b) Hacemos el cambio $t = Ln(x) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$\int \frac{1}{x(Ln(x))^2} dx = \int \frac{x \cdot dt}{x \cdot t^2} = \int t^{-2}\, dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{Ln(x)} + C$$

Calcula $\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx=\int (x+2)\,dx+\int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{-x+5}{x^2-1}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x+5}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$x=1 \Rightarrow 4=2A \Rightarrow A=2$

$x=-1 \Rightarrow 6=-2B \Rightarrow B=-3$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int \frac{2}{x-1}\,dx+\int \frac{-3}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+2x+2\ln(x-1)-3\ln(x+1)+C$$

a) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f'(x)=2x^3-6x^2$ y que su valor mínimo es -12.
b) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de inflexión de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los posibles máximos o mínimos son las soluciones de la ecuación:

$$f'(x)=2x^3-6x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

El mínimo está en $x=3$, ya que $f''(3)=6\cdot 3^2-12\cdot 3=54-36=18>0$

$$f(x)=\int(2x^3-6x^2)\,dx=\frac{x^4}{2}-2x^3+C$$

Como $f(3)=-12\Rightarrow \dfrac{3^4}{2}-2\cdot 3^3+C=-12\Rightarrow C=\dfrac{3}{2}$

Luego, la función es: $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-2x^3+\dfrac{3}{2}$

b) Calculamos los puntos de inflexión igualando la segunda derivada a cero.

$$f''(x)=6x^2-12x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

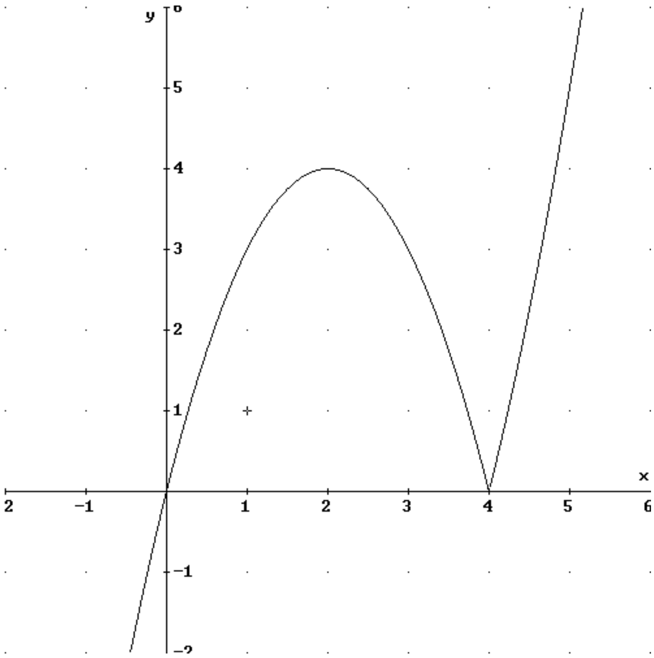
$$\left.\begin{array}{l} x_0=0 \\ f(x_0)=\dfrac{3}{2} \\ f'(x_0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ f(x_0)=-\dfrac{13}{2} \\ f'(x_0)=-8 \end{array}\right\}\Rightarrow y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Rightarrow y+\frac{13}{2}=-8(x-2)\Rightarrow y=\frac{-16x+19}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-4|$.
a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia su derivabilidad en $x=4$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de $f(x)=x|x-4|$ es:



b) Abrimos la función: $f(x)=x|x-4|=\begin{cases}-x^2+4x & si \quad x\le 4\\ x^2-4x & si \quad x>4\end{cases}$

Como la función es continua en $x=4$, estudiamos la derivabilidad en $x=4$.

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<4\\ 2x-4 & si \quad x>4\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=-4\\ f'(4^+)=\ \ 4\end{array}\right\}\Rightarrow f'(4^-)\ne f'(4^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

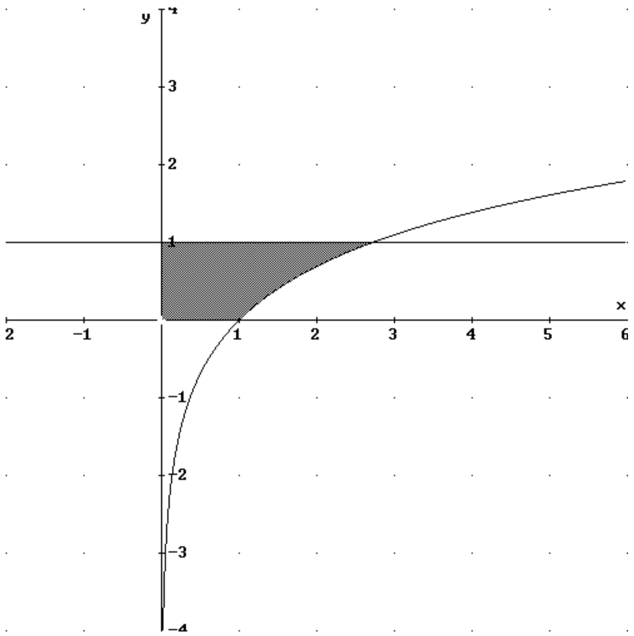
c)

$$A=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=-\frac{64}{3}+32=\frac{32}{3}\ u^2$$

Sea $Ln(x)$ el logaritmo neperiano de x. Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas de las funciones $y=1$ e $y=Ln(x)$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El recinto es:



b) Calculamos el área.

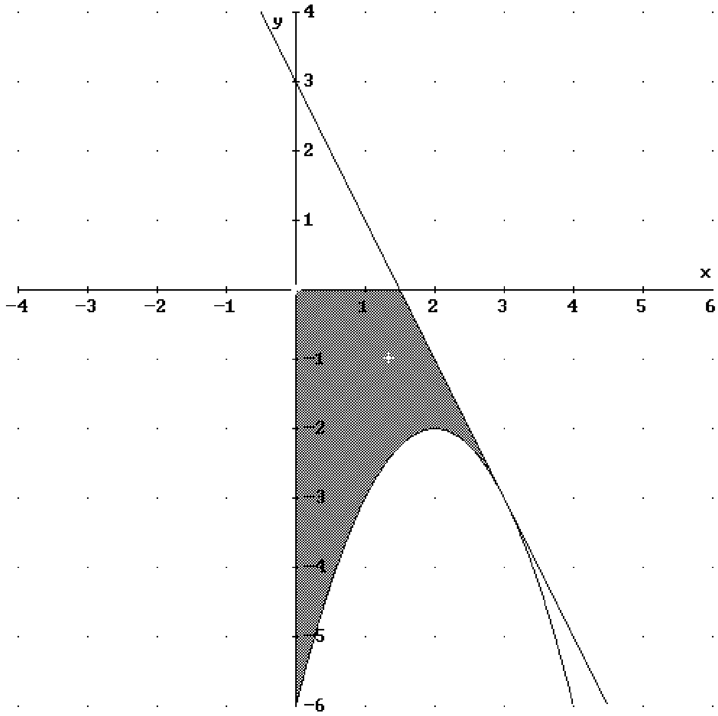
$$A=1+\int_{1}^{e}(1-\ln x)\,dx=1+\left[2x-x\ln x\right]_{1}^{e}=e-1\ u^{2}$$

Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la recta tangente a la parábola $y=-(x-2)^2-2=-x^2+4x-6$. La ecuación de la recta tangente será: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=3 \\ f(x_0)=-3 \\ f'(x_0)=-2 \end{array}\right\} y+3=-2\cdot(x-3)\Rightarrow y=-2x+3$$



Calculamos el área.

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}(x^2-4x+6)\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(-2x+3+x^2-4x+6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}=\frac{27}{4}\,u^2$$

Calcula una primitiva de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}$ para $x\neq 1$ y $x\neq -3$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx=\int 2\,dx+\int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx=2x+\int \frac{6x+6}{x^2+2x-3}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1$; $x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x+6}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$x=1\Rightarrow 12=4A\Rightarrow A=3$

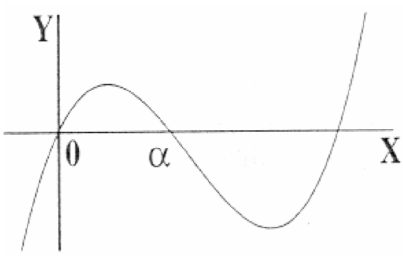
$x=-3\Rightarrow -12=-4B\Rightarrow B=3$

Con lo cual:

$$\int \frac{2x^2+10x}{x^2+2x-3}\,dx=2x+\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{x+3}\,dx=2x+3\ln(x-1)+3\ln(x+3)+C$$

Consideremos $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ **.**

a) Si *f* fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:



i) $F(\alpha)=0$

ii) $F'(\alpha)=0$

iii) F **es creciente en** $(0,\alpha)$ $(0,\alpha)$

b) Calcula $F(1)$ **siendo** $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

i) $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)\,dt\neq 0$ porque nos daría el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX entre $x=0$ y $x=\alpha$.

ii) $F'(x)=\left[\int_0^\alpha f(t)\,dt\right]'=f(x)$, según el teorema fundamental del calculo integral, luego $F'(\alpha)=f(\alpha)$ y según la gráfica se observa que $f(\alpha)=0$.

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$ si y solo si $F'(x)>0$ en $(0,\alpha)$, pero $F'(x)=f(x)$ que es mayor que cero en $(0,\alpha)$, luego $F(x)$ es creciente en dicho intervalo.

b) Si hacemos el cambio $t+1=x^2 \Rightarrow dt=2x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt=\int \frac{2x\,dx}{x}=2\int dx=2x=2\sqrt{t+1}$$

$$F(1)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,dt=\left[2\sqrt{t+1}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2$$

Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \int (3x+3)\,dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}\,dx = \frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{9x+7}{x^2-x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1$; $x=2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{9x+7}{x^2-x-2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=-1 \Rightarrow -2=-3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$x=2 \Rightarrow 25=3B \Rightarrow B=\frac{25}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \int (3x+3)\,dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}\,dx = \frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{9x+7}{x^2-x-2}\,dx =$$

$$=\frac{3x^2}{2}+3x+\int \frac{\frac{2}{3}}{x+1}\,dx+\int \frac{\frac{25}{3}}{x-2}\,dx=\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{25}{3}\ln(x-2)$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx=\left[\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{25}{3}\ln(x-2)\right]_0^1=$$

$$\left[\frac{3}{2}+3+\frac{2}{3}\ln(2)+\frac{25}{3}\ln(-1)\right]-\left[\frac{2}{3}\ln(1)+\frac{25}{3}\ln(-2)\right]=\frac{9}{2}-\frac{23}{3}\ln 2$$

Sea $Ln(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1-x^2$ y sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$u=\ln(1-x^2);\ du=\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

$$\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln(1-x^2)-\int\frac{2x^2}{x^2-1}\,dx = x\ln(1-x^2)-\int 2\,dx-\int\frac{2}{x^2-1}\,dx =$$
$$= x\ln(1-x^2)-2x+\ln(x+1)-\ln(x+1)+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,1)$.

$$1=0\cdot\ln 1-0+\ln 1-\ln(-1)+C \Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\ln(1-x^2)-2x+\ln(x+1)-\ln(x+1)+1$

Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide:
a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.
b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + x^2 \\ y = 1 + x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 1$$

El área que nos piden es:

$$A = \int_0^1 \left[(1+x) - (1+x^2)\right] dx = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ u^2$$

b) La pendiente de la recta que nos dan es 1, luego:

$$y' = 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Calculamos la recta tangente que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y tiene de pendiente 1.

$$y - \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{4x+3}{4}$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)\,dx=6$, halla *a*, *b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ ; \ f''(x)=6x+2a$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Extremo relativo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow b=0$

- Punto de inflexión en $x=-1 \Rightarrow f''(-1)=0 \Rightarrow -6+2a=0 \Rightarrow a=3$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=6 \Rightarrow \int_0^1 (x^3+3x^2+c)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+cx\right]_0^1=\frac{1}{4}+1+c=6 \Rightarrow c=\frac{19}{4}$

Luego, $a=3$; $b=0$; $c=\frac{19}{4}$

Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3-6x+4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las coordenadas del máximo de la función.

$$f'(x)=6x^2-6=0\Rightarrow x=\pm 1 \ ; \ f''(1)=12>0\Rightarrow mínimo \ ; \ f''(-1)=-12<0\Rightarrow Máximo$$

Luego, el máximo está en el punto $P(-1,8)$. La pendiente valdrá $f'(-1)=6(-1)^2-6=0\Rightarrow m=0$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y-8=0\cdot(x+1)\Rightarrow y=8$

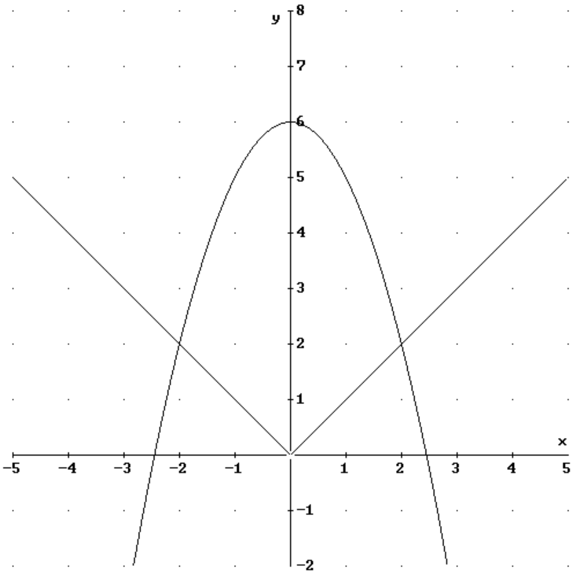
Calculamos el área que nos piden.

$$A=\int_{-1}^{2}(8-2x^3+6x-4)\,dx=\left[-\frac{2x^4}{4}+\frac{6x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{2}=\left[-\frac{32}{4}+\frac{24}{2}+8\right]-\left[-\frac{2}{4}+\frac{6}{2}-4\right]=\frac{27}{2}\ u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

- $A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\, dx = 2 \cdot \left[6x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{44}{3}\ u^2$

Se sabe que la función $f:(0,3)\to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo $f'(x)=\begin{cases} x-1 & si\ 0<x\le 2 \\ -x+3 & si\ 2<x<3 \end{cases}$ y que $f(1)=0$. Halla la expresión analítica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos para calcular la expresión de $f(x)$, que será: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C & si\ 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x+D & si\ 2<x<3 \end{cases}$.

A continuación aplicamos las condiciones del problema para calcular *C* y *D*.

$$f(1)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-1+C=0 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

La función tiene que ser continua, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} -\dfrac{x^2}{2}+3x+D=4+D \end{array} \right\} \Rightarrow 4+D=\frac{1}{2} \Rightarrow D=-\frac{7}{2}$$

Por lo tanto, la expresión de *f* es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2} & si\ 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{7}{2} & si\ 2<x<3 \end{cases}$.

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-2x+2$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje OY.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto tiene de coordenadas $P(3,5)$. La pendiente valdrá $f'(3)=2\cdot 3-2=4\Rightarrow m=4$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y-5=4\cdot(x-3)\Rightarrow y=4x-7$

b) Calculamos el área que nos piden.

$$A=\int_0^3\left[\left(x^2-2x+2\right)-\left(4x-7\right)\right]dx=\int_0^3\left[x^2-6x+9\right]dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_0^3=\left[\frac{27}{3}-\frac{54}{2}+27\right]=9\ u^2$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,4)$ y que $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\frac{32}{3}$. Halla *a*, *b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=2ax+b \ ; \ f''(x)=2a$$

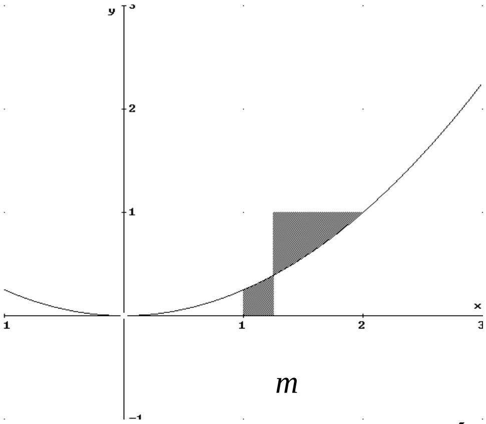
Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 2a+b=0$

- Pasa por $(1,4)\Rightarrow f(1)=4\Rightarrow a+b+c=4$

- $\int_{-1}^{3}(ax^2+bx+c)\,dx=\frac{32}{3}\Rightarrow\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^{3}=\frac{28a}{3}+4b+4c=\frac{32}{3}$

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y=\frac{x^2}{4}$. Halla el valor de *m* para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

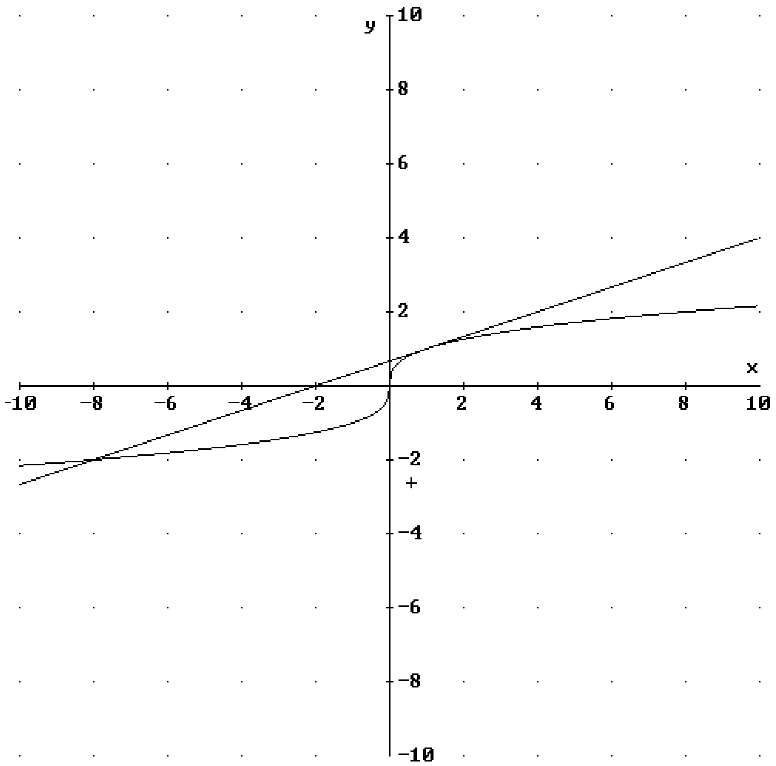
$$\int_1^m \frac{x^2}{4}\,dx=\int_m^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^m=\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_m^2 \Rightarrow \frac{m^3-1}{12}=\frac{m^3}{12}-m+\frac{4}{3} \Rightarrow m=\frac{17}{12}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
a) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta tangente obtenida.
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente pasa por el punto $P(1,1)$ y su pendiente vale $y'(1)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow m=\dfrac{1}{3}$. Luego, la recta tangente es: $y-1=\dfrac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{x+2}{3}$

b)



c)

$$A=\int_{-8}^{1}\left(\frac{x+2}{3}-\sqrt[3]{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{6}+\frac{2x}{3}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-8}^{1}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{64}{6}+\frac{16}{3}+12=\frac{27}{4}\ u^2$$

Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \lambda x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - \lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = \lambda$$

$$A = \int_0^{\lambda} (\lambda x - x^2) \, dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\lambda} = \frac{\lambda^3}{6} = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6}$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\cdot Ln\,x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=(x-1)\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2}-x \end{array}}$$

$$I=\int (x-1)\cdot ln\,x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+x+C\Rightarrow-\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot ln1-\frac{1}{4}+1+C\Rightarrow C=-\frac{9}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+x-\frac{9}{4}$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$
a) ¿En qué punto de la gráfica de *f* la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas?. Halla la ecuación de dicha tangente.
b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto será $P\left(a,e^{\frac{a}{3}}\right)$ y la pendiente valdrá: $y'=\frac{e^{\frac{x}{3}}}{3}\Rightarrow m=\frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}$.

La ecuación de la recta tangente será: $y-e^{\frac{a}{3}}=\frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(x-a)$. Como queremos que pase por el origen de coordenadas, se debe cumplir que:

$$0-e^{\frac{a}{3}}=\frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(0-a)\Rightarrow -3e^{\frac{a}{3}}=-ae^{\frac{a}{3}}\Rightarrow a=3$$

Luego, el punto será: $P(3,e)$ y la recta tangente: $y-e=\frac{e}{3}(x-3)\Rightarrow y=\frac{ex}{3}$.

b) Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y=\frac{1}{2}+\cos x$ y el eje de abscisas

$$\frac{1}{2}+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$A=\int_0^3\left(e^{\frac{x}{3}}-\frac{ex}{3}\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-\frac{ex^2}{6}\right]_0^3=\left(3e-\frac{9e}{6}\right)-(3)=\frac{3e}{2}-3\ u^2$$

De la función $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

a) Determina *f*.
b) Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)$.

$$f(x)=\int\frac{3}{(x+1)^2}\,dx=3\cdot\int(x+1)^{-2}\,dx=3\frac{(x+1)^{-1}}{-1}=\frac{-3}{x+1}+C$$

Como queremos que pase por el punto $(2,0)$, tenemos:

$$f(2)=0\Rightarrow-\frac{3}{3}+C=0\Rightarrow C=1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $f(x)=\dfrac{-3}{x+1}+1$

b) Calculamos una primitiva de $f(x)$.

$$F(x)=\int\left(\frac{-3}{x+1}+1\right)dx=-3\ln(x+1)+x+C$$

Como queremos que pase por el punto $(0,1)$, tenemos:

$$F(0)=1\Rightarrow-3\ln(0+1)+0+C=1\Rightarrow C=1$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden será: $F(x)=-3\ln(x+1)+x+1$

Determina b sabiendo que $b > 0$ y que el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = bx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - bx = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = b$$

$$A = \int_0^b (bx - x^2)\ dx = \left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow b = 3$$

Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1\,;\; x=-3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$x=-3 \Rightarrow 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x+3}\,dx=\frac{1}{4}\Big[\ln(x-1)\Big]_{-2}^{0}-\frac{1}{4}\Big[\ln(x+3)\Big]_{-2}^{0}=-\frac{\ln 3}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\cdot e^{2x}$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,e^2)$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x-1;\ du=dx \\ dv=e^{2x}\,dx;\ v=\dfrac{e^{2x}}{2} \end{array}}$$

$$\int (x-1)\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}\cdot e^{2x}+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,e^2)$.

$$e^2=\frac{1}{2}\cdot(1-1)\cdot e^2-\frac{1}{4}e^2+C\Rightarrow C=\frac{5}{4}e^2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}\cdot e^{2x}+\frac{5}{4}\cdot e^2$

Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$

a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x} = t$.
b) Calcula *I*.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$1+\sqrt{x} = t \Rightarrow x = (t-1)^2$$
$$dx = 2\cdot(t-1)\ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 9 \Rightarrow t = 4$

Con lo cual:

$$I = 2\int_2^4 \frac{t-1}{t} dt = 2\int_2^4 \left(1-\frac{1}{t}\right) dt = 2\cdot\left[t-\ln t\right]_2^4 = 4-2\ln 2$$

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada $y = 1$, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.

b) Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $1 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = \frac{2}{3} \\ f'(2) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Luego: $\left. \begin{array}{l} P(2,1) \\ f'(2) = m = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow y = \frac{-2x+7}{3}$

b)

$$A = \int_0^2 \left[\left(\frac{-2x+7}{3} \right) - \left(\frac{-x^2+2x+3}{3} \right) \right] dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2 - 4x + 4}{3} \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{9} \ u^2$$

Considera las funciones $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas, respectivamente, por

$$f(x)=Ln\,x \qquad \text{y} \qquad g(x)=1-2^x$$

siendo *Ln x* el logaritmo neperiano de *x*. Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x=1$ y $x=2$ y las gráficas de *f* y *g*.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A=\int_1^2 \left[\ln x-\left(1-2^x\right)\right]dx=\left[x\ln x-x-x+\frac{2^x}{\ln 2}\right]_1^2=2\ln 2-2+\frac{2}{\ln 2}\ u^2$$

Determina *b* sabiendo que *b* > 0 y que el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2$ y los ejes coordenados es igual a 8.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$y=\left(\frac{1}{3}x-b\right)^2=\frac{x^2-6bx+9b^2}{9}$$

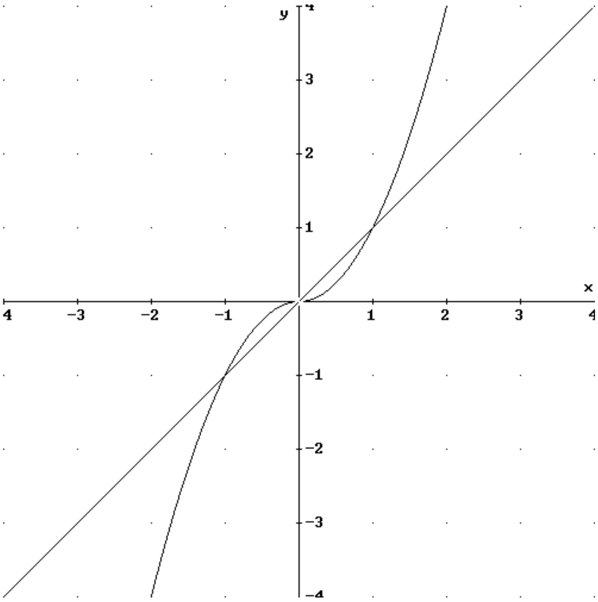
Vértice $-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{6b}{9}}{\frac{2}{9}}=3b\Rightarrow(3b,0)$

$$A=\int_0^{3b}\frac{x^2-6bx+9b^2}{9}\,dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6bx^2}{2}+9b^2x\right]_0^{3b}=\frac{1}{9}\left[\frac{27b^3}{3}-\frac{54b^3}{2}+27b^3\right]=b^3=8\Rightarrow b=2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\,|x|$.
a) Dibuja la región acotada del plano que está limitada por la gráfica de f y la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} x^2 & si \;\; x \geq 0 \\ -x^2 & si \;\; x < 0 \end{cases}$



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left[x - x^2 \right] dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \; u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{x}+4e^{-x}$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y halla sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.
MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$y'=e^{x}-4e^{-x}=0\Rightarrow e^{2x}-4=0\Rightarrow x=\ln 2$$

	$(-\infty,\ln 2)$	$(\ln 2,\infty)$
Signo y'	–	+
Función	D	C

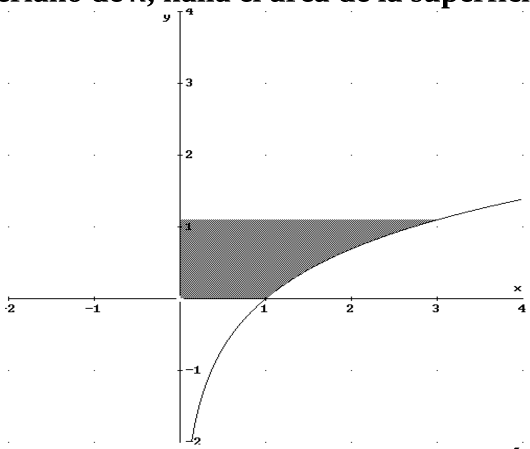
$\downarrow$
mínimo $(\ln 2,4)$

No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo.

b)

$$A=\int_0^2\left[e^{x}+4e^{-x}\right]dx=\left[e^{x}-4e^{-x}\right]_0^2=e^2-\frac{4}{e^2}+3\ u^2$$

Siendo Ln *x* el logaritmo neperiano de *x*, halla el área de la superficie sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1 = \int_1^3 \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^3 = (3\ln 3 - 3) - (1\ln 1 - 1) = 3\ln 3 - 2$$

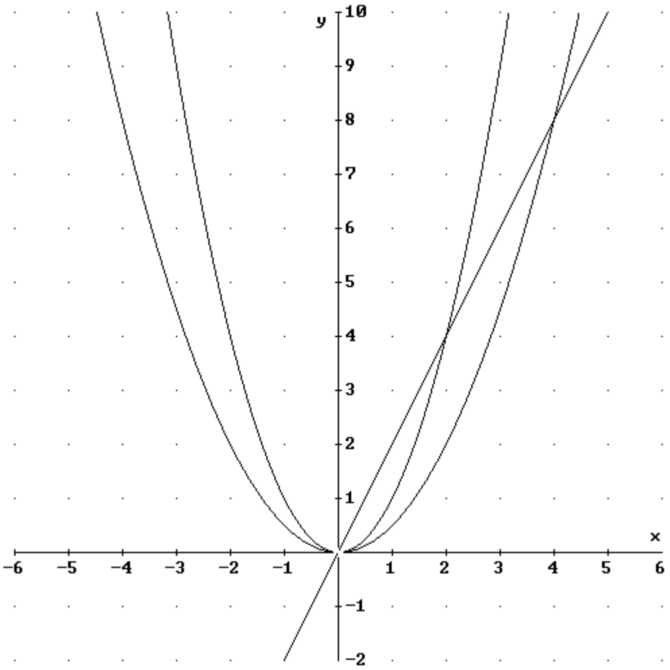
Área del rectángulo = base x altura = $3\ln 3$

Área pedida = Área del rectángulo $- A_1 = 3\ln 3 - (3\ln 3 - 2) = 2 \ u^2$

Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta $y = 2x$ y por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2004. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

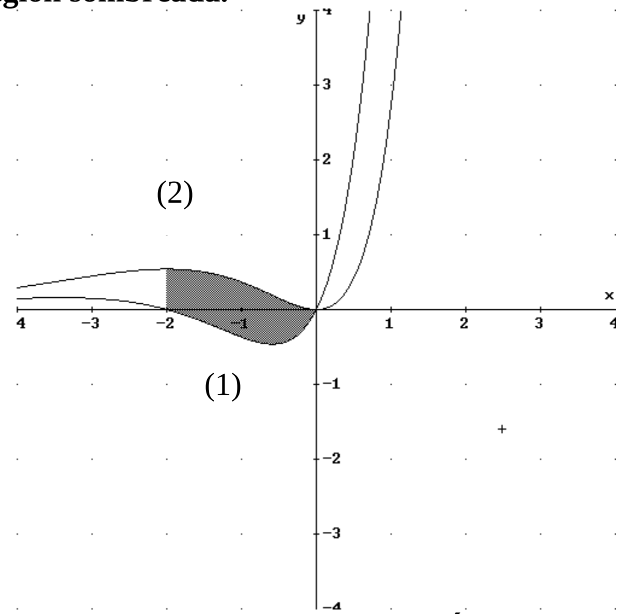
R E S O L U C I Ó N



$$Área = \int_0^2 \left[x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx + \int_2^4 \left[2x - \frac{x^2}{2} \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6} \right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{8}{6} + 16 - \frac{64}{6} - 4 + \frac{8}{6} \right] = 4\ u^2$$

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cdot e^x$ y a su derivada $f\,'$.
a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de $f\,'$.
b) Calcula el área de la región sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^x$ es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R}$. Además vemos que esta función es siempre positiva, luego su gráfica debe ser la que está por encima del eje OX.
Podríamos también calcular los puntos de corte con el eje OX de las dos funciones

$f(x)=x^2\cdot e^x=0\Rightarrow x=0$, luego sólo corta en el punto (0,0)

$f\,'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=(2x+x^2)\cdot e^x=0\Rightarrow x=0;x=-2$, luego vemos que corta en dos puntos al eje OX.

b) El área pedida es $A=\int_{-2}^{0}\left(f(x)-f\,'(x)\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(x^2e^x-(x^2e^x+2xe^x\right)dx=-2\int_{-2}^{0}xe^xdx$

Vamos a calcular primero la integral indefinida por partes y luego sustituiremos:

$$\int x\cdot e^xdx=x\cdot e^x-\int e^xdx=x\cdot e^x-e^x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^xdx;\ v=e^x \end{array}}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$A=-2\int_{-2}^{0}xe^xdx=-2\left[x\cdot e^x-e^x\right]_{-2}^{0}=-2\left[(0-e^0)-(-2e^{-2}-e^{-2}\right]=-2(-1+3e^{-2})=2-6e^{-2}=1'18\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f*, la recta de ecuación $x=2$ y la recta obtenida en (a).
MATEMÁTICAS II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

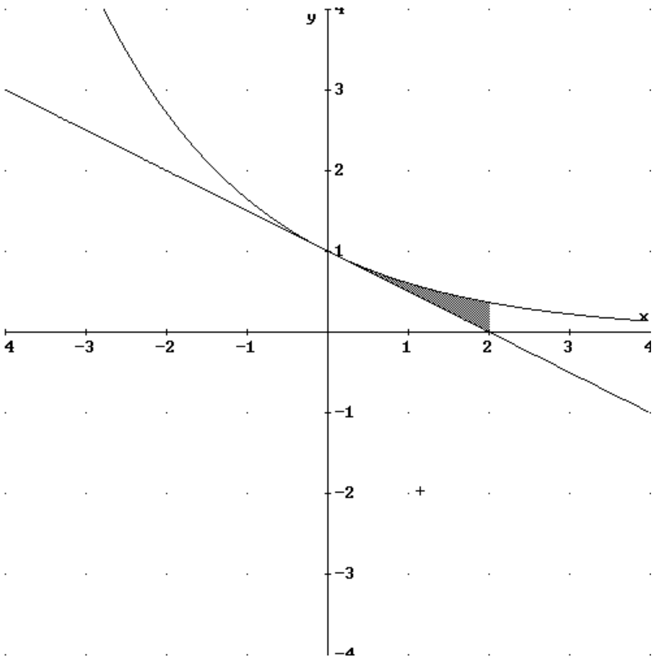
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=e^{0}=1$$
$$f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-\frac{1}{2}\cdot(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_{0}^{2}(e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}x-1)\,dx=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x^{2}}{4}-x\right]_{0}^{2}=-\frac{2}{e}+1-2+2=1-\frac{2}{e}$$

Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{9}{x^2-x-2}dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{9}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=2 \Rightarrow 9=3A \Rightarrow A=\frac{9}{3}=3$$

$$x=-1 \Rightarrow 9=-3B \Rightarrow B=\frac{9}{-3}=-3$$

Con lo cual:

$$\int \frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{9}{x^2-x-2}dx = \int (3x+4)dx + \int \frac{3}{(x-2)}dx + \int \frac{-3}{(x+1)}dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 4x + 3\ln|x-2| - 3\ln|x+1| + C$$

Se sabe que la función $f:[0,+\infty] \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} \sqrt{ax} & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8 \end{cases}$

es continua en $[0,+\infty)$.
a) Halla el valor de *a*.
b) Calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim_{x\to 8^+} \dfrac{x^2-32}{x-4} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{8a} = 8 \Rightarrow a = 8$$

b) $$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

$$I_1 = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx = \sqrt{8}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{8}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{128}{3}$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \int (x+4)dx + \int \frac{-16}{x-4}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|$$

$$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16\ln|x-4|\right]_8^{10} = \left[(50+40-16\ln 6) - (32+32-16\ln 4)\right] = 26 - 16\ln\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{8x}\,dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}\,dx = \frac{128}{3} + 26 - 16\ln\frac{3}{2} = \frac{206}{3} - 16\ln\frac{3}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **la función definida por:** $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x\le 0 \\ (x-2)^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de *f* con el eje de abscisas y esboza dicha gráfica.
b) Halla el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f* y por el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto de corte con el eje X es $y=0\Rightarrow 2x+4=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow(-2,0)$

$y=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow(2,0)$

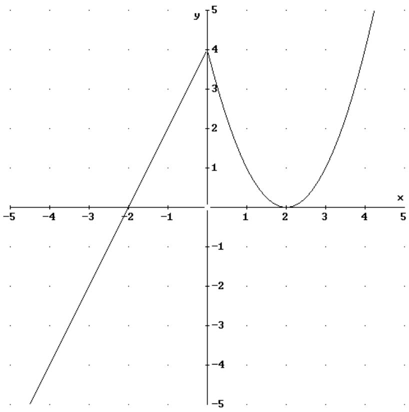
Como $f(x)=2x+4$, es una recta, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=2x+4$
0	4
-1	2
-2	0

Como $f(x)=(x-2)^2$, es una parábola, hacemos una tabla de valores

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

Luego la gráfica será:



b) Área = $\int_{-2}^{0}(2x+4)dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2dx=\left[x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}u^2$

Calcula $\int_{-1}^{0} Ln(2+x)\,dx$, siendo *Ln* la función logaritmo neperiano.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I_1 = \int Ln(2+x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(2+x);\ du = \dfrac{1}{2+x}\,dx \\ dv = dx;\ v = x \end{array}}$$

$$I_1 = \int Ln(2+x)\,dx = x \cdot Ln(2+x) - \int \frac{x}{2+x}\,dx = x \cdot Ln(2+x) - I_2$$

La integral $I_2 = \int \frac{x}{2+x}\,dx$ es una integral racional

$$I_2 = \int \frac{x}{2+x}\,dx = \int \left(1 + \frac{-2}{2+x}\right) dx = x - 2\,Ln(2+x)$$

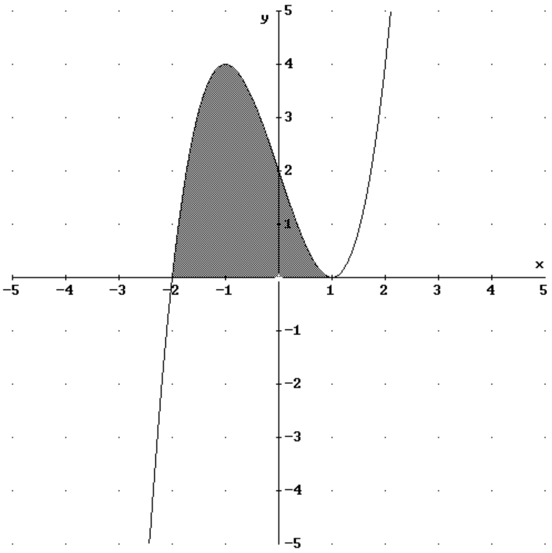
Sustituyendo en la anterior, nos queda:

$$I_1 = \int Ln(2+x)\,dx = x \cdot Ln(2+x) - \int \frac{x}{2+x}\,dx = x \cdot Ln(2+x) - x + 2\,Ln(2+x)$$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$\int_{-1}^{0} Ln(2+x)\,dx = \left[x \cdot Ln(2+x) - x + 2\,Ln(2+x)\right]_{-1}^{0} = 2 \cdot Ln\,2 - 1$$

Se sabe que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ es la que aparece en el dibujo.
a) Determina *f*.
b) Calcula el área de la región sombreada.



MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) De la gráfica de la función $f(x)$, vemos que:

1. $f(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 8$

2. $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1$

3. mínimo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$

Luego resolviendo el sistema $\left. \begin{aligned} 4a - 2b + c &= 8 \\ a + b + c &= -1 \\ 2a + b &= -3 \end{aligned} \right\}$ obtenemos que $a = 0; b = -3; c = 2$. Por lo tanto, la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x + 2$

b) $A = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{27}{4}\ u^2$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2 sen(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2 sen(2x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2 sen(2x)\,dx=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+\int x\cdot\cos 2x\,dx=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+\left[x\cdot\frac{sen\,2x}{2}-\int\frac{sen\,2x}{2}dx\right]=$$
$$=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+x\cdot\frac{sen\,2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x^2;\ du=2x\ dx \\ dv=sen\,2x\,dx;\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx;\ v=\dfrac{sen\,2x}{2}\end{array}}$$

$$F(x)=-x^2\cdot\frac{\cos 2x}{2}+x\cdot\frac{sen\,2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(0,1)\Rightarrow F(0)=1$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C.

$$1=0+0+\frac{1}{4}+C\ \Rightarrow\ C=\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=-x^2\cdot\dfrac{\cos 2x}{2}+x\cdot\dfrac{sen\,2x}{2}+\dfrac{\cos 2x}{4}+\dfrac{3}{4}$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2-5x+4$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área de la región acotada que está limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de *f* y por la recta tangente obtenida.
MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

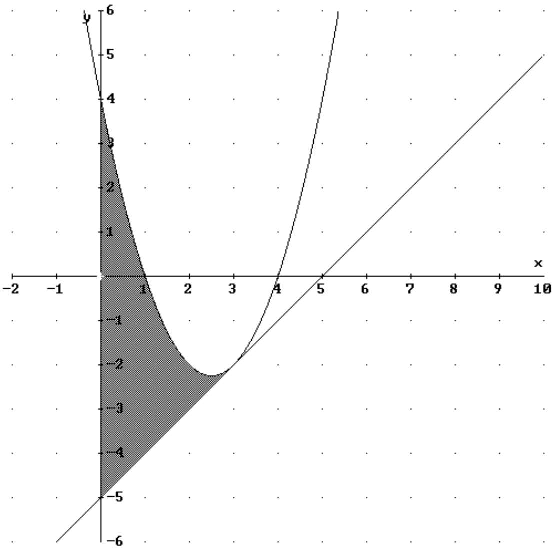
a) La ecuación de la recta tangente en $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$.

Calculamos

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow f(3)=9-15+4=-2$$
$$f'(x)=2x-5 \Rightarrow f'(3)=6-5=1$$

Luego la recta tangente es: $y-(-2)=1\cdot(x-3) \Rightarrow y=x-5$

b) Dibujamos la parábola y la recta tangente para ver con mayor claridad el área que nos piden.



$$A=\int_0^3\left[(x^2-5x+4)-(x-5)\right]\,dx=\int_0^3(x^2-6x+9)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_0^3=9u^2$$

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \cos(5x+1)\,dx$.

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx$.

c) $\int_0^1 x\cdot e^{-3x}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2005. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $\int \cos(5x+1)\,dx = \dfrac{1}{5}\cdot\int 5\cdot\cos(5x+1)\,dx = \dfrac{1}{5}sen(5x+1)+C$

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}\,dx = \int (x+2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \dfrac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{x+2}}+C$

c) Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot e^{-3x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$I=\int x\cdot e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}+\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=e^{-3x}dx;\ v=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}}$$

Ahora calculamos la integral que nos pide el problema

$$I=\int_0^1 x\cdot e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}x\cdot e^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1}{9}-\frac{4}{9}e^{-3}$$

De una función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ se sabe que $f(3)=6$ y que su función derivada está dada por:

$$f'(x)=\begin{cases} 5x-2 & si \quad 0<x<1 \\ x^2-6x+8 & si \quad 1\le x<5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f* y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$

$$f(3)=6$$
$$f'(x)=x^2-6x+8\Rightarrow f'(3)=3^2-6\cdot 3+8=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-6=-1\cdot(x-3)\Rightarrow y=-x+9$

b) Igualamos a cero la derivada: $y'=5x-2=0\Rightarrow x=\frac{2}{5}$

$$y'=x^2-6x+8=0\Rightarrow x=2;x=4$$

	$(0,\frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5},1)$	(1,2)	(2,4)	(4,5)
Signo y'	–	+	+	–	+
Función	D	C	C	D	C

mínimo $\left(\frac{2}{5},\frac{133}{30}\right)$ Máximo $\left(2,\frac{20}{3}\right)$ mínimo $\left(4,\frac{16}{3}\right)$

Para poder calcular las coordenadas del máximo y de los mínimos, necesitamos calcular la función *f(x)*

$$\int(5x-2)dx=\frac{5x^2}{2}-2x+C\,;\ \int(x^2-6x+8)dx=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x+D$$

Como $f(3)=6\Rightarrow 6=\frac{27}{3}-27+24+D\Rightarrow D=0$

Como *f(x)* es continua en el punto *x* = 1, tenemos: $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow\frac{5}{2}-2+C=\frac{1}{3}-3+8\Rightarrow C=\frac{29}{6}$

Luego: $$f(x)=\begin{cases}\frac{5x^2}{2}-2x+\frac{29}{6} & si \quad 0<x<1 \\ \frac{x^3}{3}-3x^2+8x & si \quad 1\le x<5\end{cases}$$

Considera la integral definida $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$.

a) Exprésala aplicando el cambio de variables $\sqrt{1+x}-1=t$

b) Calcula *I*.

MATEMÁTICAS II. 2005. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $\sqrt{1+x}-1=t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x=3 \Rightarrow \sqrt{1+3}-1=t \Rightarrow t=1$

Si $x=8 \Rightarrow \sqrt{1+8}-1=t \Rightarrow t=2$

Vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\sqrt{1+x}-1=t \Rightarrow \sqrt{1+x}=1+t \Rightarrow 1+x=(1+t)^2 \text{, con lo cual } dx=2\cdot(1+t)\cdot dt$$

Sustituyendo, nos queda:

$$I=\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx=\int_1^2 \frac{1}{t}\cdot 2\cdot(1+t)\cdot dt=2\int_1^2 \frac{1+t}{t} dt=2\int_1^2 (1+\frac{1}{t})dt$$

b)

$$I=2\cdot\int_1^2 (1+\frac{1}{t})dt=2\left[t+\ln|t|\right]_1^2=2\cdot\left[(2+\ln 2)-(1+\ln 1)\right]=2\left[1+\ln 2)\right]=3'38$$

Sea $I=\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
a) Expresa I aplicando el cambio de variables $t=1+x^2$.
b) Calcula el valor de I.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los nuevos límites de integración:

$$Si \;\; x=0 \Rightarrow t=1+x^2=1$$
$$Si \;\; x=2 \Rightarrow t=1+x^2=5$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1+x^2 \;;\; x^2=t-1 \\ dt=2x\,dx \;;\; x\,dx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right\} I=\int_0^2 \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_1^5 \frac{(t-1)\cdot\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_1^5 (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\,dt$$

b) $$I=\frac{1}{2}\int_1^5 (t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^5=\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$$

El área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{a}$ e $y = \sqrt{ax}$, con $a > 0$, vale 3. Calcula el valor de *a*.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

1) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{a} \\ y = \sqrt{ax} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \sqrt{ax} \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = ax \Rightarrow x^4 - a^3 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

2) Vamos a ver en el intervalo (0,*a*), que función va por encima y cuál por debajo

$$Si\ x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{a} = \frac{\frac{a^2}{4}}{a} = \frac{a}{4} \Rightarrow Debajo$$

$$Si\ x = \frac{a}{2} \Rightarrow y = \sqrt{ax} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow Encima$$

3) Calculamos el área

$$3 = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right) dx = \left[\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}$$

$$3 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

Como el enunciado nos dice que $a > 0$, entonces $a = 3$.

Sea *f* la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & si \quad x\geq 0 \\ x\cdot e^{-x^2} & si \quad x<0 \end{cases}$

a) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=0$ y, si es posible, calcula la derivada de *f* en dicho punto.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x=-1$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos primero la continuidad

e^x-1 es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de funciones continuas.
$x\cdot e^{-x^2}$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser producto de funciones continuas.

Nos falta ver la continuidad en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} e^x-1=0 \\ \lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{-x^2}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^x-1=\lim_{x\to 0^-} x\cdot e^{-x^2}=0$$, luego, es continua en $x = 0$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x>0 \\ 1\cdot e^{-x^2}(1-2x^2) & si \quad x<0 \end{cases}$

Veamos si existe $f'(0)$,es decir, si $f'(0^+)=f'(0^-)$

$f'(0^+)=1$
$f'(0^-)=1$

Como $f'(0^+)=f'(0^-)=1$, existe $f'(0)=1$

b) Como nos piden el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = -1$ solo interviene la rama $x\cdot e^{-x^2}$ puesto que $f(0) = 0$ y para $x > 0$ la función e^x-1 sube a $+\infty$. La función $x\cdot e^{-x^2}$ solo corta al eje OX en $x = 0$, y para $x < 0$ está siempre debajo del eje OX, luego:

$$Área=\int_{-1}^{0}-x\cdot e^{-x^2}\,dx$$

Hacemos el cambio $-x^2=t\Rightarrow -2x\,dx=dt$

Para $x=-1\Rightarrow t=-1$
Para $x=0\Rightarrow t=0$

$$Área=\int_{-1}^{0}-x\cdot e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}e^t\,dt=\frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-1}^{0}=\frac{e-1}{2e}\,u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{a}{x} & si \quad x\leq -1 \\ x^2+1 & si \quad x>-1 \end{cases}$

a) Halla el valor de *a* sabiendo que *f* es continua.
b) Esboza la gráfica de *f*.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x+2=0$ y $x-2=0$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

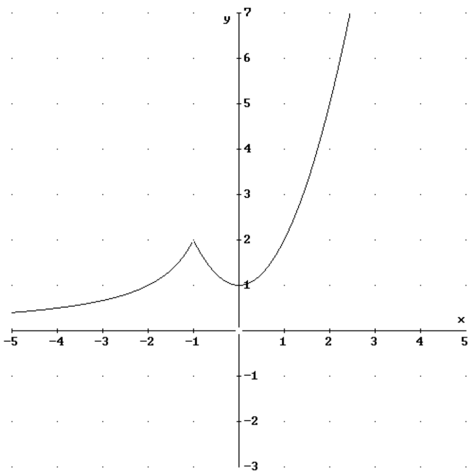
a) Como *f* es continua se tiene que cumplir que los limites laterales en $x=-1$ sean iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\rightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow -1^-} -\dfrac{a}{x}=a \\ \lim\limits_{x\rightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\rightarrow -1^-} x^2+1=2 \end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

b) $-\dfrac{2}{x}$ es una hipérbola (función de proporcionalidad inversa) que se dibuja en el II y IV cuadrante. Como sabemos tiene de asíntota horizontal *y* = 0, y de vertical *x* = 0.

x^2+1 es una parábola exactamente igual que x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de su gráfica sería:



c) El área limitada por OX y las rectas $x=-2$ y $x=2$ es:

$$A=\int_{-2}^{-1}-\frac{2}{x}dx+\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx=\left[-2\ln x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}+3\right]_{-1}^{2}=6+2\ln 2\ u^2$$

a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^2+b$. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x)dx=6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12.
b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=x^2+px+q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x=-6$ y su valor en él es -2.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int_0^6 f(x)\,dx=6\Rightarrow\int_0^6 (ax^2+b)\,dx=\left[\frac{ax^3}{3}+bx\right]_0^6=\frac{216a}{3}+6b=6\Rightarrow 12a+b=1$$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 vale −12, sabemos que $f'(3)=-12$

$$f'(x)=2ax\Rightarrow f'(3)=-12\Rightarrow 6a=-12\Rightarrow a=-2$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos: $12a+b=1\Rightarrow -24+b=1\Rightarrow b=25$

Luego, la función pedida es: $f(x)=-2x^2+25$

b)

Extremo en $x=-6\Rightarrow f'(6)=0\Rightarrow -12+p=0\Rightarrow p=12$

Pasa por $(-6,-2)\Rightarrow f(-6)=-2\Rightarrow 36-6p+q=-2\Rightarrow 36-72+q=-2\Rightarrow q=34$

La función pedida es $f(x)=x^2+12x+34$

Calcula $\int (x^2-1)\cdot e^{-x}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos por partes la integral que nos piden.

$$\int (x^2-1)\cdot e^{-x}dx = -(x^2-1)\cdot e^{-x} + 2\int x\cdot e^{-x}dx = -(x^2-1)\cdot e^{-x} + 2\left[-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = -e^{-x}(x^2+2x+1)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2-1;\ du = 2x\ dx \\ dv = e^{-x}dx;\ v = -e^{-x} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = e^{-x}dx;\ v = -e^{-x} \end{array}}$$

Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = sen\, x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(x) = sen\, x \Rightarrow f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$$

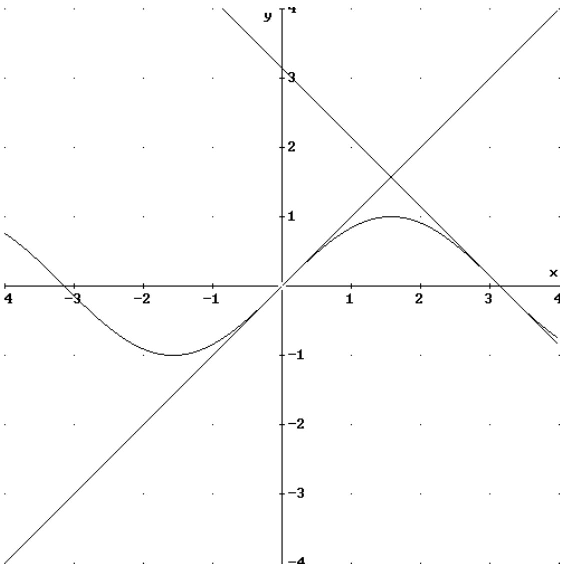
La recta tangente en $x = 0$ es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$, que es la bisectriz del I y III cuadrante.

La recta tangente en $x = \pi$ es $y - f(\pi) = f'(\pi) \cdot (x - \pi)$

$$f(x) = sen\, x \Rightarrow f(\pi) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(\pi) = -1$$

La recta tangente en $x = \pi$ es $y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Rightarrow y = -x + \pi$, que es la bisectriz del II y IV cuadrante, pero desplazada π unidades hacia arriba en el eje OY.

Un esbozo de la gráfica es:



El área pedida es

$$\int_0^{\pi/2} (x - sen\, x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi - sen\, x)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2 - 8}{4} u^2$$

Sea $f:[0,4]\rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que su función derivada viene dada por

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x & si \quad 0<x<3 \\ -2x+8 & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

a) Determina la expresión de *f* sabiendo que $f(1)=\frac{16}{3}$

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como es derivable en (0,4) es continua en [0,4] en particular es continua y derivable en $x = 3$.

Calculamos $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+C & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+8x+D & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

Como $f(1)=\frac{16}{3}\Rightarrow \frac{1}{3}+C=\frac{16}{3}\Rightarrow C=5$

Como es continua en $x = 3$, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2}{3}+C=3+C \\ \lim\limits_{x\to 3^+}-x^2+8x+D=15+D \end{array}\right\}\Rightarrow 3+C=15+D\Rightarrow 8=15+D\Rightarrow D=-7$$

Luego, la función es: $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}+5 & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+8x-7 & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

b) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=\frac{1}{3}+5=\frac{16}{3}$$
$$f'(1)=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

Luego la recta tangente en $x = 1$ es $y-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\cdot(x-1)\Rightarrow 2x-3y+14=0$

Sean las funciones f y g : $[0,+\infty]\rightarrow\mathbb{R}$, dadas por $f(x)=x^2$ y $g(x)=\lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es $\frac{1}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si igualamos las dos funciones, vemos que los puntos de corte son:

$$x^2=\lambda\sqrt{x}\Rightarrow x^4=\lambda^2 x\Rightarrow x=0\ ;\ x=\sqrt[3]{\lambda^2}$$

Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y $\sqrt[3]{\lambda^2}$, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow f(x)=x^2=\frac{\lambda^2}{4}$

Para $x=\frac{\lambda}{2}\Rightarrow g(x)=\lambda\sqrt{x}=\lambda\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$

Por lo tanto, la función que va por encima es $g(x)=\lambda\sqrt{x}$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}\left[\lambda\sqrt{x}-x^2\right]dx=\left[\lambda\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}}=\frac{2\lambda^2}{3}-\frac{\lambda^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\lambda=\pm1$$

Como λ es un número positivo, entonces $\lambda=1$

Sea $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} Ln\,x & si \quad 0<x\le 1 \\ Ln(2-x) & si \quad 1<x<2 \end{cases}$

siendo Ln la función logaritmo neperiano.

a) Estudia la derivabilidad de *f* en el punto *x* = 1.

b) Calcula $\int_1^{1'5} f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en $x = 1$.

1) $f(1)=\ln 1=0$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(2-x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

3) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Luego, la función es continua en $x = 1$. Vamos a estudiar ahora la derivabilidad, para ello calculamos $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{-1}{2-x} & si \quad 1<x<2 \end{cases}$$

La función es derivable en $x = 1$ si $f'(1^-)=f'(1^+)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\dfrac{1}{1}=1 \\ f'(1^+)=\dfrac{-1}{1}=-1 \end{array}\right\} f'(1^-)\neq f'(1^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

b)

$$\int_1^{1'5}\ln(2-x)dx=\left[x\cdot\ln(2-x)+\int\frac{x}{2-x}dx\right]=\left[x\cdot\ln(2-x)-x-2\ln(x-2)\right]_1^{1'5}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-0'15$$

$$\boxed{\begin{array}{c} u=\ln(2-x);\ du=\dfrac{-1}{2-x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

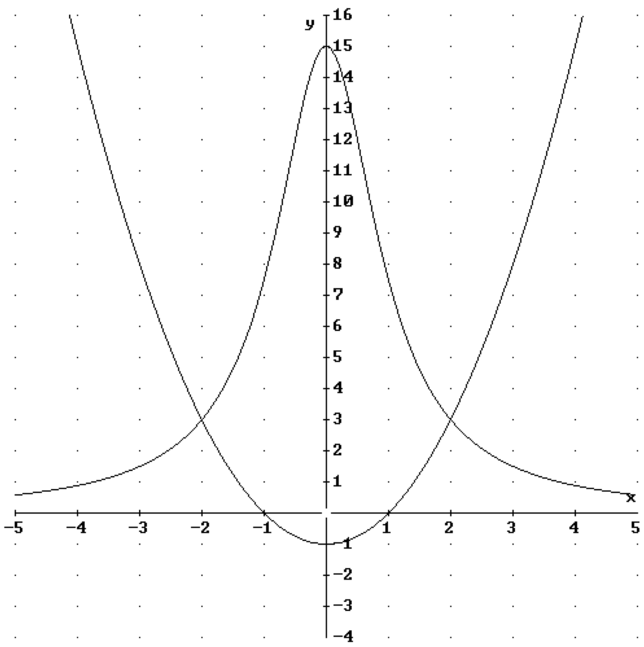
a) Haz un esbozo del recinto limitado por las curvas $y=\frac{15}{1+x^2}$ e $y=x^2-1$.

b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $y=\frac{15}{1+x^2}$ siempre es positiva (está por encima del eje de abscisas OX), tiene una asíntota horizontal que es la recta $y=0$ y, además, $f(0)=15$. La función $y=x^2-1$ es una parábola.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es



b)

$$A=\int_{-2}^{2}\left(\frac{15}{1+x^2}-x^2+1\right)dx=\left[15\,arc\,tg\,x-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{2}=30\,arc\,tg\,2-\frac{4}{3}\;u^2$$

Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{5x^2-x-160}{x^2-25}\,dx$.

b) $\displaystyle\int (2x-3)\cdot tg\,(x^2-3x)\,dx$ **, siendo *tg* la función tangente.**

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{5x^2-x-160}{x^2-25}\,dx = \int 5\,dx + \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = 5x + I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-25=0 \Rightarrow x=5; x=-5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x-35}{x^2-25} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=5 \Rightarrow -40=10A$; $A=-4$
$x=-5 \Rightarrow -30=-10B$; $B=3$

Con lo cual:

$$I_1 = \int \frac{-x-35}{x^2-25}\,dx = \int \frac{-4}{x-5}\,dx + \int \frac{3}{x+5}\,dx = -4\ln|x-5| + 3\ln|x+5|$$

Por lo tanto la solución es:

$$\int \frac{5x^2-x-160}{x^2-25}\,dx = 5x - 4\ln|x-5| + 3\ln|x+5| + C$$

b) Hacemos el cambio de variable $x^2-3x=t$, con lo cual $(2x-3)dx=dt$. Sustituyendo, tenemos:

$$\int (2x-3)\cdot tg\,(x^2-3x)\,dx = \int tg\,t\,dt = -\int \frac{-sen\,t}{\cos t}\,dt = -\ln|\cos t| = -\ln|\cos(x^2-3x)| + C$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3+3x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x+3$$

a) Esboza las gráficas de *f* y de *g* calculando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

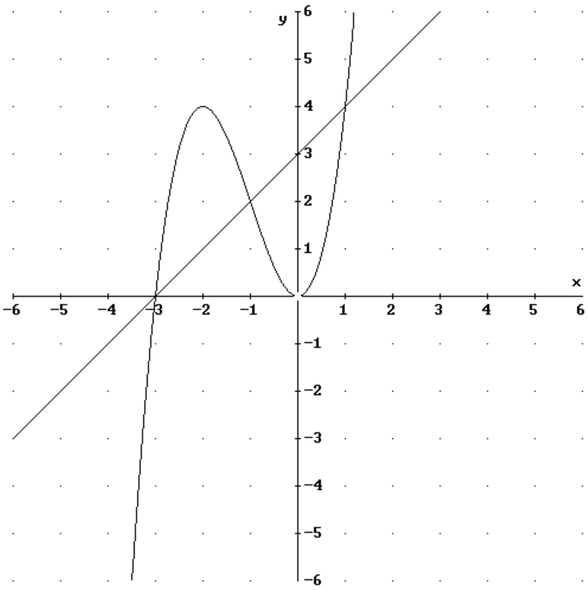
R E S O L U C I Ó N

a) Para dibujar la función $f(x)=x^3+3x^2$, vamos a calcular sus extremos relativos y puntos de corte con los ejes.

$$f'(x)=3x^2+6x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=-2$$
$$f''(x)=6x+6$$
$$f''(0)=6>0 \Rightarrow \text{ mínimo } (0,0)$$
$$f''(-2)=-6<0 \Rightarrow \text{ Máximo } (-2,4)$$

La función corta al eje X en $(0,0)$ y $(-3,0)$.

Para dibujar la función $g(x)=x+3$, basta con hacer una tabla de valores, ya que es una recta.



Vemos claramente en el dibujo que las funciones se cortan en los puntos: $(-3,0)$; $(-1,2)$ y $(1,4)$

b)

$$A_1=\int_{-3}^{-1}\left[(x^3+3x^2)-(x+3)\right]dx=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}=4u^2$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}\left[(x+3)-(x^3+3x^2)\right]dx=\int_{-1}^{1}(-x^3-3x^2+x+3)dx=\left[-\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}=4u^2$$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=Ln(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int 2\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$= x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=Ln(1+x^2);\ du=\dfrac{2x}{1+x^2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

De todas las primitivas de *f*(*x*)

$$F(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x+C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$F(0)=0\cdot Ln(1+0^2)-2\cdot 0+2\,arc\,tg\,0+C=0\Rightarrow C=0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x$

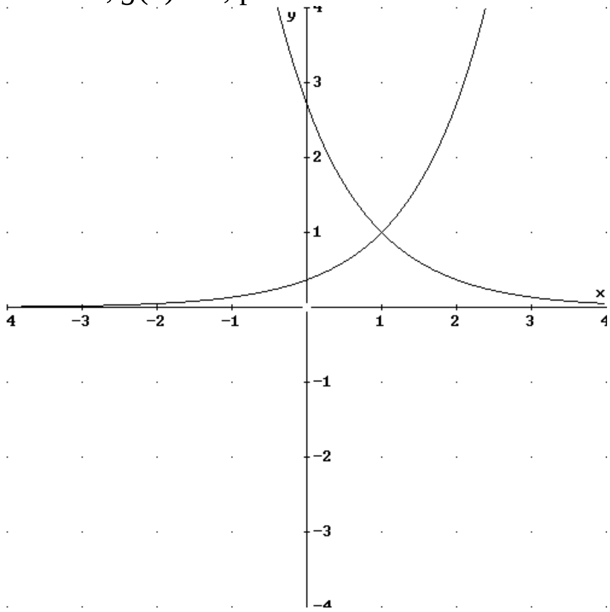
Considera las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{1-x}$$

a) Esboza las gráficas de *f* y de *g* y determina su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de $f(x) = e^{x-1}$, es exactamente igual que la de e^{x} pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).
Como $g(x) = e^{1-x} = e \cdot e^{-x}$, sabemos que la gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de e^{x} pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por *e*, está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si $x = 0$, $g(0) = e$, por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $e^{x-1} = e^{1-x} \Rightarrow x - 1 = 1 - x \Rightarrow x = 1$, con lo cual el punto de corte es $(1,1)$.

b) $A = \int_0^1 \left(e^{1-x} - e^{x-1}\right) dx = \left[-e^{1-x} - e^{x-1}\right]_0^1 = -1 - 1 + e + \dfrac{1}{e} = -2 + e + \dfrac{1}{e}\ u^2$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(x-3)^2$.
a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función $f(x)=x(x-3)^2=x(x^2-6x+9)=x^3-6x^2+9x$

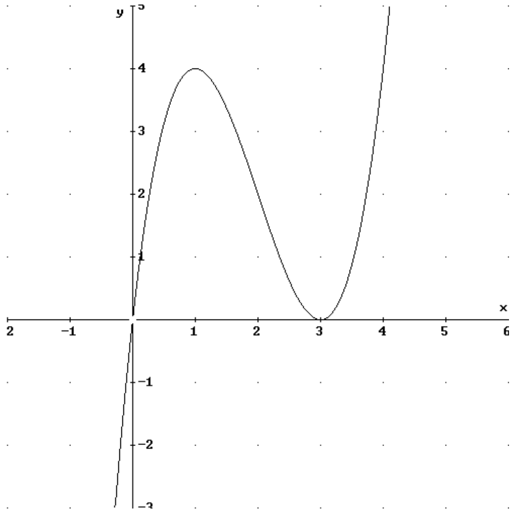
$$f'(x)=3x^2-12x+9=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$
Máximo (1,4) mínimo (3,0)

b) Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos los cortes con los ejes.

Puntos de corte (0, 0) y (3, 0)



c) $A=\int_0^3(x^3-6x^2+9x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}=\frac{27}{4}\ u^2$

Sea $I=\int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx$.

a) Expresa *I* haciendo el cambio de variable $t=e^{x}$.

b) Calcula *I*.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $$\left.\begin{array}{c} t=e^{x} \\ dt=e^{x}\,dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t} \end{array}\right\} I=\int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx=\int \frac{2}{2-t}\cdot\frac{dt}{t}$$

b)

$$I=\int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx=\int \frac{2}{2-t}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{A}{2-t}\,dt+\int \frac{B}{t}\,dt=-\ln(2-t)+\ln t=-\ln(2-e^{x})+\ln e^{x}+C=x-\ln(2-e^{x})+C$$

$$\frac{2}{2-t}\cdot\frac{1}{t}=\frac{A}{2-t}+\frac{B}{t}=\frac{A\cdot t+B(2-t)}{(2-t)\cdot t}\Rightarrow\begin{cases} t=0\Rightarrow 2=2B\Rightarrow B=1 \\ t=2\Rightarrow 2=2A\Rightarrow A=1 \end{cases}$$

Sea $f:(-2,0)\to\mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x} & si \quad -2<x\le -1\\ \dfrac{x^2-\beta}{2} & si \quad -1<x<0\end{cases}$

a) Determina α y β sabiendo que *f* es derivable.

b) Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable, primero tiene que ser continua en $x=-1$, luego:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-}\frac{\alpha}{x}&=\frac{\alpha}{-1}\\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-\beta}{2}&=\frac{1-\beta}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha}{-1}=\frac{1-\beta}{2}\Rightarrow 2\alpha=-1+\beta\Rightarrow 2\alpha-\beta=-1$$

Estudiamos la derivabilidad de *f(x)* en $x=-1$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\alpha}{x^2} & si \quad -2<x\le -1\\ x & si \quad -1<x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}f'(-1^-)&=-\alpha\\ f'(-1^+)&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha=1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior nos queda: $2\alpha-\beta=-1\Rightarrow 2-\beta=-1\Rightarrow \beta=3$

b)

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_{-2}^{-1}=-\ln 2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases}1+\alpha x & si \quad x<0\\ e^{-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Determina el valor de α sabiendo que *f* es derivable.
b) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

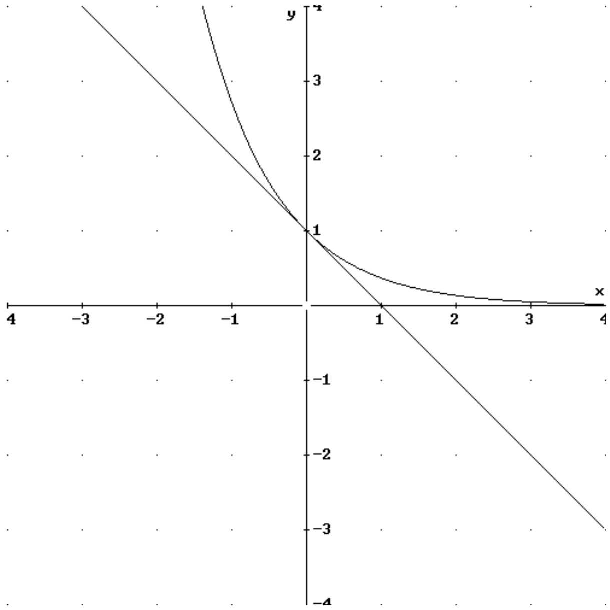
a) Estudiamos la derivabilidad de *f(x)* en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}\alpha & si \quad x<0\\ -e^{-x} & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\alpha \\ f'(0^+)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=-1$$

b) Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que $1-x$ es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto $(0,1)$ y $(-1,-2)$.

La gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de la exponencial e^{x} pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.
Un esbozo sería:



c)

$$\int_{-1}^{0}(1-x)\,dx+\int_{0}^{1}e^{-x}\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+1=\frac{5}{2}-\frac{1}{e}$$

Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + 4\,arc\,tg\,x + C$$

b) Calculamos primero la integral por partes

$$\int x\cdot\cos 2x\,dx = \frac{x\cdot sen\,2x}{2} - \frac{1}{2}\int sen\,2x\,dx = \frac{x\cdot sen\,2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x$$

$u = x;\ du = dx$

$dv = \cos 2x\,dx;\ v = \frac{1}{2}sen\,2x$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x\,dx = \left[\frac{x\cdot sen\,2x}{2} + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

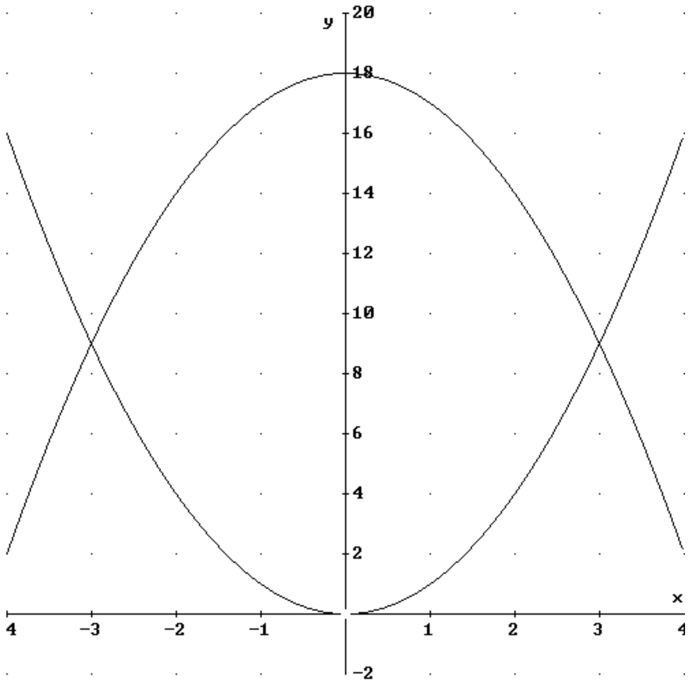
Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La gráfica de $f(x) = x^2$ es una parábola que tiene su vértice en (0,0) y las ramas hacia arriba.
Como $\beta > 0$, la gráfica de $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ es igual que la de $-x^2$ (como la de x^2 pero simétrica respecto el ej OX) pero desplazada hacia arriba $2\beta^2$ en OY. Aunque no lo piden las gráficas conjuntas son:



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $x^2 = -x^2 + 2\beta^2 \Rightarrow x = \beta$; $x = -\beta$.

$$72 = \int_{-\beta}^{\beta} \left(-x^2 + 2\beta^2 - x^2\right) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2\beta^2 x\right]_{-\beta}^{\beta} = -\frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 - \frac{2}{3}\beta^3 + 2\beta^3 = \frac{8}{3}\beta^3 \Rightarrow \beta = 3$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2$.
a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

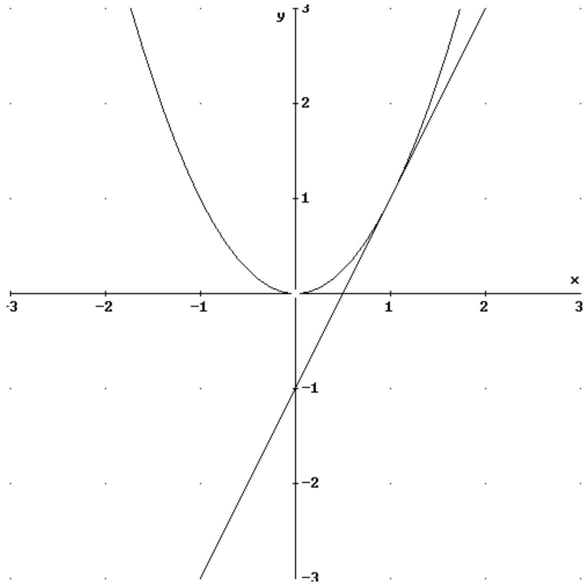
a) La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

- $f(1)=1$

- $f'(1)=2$

Luego, la recta tangente es: $y-1=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

b) Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es:



Las funciones se cortan en el punto (1, 1)

El área pedida es:

$$A=\int_0^1 x^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{3}-1+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\ u^2$$

Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x+1)$. (Ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

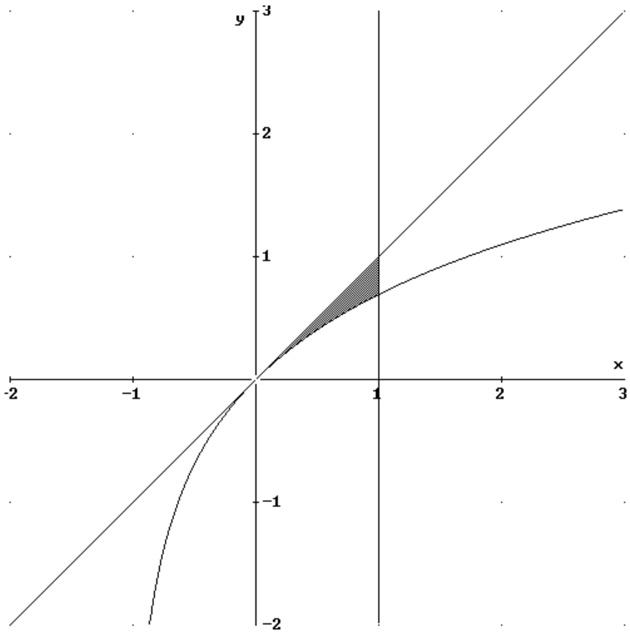
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=Ln1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^1(x-Ln(x+1))\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-xLn(x+1)+x-Ln(x+1)\right]_0^1=\frac{3}{2}-2Ln2\ u^2$$

$$\int Ln(x+1)\ dx=x\,Ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\,Ln(x+1)-\int 1-\frac{1}{x+1}dx=x\,Ln(x+1)-x+Ln(x+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=Ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x-1)}$

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Las raíces del denominador son: $x=0$; $x=1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x = 0 \Rightarrow 1 = A$

$x = 1 \Rightarrow 1 = C$

$x = 2 \Rightarrow 1 = A + 2B + C \Rightarrow B = -1$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2 - x)(x-1)} = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx + \int_{-2}^{-1} \frac{-1}{x-1}\, dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \left[\ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1} = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-2x}$
a) Justifica que la recta de ecuación $y=-2ex$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

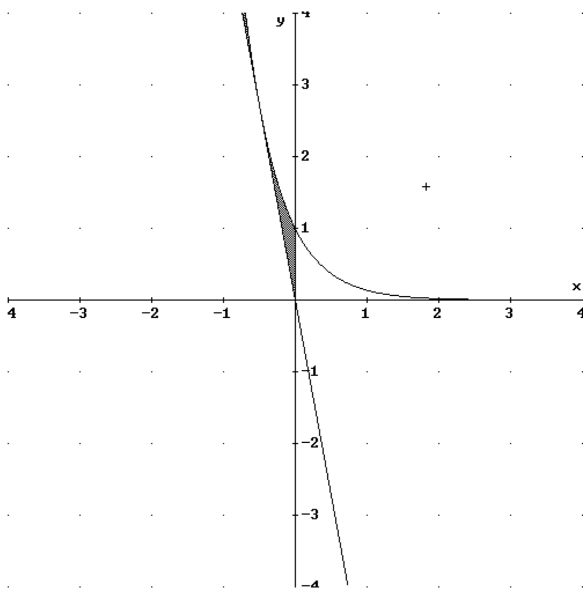
a) La recta tangente en $x=-\frac{1}{2}$ es $y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e$$

$$f'(x)=-2e^{-2x}\Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-e=-2e\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=-2ex$

b) Hacemos el dibujo



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(e^{-2x}+2ex\right)dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Se sabe que tiene un máximo local en $x=1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4}$.Calcula *a, b, c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \; ; \; f''(x)=6ax+2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$

- Punto de inflexión en $(0,1)\Rightarrow \begin{cases} Pasa\;\; por\;\; (0,1)\Rightarrow d=1 \\ f''(0)=0\Rightarrow b=0 \end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4}\Rightarrow \int_0^1 (ax^3-3ax+1)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{a}{4}-\frac{3a}{2}+1=\frac{9}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=-1$; $b=0$; $c=3$; $d=1$

Dadas las funciones $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x)=\sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$\sqrt{x}=\sqrt[3]{x}\Rightarrow x^3=x^2\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

$$A=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}\ u^2$$

Sea $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\ln\ x$ (ln x denota logaritmo neperiano).

a) Justifica que la recta de ecuación $y=\dfrac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

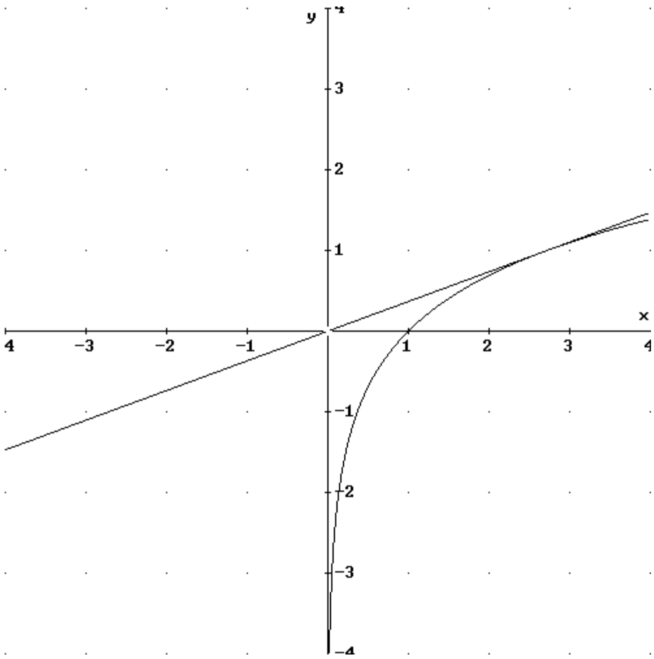
a) La recta tangente en $x=e$ es $y-g(e)=g'(e)\cdot(x-e)$

$$g(e)=Ln\,e=1$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow g'(e)=\frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=\dfrac{1}{e}\cdot(x-e)\Rightarrow y=\dfrac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)dx-\int_1^e(\ln x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^e-\left[x\ln x-x\right]_1^e=\frac{e}{2}-1u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3-4x \quad \text{y} \quad g(x)=3x-6$$

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$x^3-4x=3x-6 \Rightarrow x^3-7x+6=0 \Rightarrow x=2\ ;\ x=1\ ;\ x=-3$$

b)

$$A=\int_{-3}^{1}\left(x^3-7x+6\right)dx+\int_{1}^{2}\left(-x^3+7x-6\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^2}{2}-6x\right]_{1}^{2}=\frac{131}{4}\ u^2$$

Calcula $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot ln(x+1)\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(x+1);\ du = \dfrac{1}{x+1}\ dx \\ dv = x\,dx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$I = \int x \cdot ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x+1)}dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x - \ln(x+1)\right) + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

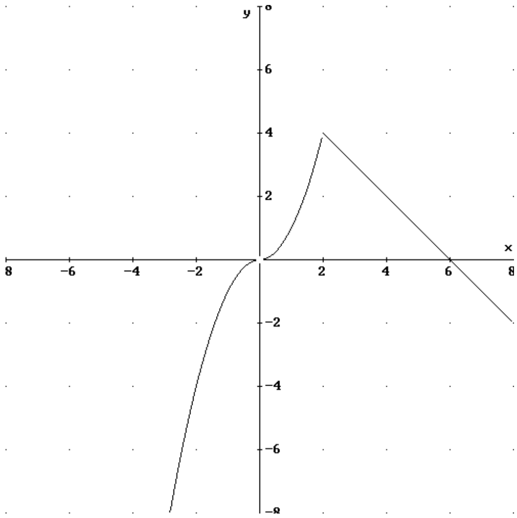
$$\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x|x| & si\ \ x\le 2 \\ 6-x & si\ \ x>2\end{cases}$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*.
c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $f(x)=\begin{cases} x|x| & si\ \ x\le 2 \\ 6-x & si\ \ x>2\end{cases}=\begin{cases} -x^2 & si\ \ x<0 \\ x^2 & si\ \ 0\le x\le 2 \\ 6-x & si\ \ x>2\end{cases}$



b) Por el dibujo vemos que la función es continua en $x=0$ y en $x=2$. Vamos a estudiar la derivabilidad en esos dos puntos.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & si\ \ x<0 \\ 2x & si\ \ 0<x<2 \\ -1 & si\ \ x>2\end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=0 \Rightarrow$ Derivable en $x=0$.

$\left.\begin{matrix} f'(2^-)=\ \ 4 \\ f'(2^+)=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+)=0 \Rightarrow$ No derivable en $x=2$.

c) Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$A=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^6 (6-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[6x-\frac{x^2}{2}\right]_2^6=\frac{8}{3}+(36-18)-(12-2)=\frac{32}{3}\ u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=a \quad (\text{con } a>0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones *f* y *g* es $\frac{4}{3}$. Calcula el valor de la constante *a*.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $a>0$, la gráfica de $g(x)=a$ es un recta paralela al eje OX y por encima de él. La gráfica de $f(x)$ es una parábola con vértice en (0,0) y ramas hacia arriba.

Como el área encerrada por el recinto es $\frac{4}{3}$, y sabemos que la recta $g(x)=a$ es mayor que cero, tenemos que

$$A=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=\left(a\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right)-\left(-a\sqrt{a}+\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right)=$$

$$=2a\sqrt{a}-2\frac{(\sqrt{a})^3}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 4a\sqrt{a}=4\Rightarrow a^3=1\Rightarrow a=1$$

Calcula $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x^2 \cdot ln\, x \; dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x ;\; du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = x^2\, dx ;\; v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}}$$

$$I = \int x^2 \cdot ln\, x\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\; x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\; x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

$$\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Considera las funciones $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{sen\,x}{\cos^3 x} \quad \text{y} \quad g(x)=x^3\ln x$$

a) Halla la primitiva de f que tima el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$.

(Se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

b) Calcula $\int g(x)dx$

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $t=\cos x \Rightarrow dt=-sen\,x\,dx$

$$F(x)=\int\frac{sen\,x}{\cos^3 x}\,dx=-\int\frac{dt}{t^3}=-\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{2}=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{3}}+C\Rightarrow 1=\frac{1}{\frac{1}{2}}+C\Rightarrow C=-1$$

Luego, $F(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}-1$

b)

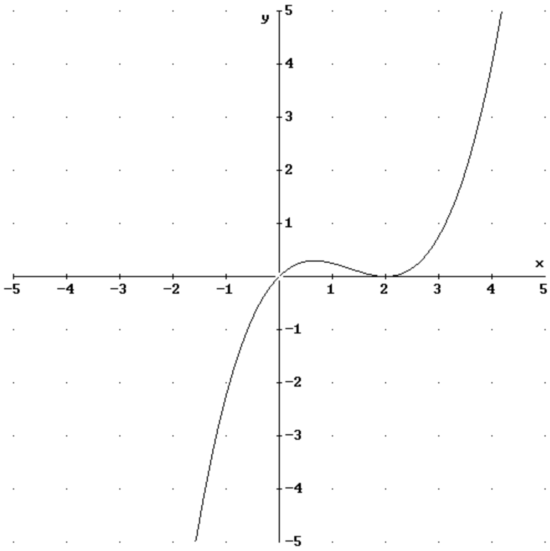
$$\int x^3\cdot\ln x\,dx=\frac{x^4\cdot\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4x}dx=\frac{x^4\cdot\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x^3dx;\ v=\frac{x^4}{4}\end{array}}$$

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.
a) Esboza la gráfica de *g*.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *g* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) La recta tangente en $x=2$ es $y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2)$

$g(2)=0$

$g'(x)=\frac{3x^2}{4}-2x+1\Rightarrow g'(2)=0$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=0\cdot(x-2)\Rightarrow y=0$

c)

$$A=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3-x^2+x\right)dx=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{3}\ u^2$$

Dada la función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2x+\left| x^2-1\right|$.

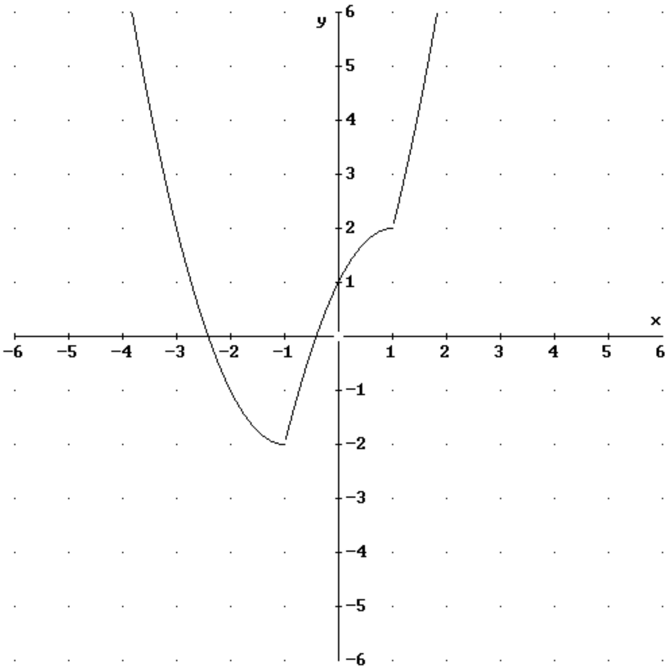
a) Esboza la gráfica de *g*.

c) Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $g(x)=2x+\left| x^2-1\right| = \begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+2x+1 & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2+2x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$



b)

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^1 (-x^2+2x+1)\,dx+\int_1^2 (x^2+2x-1)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-x\right]_1^2=6$$

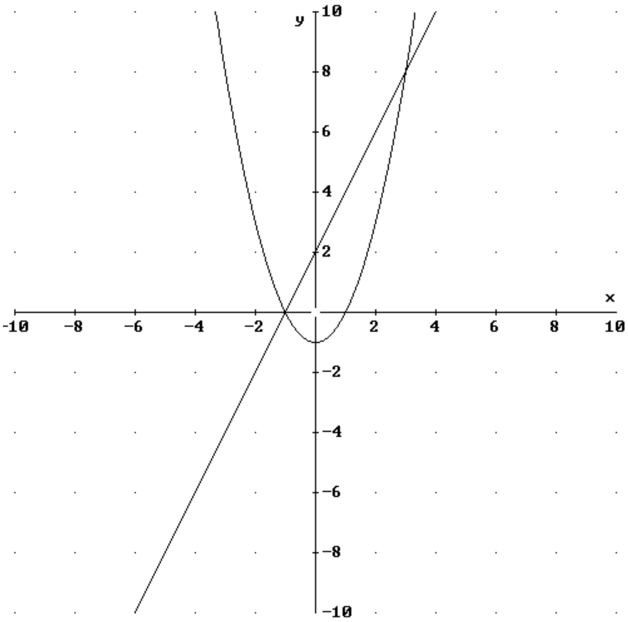
Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2-1\ ,\ g(x)=2x+2$$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) El área pedida es:

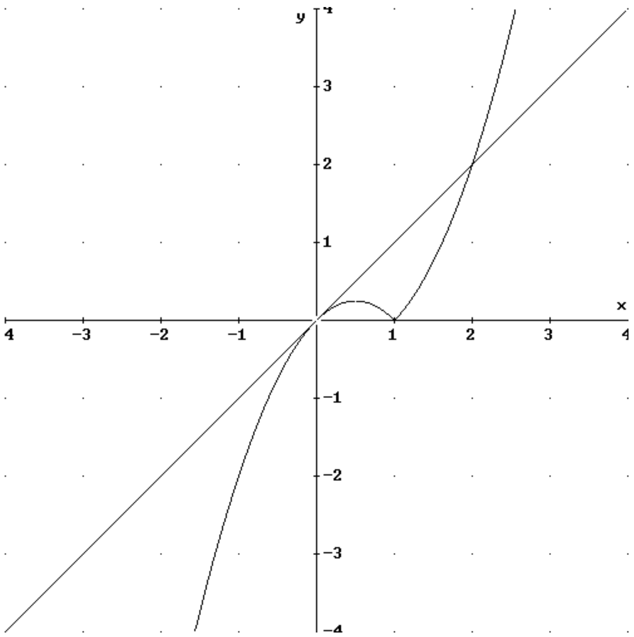
$$A=\int_{-1}^{3}(2x+2-x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-1|$.
a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Comprueba que la recta de ecuación $y=x$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la de dicha tangente.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases}-x^2+x & si \quad x<1\\ x^2-x & si \quad x\geq 1\end{cases}$$



b) La ecuación de la recta tangente será: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=0$
$f'(0)=1$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$

c)

$$Área=\int_0^1\left[(x)-(-x^2+x)\right]dx+\int_1^2\left[(x)-(x^2-x)\right]dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-1=1\,u^2$$

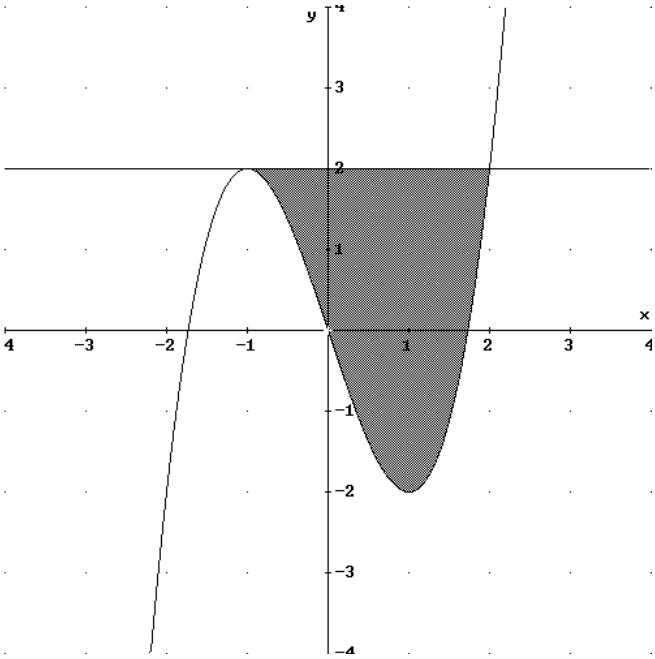
Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.
a) Halla la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow m = y'(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 2 = 0 \cdot (x+1) \Rightarrow y = 2$$

b)



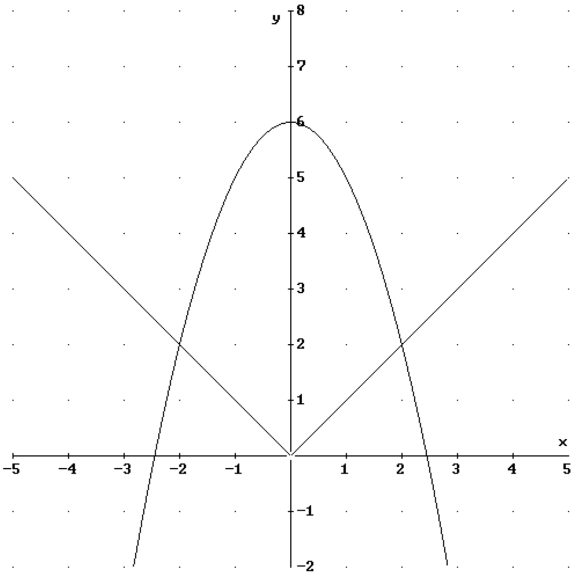
Por lo tanto, el área pedida será:

$$A = \int_{-1}^{2} \left(2 - x^3 + 3x\right) dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4}\ u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$
a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

- $A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\, dx = 2 \cdot \left[6x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{44}{3}\ u^2$

La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$
a) Determina las constantes m y n. Halla la ecuación de dicha recta tangente.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada: $f'(x) = 2mx + n$

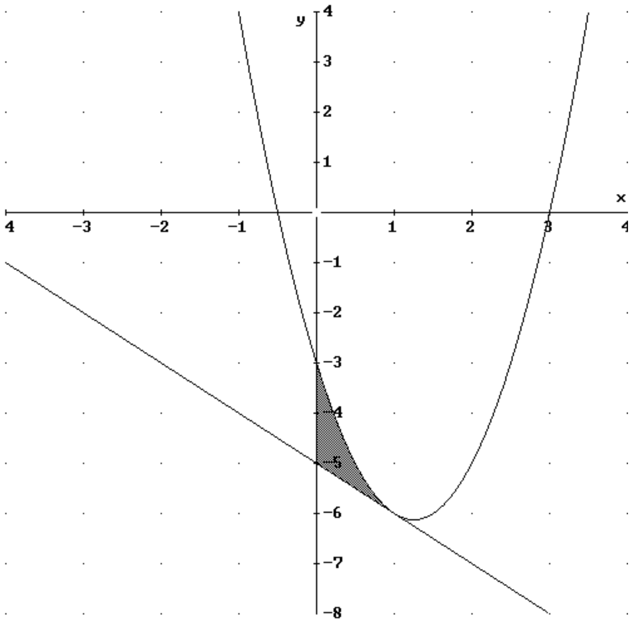
- Pasa por $(1,-6) \Rightarrow f(1) = -6 \Rightarrow m \cdot 1^2 + n \cdot 1 - 3 = -6$

- Tangente paralela a $y = -x \Rightarrow f'(1) = -1 \Rightarrow 2m \cdot 1 + n = -1$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $m = 2$; $n = -5 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

La ecuación de la tangente será: $y + 6 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x + y + 5 = 0$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^1 \left((2x^2 - 5x - 3) - (-x - 5) \right) dx = \int_0^1 \left(2x^2 - 4x + 2) \right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \, u^2$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=1+ln(x)$, siendo *ln* la función logaritmo neperiano.

a) Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta tangente obtenida en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

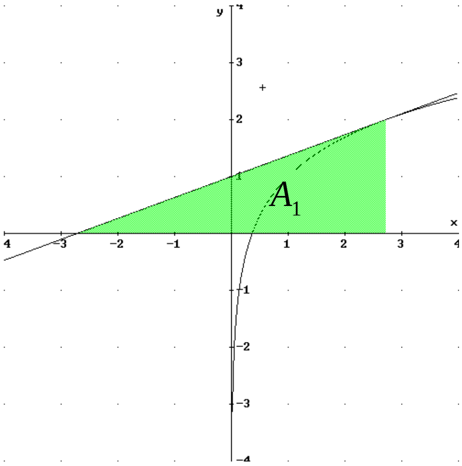
a) La recta tangente en $x=e$ es $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$

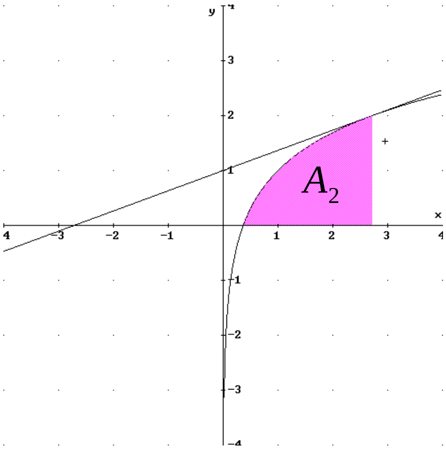
$$f(e)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{e}\Rightarrow f'(e)=\frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=\frac{1}{e}\cdot(x-e)\Rightarrow y=1+\frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es: $A=A_1-A_2$





$$\int 1+ln(x)\ dx=x(1+ln(x))-\int\frac{x}{x}dx=x+\ x\,ln(x)-x=x\ln(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1+\ln(x);\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$A_1=\int_{-e}^{e}\left(1+\frac{x}{e}\right)dx=\left[x-\frac{x^2}{2e}\right]_{-e}^{e}=2e\ u^2$$

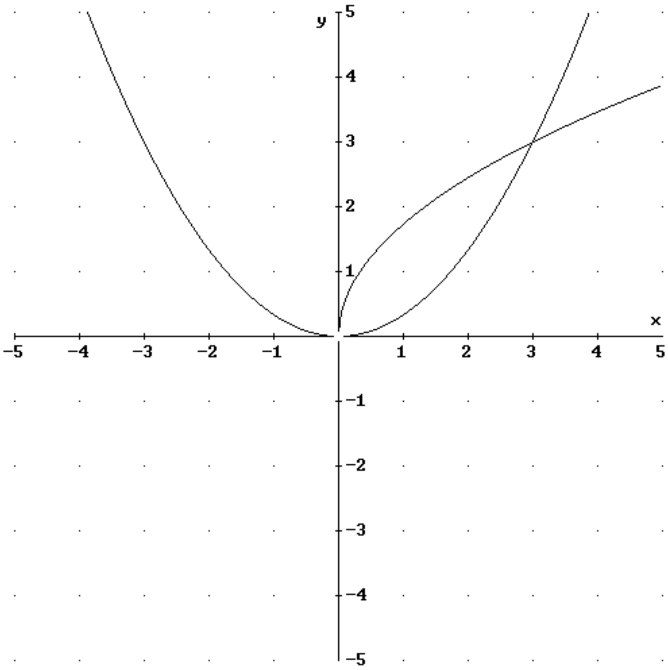
$$A_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(1+\ln(x))\,dx=\left[x\ln(x)\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=\frac{e^2+1}{e}\ u^2$$

$$A=A_1-A_2=2e-\frac{e^2+1}{e}=\frac{e^2-1}{e}u^2$$

Se consideran las funciones $f : [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\sqrt{3x}$ y $g(x)=\frac{1}{3}x^2$
a) Haz un esbozo de sus gráficas
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



b) En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(3,3)$. Luego, el área que nos piden es:

$$A=\int_0^3\left[\sqrt{3x}-\frac{1}{3}x^2\right]dx=\left[\frac{2\sqrt{3}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{9}\right]_0^3=3\ u^2$$

a) Calcula $\int x \cdot sen\, x\ dx$

b) Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

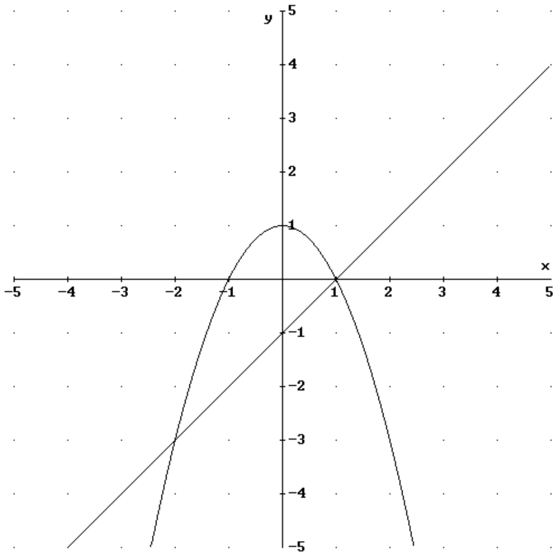
a) Calculamos la integral por partes

$$\int x \cdot sen\, x\, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x\, dx = -x \cdot \cos x + sen\, x + C$$

$u = x;\ du = dx$

$dv = sen\, x\, dx;\ v = -\cos x$

b)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -2$$

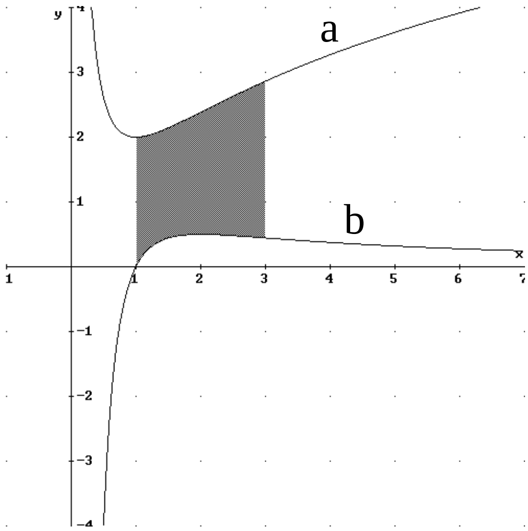
El área que nos piden es:

$$A = \int_{-2}^{1} \left[(-x^2 + 1) - (x - 1) \right] dx = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - x + 2 \right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}\ u^2$$

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{2}{x}+2\ln(x)$$

y a la de su derivada $f':(0,+\infty)\to\mathbb{R}$



a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de *f* y cuál la de *f* '.
b) Calcula el área de la región sombreada.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada.

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x^2}$$

Vemos que esta función corta al eje X en el punto (1,0). Luego la gráfica de *f* es la (a) y la gráfica de *f* ' es la (b)

b) Calculamos la integral por partes: $\int \ln x\, dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

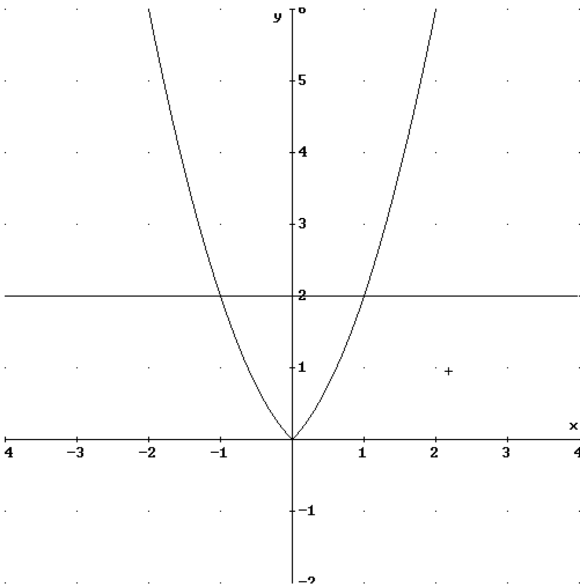
El área que nos piden es:

$$A=\int_1^3\left[\frac{2}{x}+2\ln(x)+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}\right]dx=\int_1^3\left[2\ln(x)+\frac{2}{x^2}\right]dx=\left[2x\ln x-2x-\frac{2}{x}\right]_1^3=\frac{18\ln 3-8}{3}\ u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=x^2+|x|$; $g(x)=2$
a) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza dichas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



$$f(x)=x^2+|x|=\begin{cases} x^2-x & si \quad x<0 \\ x^2+x & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-x \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2 \ ; \ x=-1. \text{ Sólo } x=-1 \text{ está en el intervalo}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+x \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1 \ ; \ x=-2. \text{ Sólo } x=1 \text{ está en el intervalo}$$

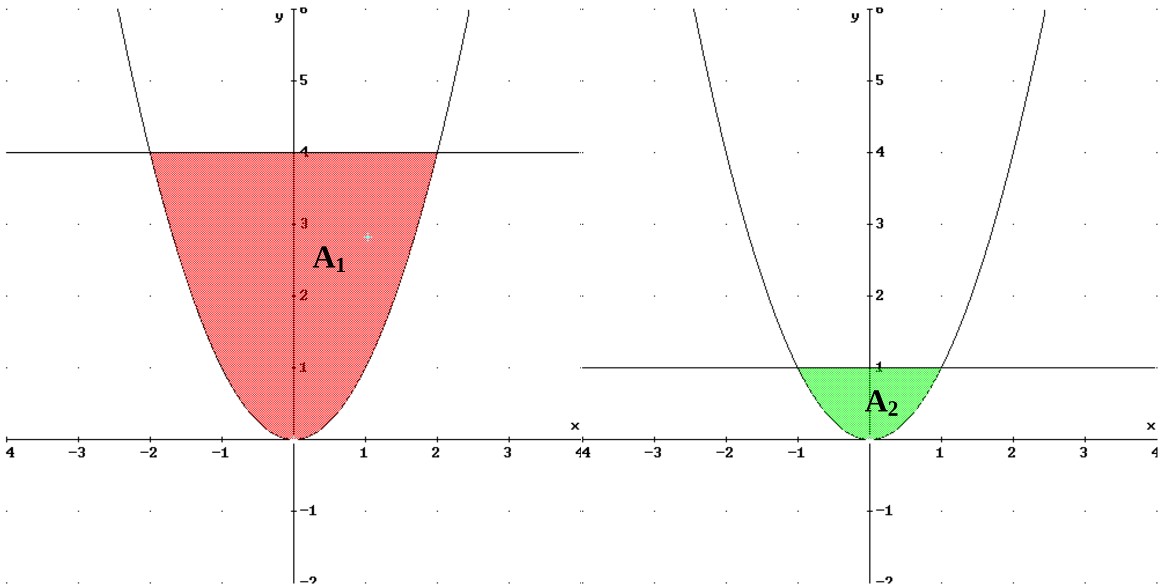
Luego, los puntos de corte son: $(-1,2)$ y $(1,2)$

b)

$$A=2\int_{-1}^{0}(2-x^2+x)\,dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=2\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\,u^2$$

Calcula un número positivo *a*, menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \ ; \ x = -2$$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\ dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} \ ; \ x = -\sqrt{a}$$

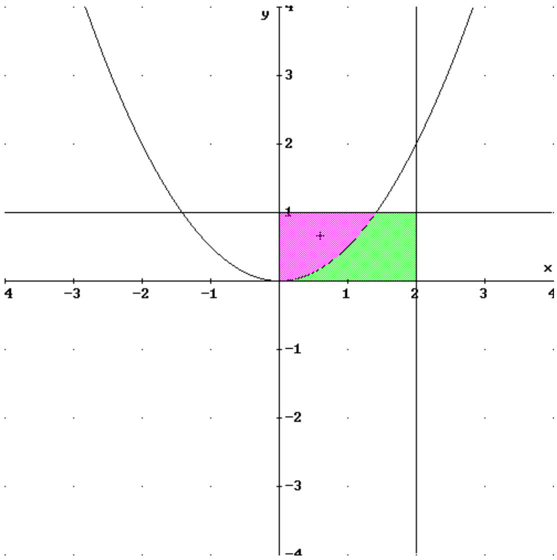
$$A_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\ dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$$A = A_1 - A_2 \Rightarrow \frac{28}{3} = \frac{32}{3} - \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$$

La curva $y=\frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,1)$ y $D=(0,1)$ en dos recintos.
a) Dibuja dichos recintos.
b) Halla el área de cada uno de ellos
MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

Calculamos el punto de corte de la parábola con la recta $y=1$

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=+\sqrt{2}$$

El área del primer recinto es:

$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}} (1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=\left[x-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2=2-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{6-2\sqrt{2}}{3}u^2$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$.

Halla la primitiva *F* de *f* que cumple $F(0)=3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t=\dfrac{3}{2}x^2$).

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\dfrac{3}{2}x^2$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$t=\frac{3}{2}x^2 \Rightarrow dt=3x\,dx \Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{3}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$F(x)=\int\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}\,dx=\int\frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{4-9\frac{4t^2}{9}}}=\int\frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{6}arc\,sen\,t+C=$$

$$=\frac{1}{6}arc\,sen\frac{3x^2}{2}+C$$

Como $F(0)=3\Rightarrow 3=\dfrac{1}{6}arcsen\,0+C\Rightarrow C=3$

Por lo tanto, $F(x)=\dfrac{1}{6}arc\,sen\dfrac{3x^2}{2}+3$

Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\, dx$.

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $\sqrt{x} = t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x = \pi^2 \Rightarrow \sqrt{\pi^2} = t \Rightarrow t = \pi$

Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = t \Rightarrow t = 0$

Vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2t\, dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

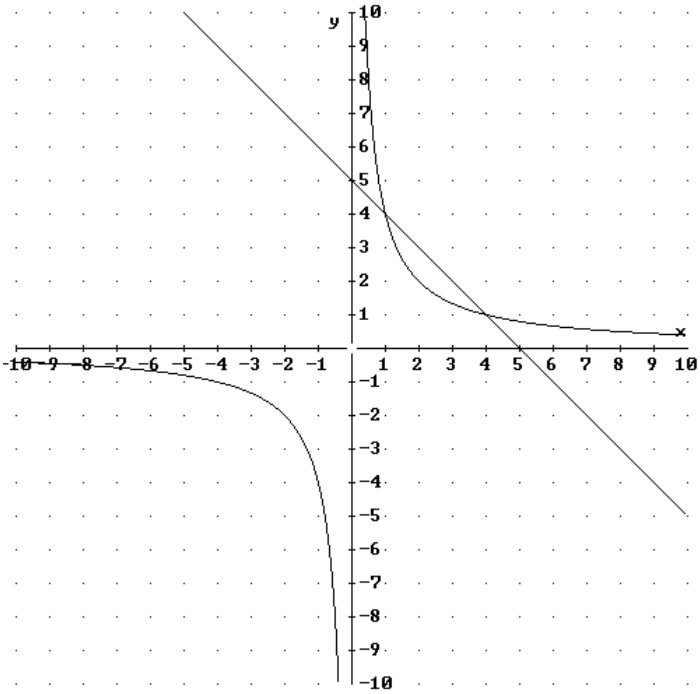
$$\int_0^{\pi} 2t \cdot sen\, t\, dt = \left[-2t \cos t + 2\int \cos t\, dt \right] = \left[-2t \cos t + 2\, sen\, t \right]_0^{\pi} = \left(-2\pi \cos \pi + 2 sen\, \pi \right) - (2 sen\, 0) = 2\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 2t;\ du = 2\ dt \\ dv = sen\, t\, dt;\ v = -\cos t \end{array}}$$

Considera la función *f* dada por $f(x)=5-x$ y la función *g* definida como $g(x)=\dfrac{4}{x}$ para $x\neq 0$.
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=5-x$ es una recta, luego podemos dibujarla fácilmente con una tabla de valores. La función $g(x)=\dfrac{4}{x}$ es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos $(1,4)$ y $(4,1)$

b) El área de la región pedida es:

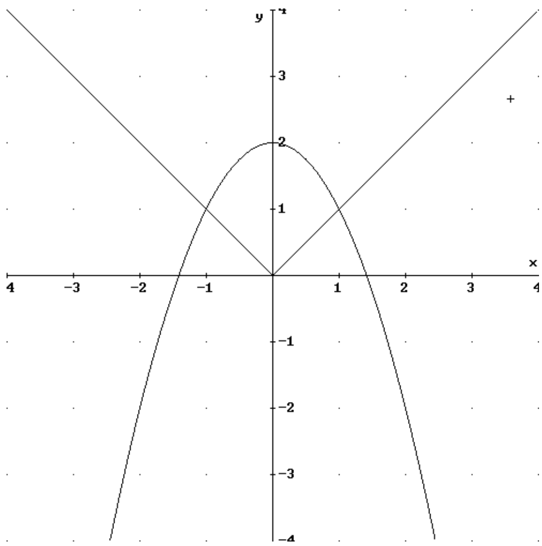
$$A=\int_1^4 \left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4=\left(20-8-4\ln 4\right)-\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}-4\ln 4\ u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = 2 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0,2)$ y corta al eje X en los puntos $\left(\sqrt{2},0\right)$ y $\left(-\sqrt{2},0\right)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3er cuadrante.



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left[(2 - x^2) - x \right] dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3} \ u^2$$

Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
a) Comprueba que la recta de ecuación $y=-e\,x+1+e^2$ es la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

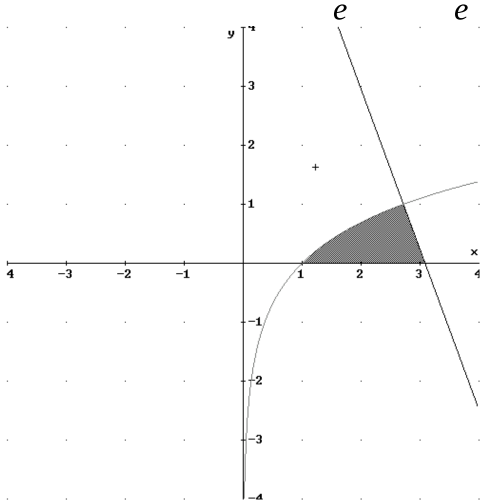
a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

La ecuación de la recta normal es:

$$y-f(e)=-\frac{1}{f'(e)}(x-e)\Rightarrow y-\ln e=-\frac{1}{\frac{1}{e}}(x-e)\Rightarrow y-1=-e(x-e)\Rightarrow y=-ex+e^2+1$$

b) Calculamos el punto de corte de la normal con el eje X.

$$0=-ex+e^2+1\Rightarrow x=\frac{e^2+1}{e}=e+\frac{1}{e}$$



El área que nos piden es:

$$A=\int_1^e(\ln x)\,dx+\int_e^{e+\frac{1}{e}}(1+e^2-ex)\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e+\left[x+e^2x-\frac{ex^2}{2}\right]_e^{e+\frac{1}{e}}=$$

$$=\left[(e-e)-(-1)\right]+\left[\left(e+\frac{1}{e}+e^2\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{e\left(e+\frac{1}{e}\right)^2}{2}\right)-\left(e+e^3-\frac{e^3}{2}\right)\right]=1+\frac{1}{2e}\ u^2$$

Sea $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0)=0$. (ln denota logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$F(x)=\int \ln(x+2)\ dx = x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}dx = x\ln(x+2)-\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx = x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+2);\ du=\dfrac{1}{x+2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Calculamos el valor de la constante *C*.

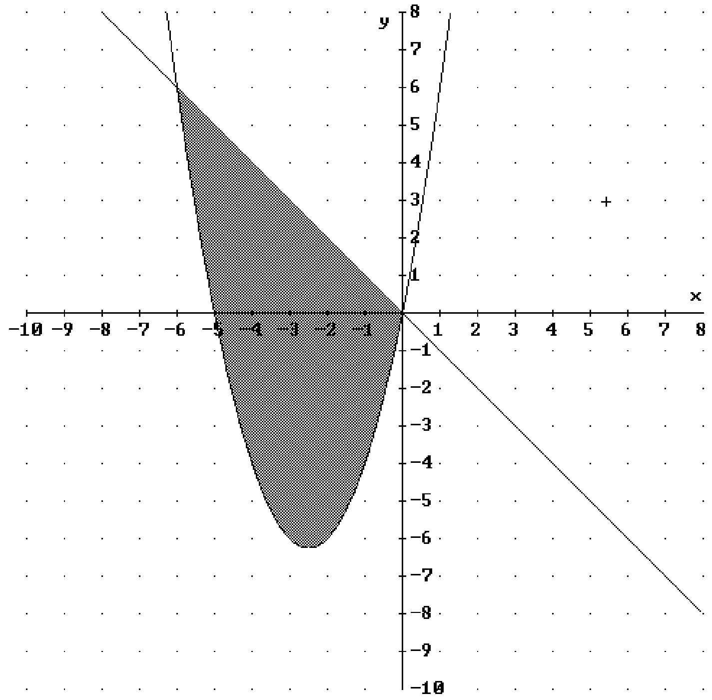
$$F(0)=0\Rightarrow 0=0\cdot\ln(0+2)-0+2Ln(0+2)+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)-2\ln 2$

Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 + ax \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + (1+a)x = 0 \Rightarrow x = 0 \;;\; x = -1-a .$$

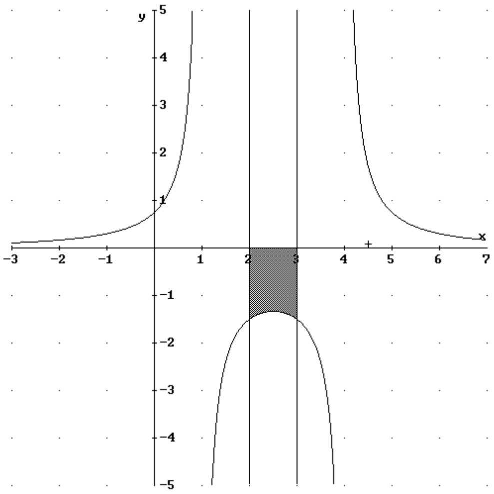
$$36 = \int_{-1-a}^{0} (-x - x^2 - ax)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_{-1-a}^{0} = -\left[-\frac{(-1-a)^2}{2} - \frac{(-1-a)^3}{3} - \frac{a(-1-a)^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{6} \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 216 \Rightarrow a^3 + 3a^2 + 3a - 215 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Dada la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$ para $x\neq 1$ y $x\neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas, y las rectas $x=2$, $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de la gráfica.



Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=4$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=1 \Rightarrow 3=-3A \Rightarrow A=-1$

$x=4 \Rightarrow 3=3B \Rightarrow B=1$

Con lo cual:

$$\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx=\int \frac{-1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x-4}\,dx=-\ln(x-1)+\ln(x-4)$$

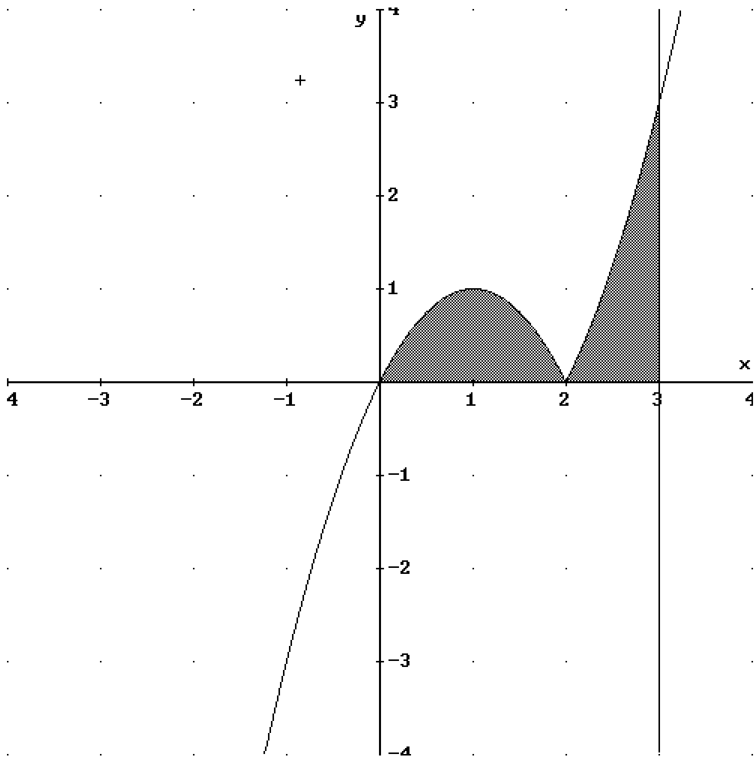
$$A=-\int_2^3 \frac{3}{x^2-5x+4}=-\left[-\ln|x-1|+\ln|x-4|\right]_2^3=-\left(-\ln 2+\ln 1\right)+\left(-\ln 1+\ln 2\right)=2\ln 2\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\,|\,2-x\,|$.
a) Esboza su gráfica.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=x\,|\,2-x\,|=\begin{cases} 2x-x^2 & si \;\; x<2 \\ x^2-2x & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$.

Hacemos el dibujo de las dos parábolas en sus intervalos.



b) Según vemos en la figura el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2(-x^2+2x)\;dx+\int_2^3(x^2-2x)\;dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^3=$$

$$=\left[\left(-\frac{8}{3}+4\right)-0\right]+\left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=\frac{8}{3}\;u^2$$

Sea la función *f* dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 0$. Determina una primitiva *F* de *f* tal que $F(1)=1$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx=\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=0\Rightarrow 1=A$$

$$x=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2+x}\,dx=\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{1}{(x+1)}\,dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$

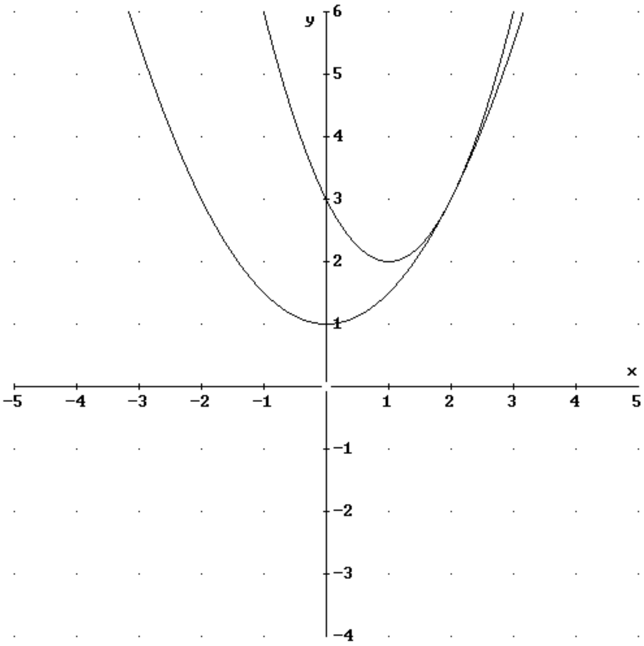
Como $F(1)=1\Rightarrow 1=\ln|1|-\ln|1+1|+C\Rightarrow C=1+\ln 2$

Luego la primitiva que nos piden es: $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+1+\ln 2$

Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*, y halla su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos parábolas.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

$$x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 (x^2 - 2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)\, dx = \int_0^2 (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_0^2 = \left(\frac{8}{6} - 4 + 4\right) = \frac{8}{6}\ u^2$$

Calcula $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\,dx$.
a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
b) Determina I.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t^2 = e^{-x}$, vamos a calcular cuanto vale dx:

$$2t\,dt = -e^{-x}\,dx \Rightarrow dx = -\frac{2t\,dt}{e^{-x}} = -\frac{2t\,dt}{t^2} = -\frac{2\,dt}{t}$$

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\,dx = \int \frac{5}{1+t}\left(-\frac{2}{t}\right)dt = \int \frac{-10}{t(1+t)}\,dt$$

b) Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-10}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A, y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$t = 0 \Rightarrow -10 = A \Rightarrow A = -10$
$t = -1 \Rightarrow -10 = -B \Rightarrow B = 10$

Con lo cual:

$$\int \frac{-10}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{-10}{t}\,dt + \int \frac{10}{1+t}\,dt = -10\ln t + 10\ln(1+t) = -10\ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| + 10\ln\left|1+\sqrt{e^{-x}}\right| + C$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

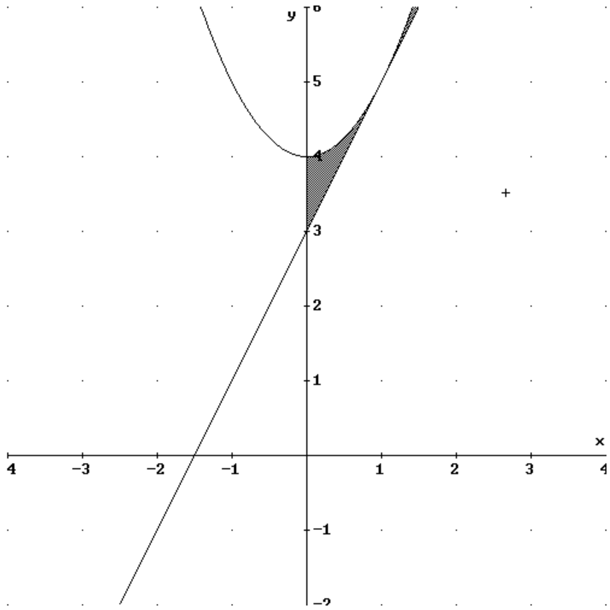
a) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$.

$f(1)=1+4=5$

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x+3$

b) Hacemos el dibujo del recinto.



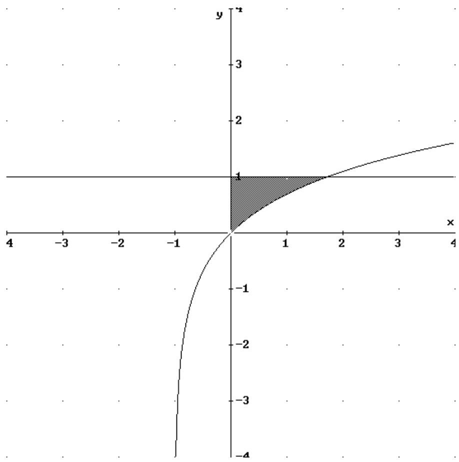
El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^1(x^2+4-2x-3)\,dx=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{3}\ u^2$$

Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OY y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.
b) Halla el área del recinto anterior
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ y=\ln(x+1)\end{array}\right\}\Rightarrow \ln(x+1)=1\Rightarrow e^1=x+1\Rightarrow x=e-1\Rightarrow A=(e-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\ln(x+1)\end{array}\right\}\Rightarrow y=\ln 1=0\Rightarrow B=(0,0)$$

b) Vamos a calcular la integral $I_1=\int ln(x+1)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\,dx \\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

$$I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-I_2$$

La integral $I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx$ es una integral racional

$$I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx=\int\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)dx=x-ln(x+1)$$

Sustituyendo, nos queda: $I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-x+ln(x+1)$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$A=\int_0^{e-1}\left(1-ln(x+1)\right)dx=\left[x-x\cdot ln(x+1)+x-\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=e-2\ u^2$$

Halla: $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=e^{x}$

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$e^{x}=t \Rightarrow e^{x}dx=dt$

$$\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx=\int \frac{1}{(t^{2}-1)(t+1)}\,dt=\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^{2}}=\frac{A(t+1)^{2}+B(t-1)(t+1)+C(t-1)}{(t-1)(t+1)^{2}}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B y C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \Rightarrow 1=-2C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$t=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{4}-B+\frac{1}{2} \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt=\int \frac{\frac{1}{4}}{t-1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{4}}{t+1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^{2}}\,dt=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(e^{x}-1)-\frac{1}{4}\ln(e^{x}+1)+\frac{1}{2(e^{x}+1)}+C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\dfrac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+C$$

$$f(x)=\int(\ln x+C)\,dx=x\ln x-x+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(1,1)\Rightarrow 1=1\cdot\ln 1-1+C+D\Rightarrow D=2$

- Tangente horizontal $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=\ln 1+C\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\ln x-x+2$

Calcula $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\int x\,dx+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$; $x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 2=3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$
$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)}\,dx+\int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Calcula el valor de $b>0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y=\sqrt{x}$ y la recta $y=bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{x}=bx \Rightarrow x=b^2x^2 \Rightarrow b^2x^2-x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=\frac{1}{b^2}$$

$$A=\frac{4}{3}=\int_0^{\frac{1}{b^2}}\left(\sqrt{x}-bx\right)dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{bx^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{b^2}}=\frac{2\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{b\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{2}=\frac{2}{3b^3}-\frac{1}{2b^3}=\frac{1}{6b^3}\Rightarrow b^3=\frac{1}{8}\Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(1-\ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-\ln x;\ du=-\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}}$$

$$I=\int x(1-\ln x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot(1-\ln x)-\int -\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+C=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}\ln x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,1)$.

$$F(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+C\Rightarrow 1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 1+C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}\ln x+\dfrac{1}{4}$

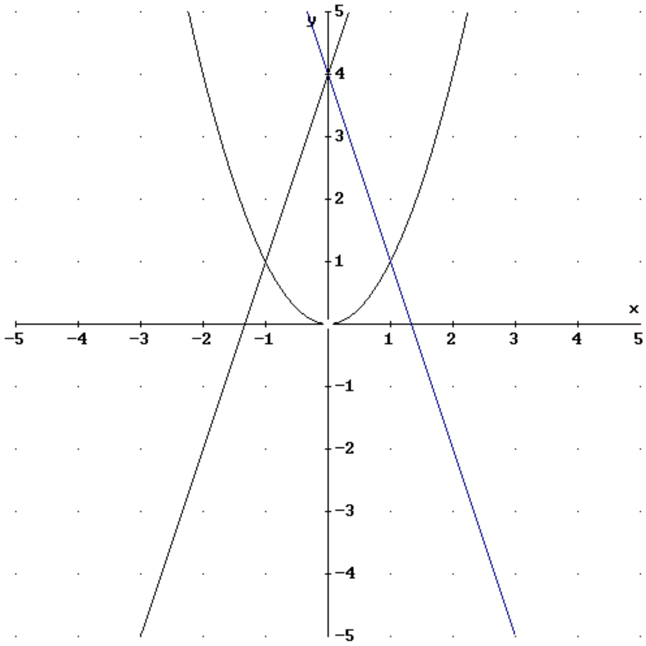
Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=4-3|x|$ y $g(x)=x^2$.
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*. Determina sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f*.

$$f(x)=4-3|x|=\begin{cases}4+3x & si \quad x<0\\ 4-3x & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Las dos funciones son fáciles de representar. Su dibujo es:



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

Si $x<0$, entonces: $x^2=4+3x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=4$; $x=-1$. Sólo nos interesa la solución negativa $x=-1$.

Si $x>0$, entonces: $x^2=4-3x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x=1$; $x=-4$. Sólo nos interesa la solución positiva $x=1$.

Luego, los puntos de corte son: $(-1,1)$ y $(1,1)$.

b) El área de la región pedida es:

$$A=2\int_0^1(4-3x-x^2)\,dx=2\cdot\left[4-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\cdot\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}\,u^2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos primero la integral por partes

$$\int x\cdot\cos x\, dx = x\cdot sen\, x - \int sen\, x\, dx = x\cdot sen\, x + \cos x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ \ du = dx \\ dv = \cos x\, dx;\ v = sen\, x \end{array}}$$

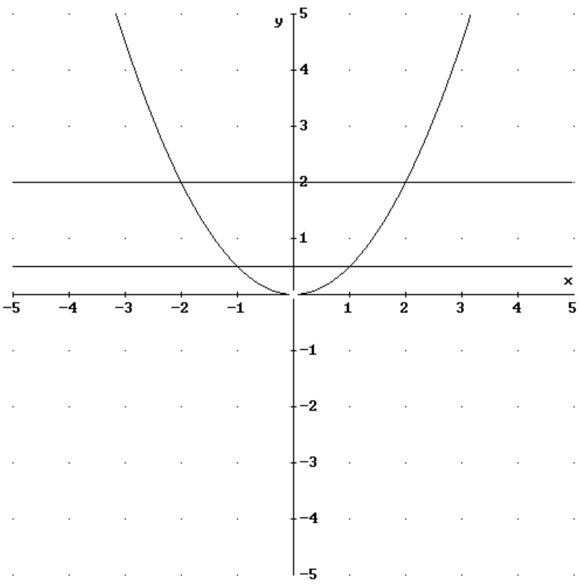
Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\, dx = \left[x\cdot sen\, x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Calcula un número positivo *a*, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y=a$ e $y=2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=2$.

$$Área = 2\cdot\int_0^2 (2-\frac{1}{2}x^2)\,dx = 2\cdot\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2\cdot\left[4-\frac{8}{6}\right]=\frac{16}{3}\ u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=a$.

$$x^2=2a \Rightarrow x=\pm\sqrt{2a}$$

$$A=2\cdot\int_0^{\sqrt{2a}}(a-\frac{1}{2}x^2)\,dx = 2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2a}} = 2\cdot\left[a\sqrt{2a}-\frac{2a\sqrt{2a}}{6}\right]=\frac{4}{3}a\sqrt{2a}$$

Se tiene que cumplir que: $\frac{16}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=\frac{14}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{4a\sqrt{2a}}{3}\Rightarrow 1=2a\sqrt{2a}\Rightarrow 1=8a^3\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$
a) Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para ver que las rectas son tangentes a la parábola tenemos que comprobar que sólo se cortan en un punto.
Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=-x+1$

$$-2x^2+3x-1=-x+1 \Rightarrow 2x^2-4x+2=0 \Rightarrow x=1$$

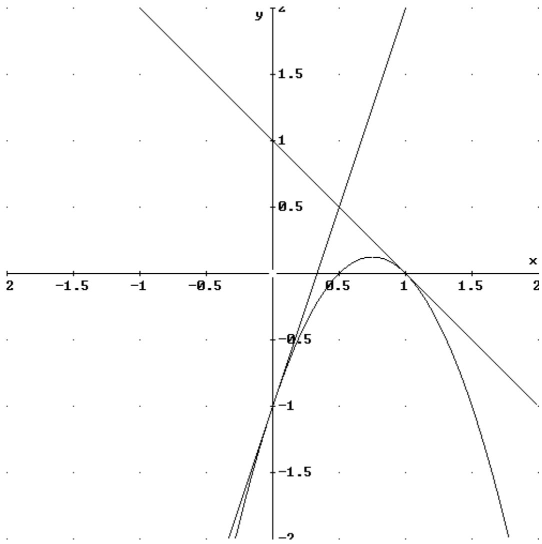
Luego es tangente.

Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=3x-1$

$$-2x^2+3x-1=3x-1 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0$$

Luego es tangente.

b) Hacemos un dibujo para ver más claramente el área que nos piden.



$$Área=\int_0^{\frac{1}{2}}(3x-1+2x^2-3x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x+1+2x^2-3x+1)\,dx=$$

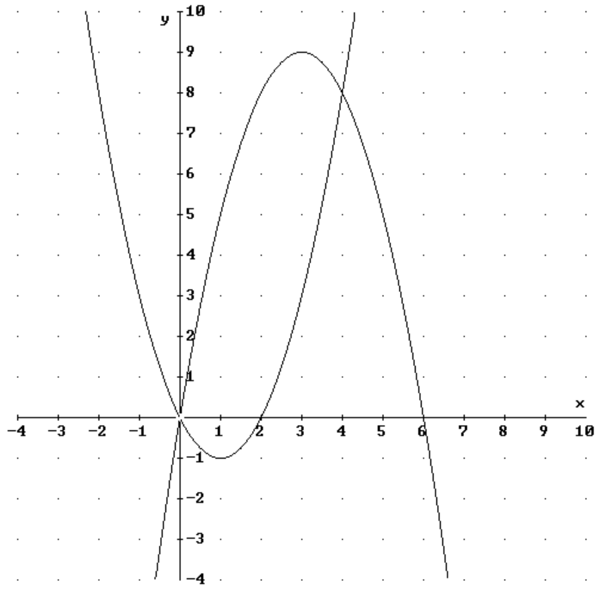
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^2)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-4x+2)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1}{12}\right]+\left[\frac{2}{3}-2+2\right]-\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+1\right]=\frac{1}{6}\ u^2$$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son fáciles de dibujar, ya que son dos parábolas. Basta con hacer una tabla de valores calculando previamente el vértice de cada una de ellas.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 \left[8x - 2x^2\right] dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = \left[64 - \frac{128}{3}\right] = \frac{64}{3} \ u^2$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -2$.
b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

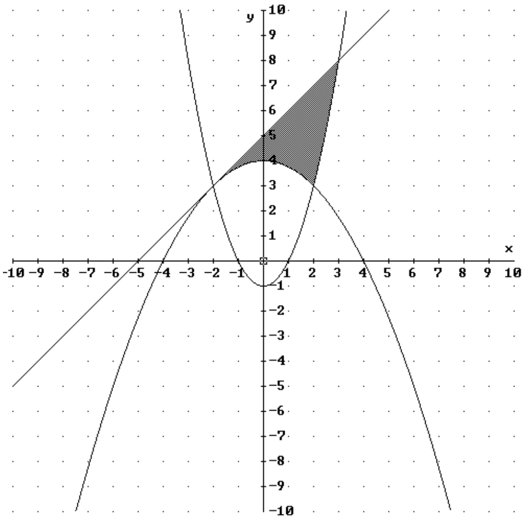
a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x+2)$

$$f(-2) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 3$$

$$f'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'(-2) = 1$$

Luego, $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x+2) \Rightarrow y - 3 = 1 \cdot (x+2) \Rightarrow y = x + 5$

b) Dibujamos las dos parábolas y la recta tangente.



Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-2}^{2} \left[(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4) \right] dx + \int_{2}^{3} \left[(x+5) - (x^2 - 1) \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^2}{4} + x + 1) \right] dx + \int_{2}^{3} \left[-x^2 + x + 6 \right] dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{2}^{3} = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2} \ u^2$$

Sea *f* una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de *f* tal que , $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

a) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx$

b) $\int_{2}^{3} \left(5f(x)-7\right)dx$

c) $\int_{2}^{3} \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_2^3 = F(3)-F(2) = 2-1=1$

b) $\int_{2}^{3} \left(5f(x)-7\right)dx = 5\int_{2}^{3} f(x)\,dx - 7\int_{2}^{3} dx = 5\cdot 1 - 7\cdot\left[x\right]_2^3 = 5-7(3-2) = -2$

c) $\int_{2}^{3} \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx = \left[\frac{\left(F(x)\right)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{\left(F(3)\right)^3}{3} - \frac{\left(F(2)\right)^3}{3} = \frac{8}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Sea la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 1$.

a) Halla una primitiva de *f*.

b) Calcula el valor de *k* para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de *f* en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las raíces del denominador son: $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 2=2A \Rightarrow A=1$$

$$x=-1 \Rightarrow 2=-2B \Rightarrow B=-1$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{-1}{x+1}\,dx=\ln(x-1)-\ln(x+1)+C$

b)

$$A=\ln 2=\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx=\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^k=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3$$

Resolvemos la ecuación logarítmica:

$$\ln 2=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3 \Rightarrow \ln\frac{2}{3}=\ln\frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{k-1}{k+1} \Rightarrow 2k+2=3k-3 \Rightarrow k=5$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos\ x$, respectivamente.

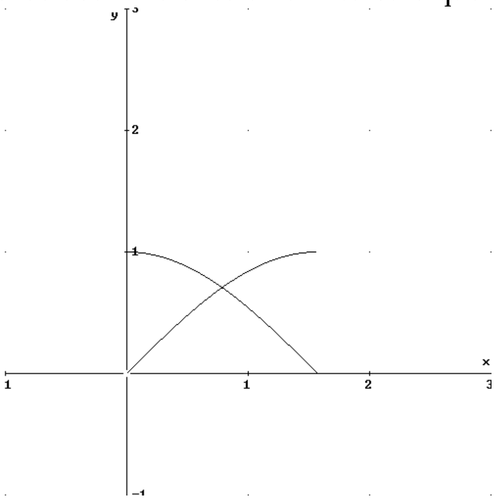
a) Realiza un esbozo de las gráficas de *f* y *g* en el intervalo $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

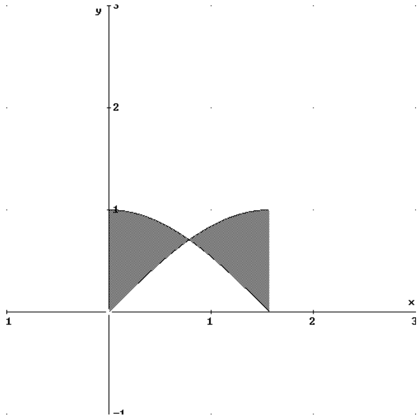
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones en el intervalo que nos dan:



b) El área que nos piden son los dos recintos coloreados:



Calculamos el área

$$Área = A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - sen\, x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x - \cos x)\ dx = \left[sen\, x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - sen\, x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right] - \left[sen\, 0 + \cos 0\right] + \left[-\cos\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2}\right] - \left[-\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\ u^2$$

Sea f la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cos x$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2\cos x\,dx=x^2 sen\,x-2\int x\cdot sen\,x\,dx=x^2 sen\,x-2\left[-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx\right]=$$
$$=x^2 sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

$$F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(\pi,0)\Rightarrow F(\pi)=0$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C.

$$0=\pi^2\cdot sen\,\pi+2\pi\cdot\cos\pi-2sen\,\pi+C\ \Rightarrow 0=-2\pi+C\Rightarrow\ C=2\pi$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+2\pi$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3-4x$
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
c) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

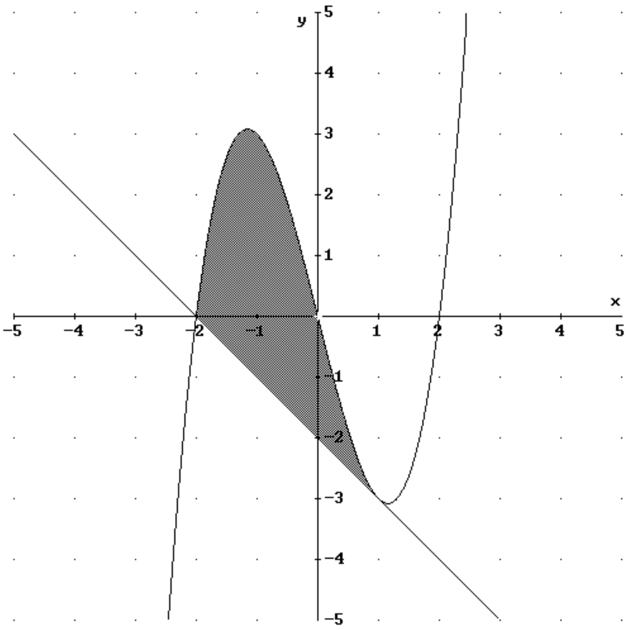
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=-3$$
$$f'(x)=3x^2-4\Rightarrow f'(1)=3(1)^2-4=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x-2$

b) Hacemos un esbozo.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^3-4x=-x-2\Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-2$$

Luego, los puntos de corte son: $(1,-3)$ y $(-2,0)$
c)

$$A=\int_{-2}^{1}\left[(x^3-4x)-(-x-2)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[x^3-3x+2\right]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{12}{2}-4\right)=\frac{27}{4}u^2$$

Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$, respectivamente.
a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

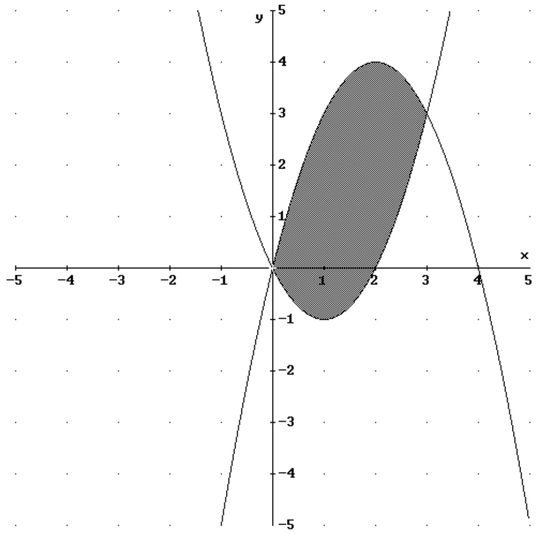
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 3$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(3,3)$

Hacemos un esbozo.



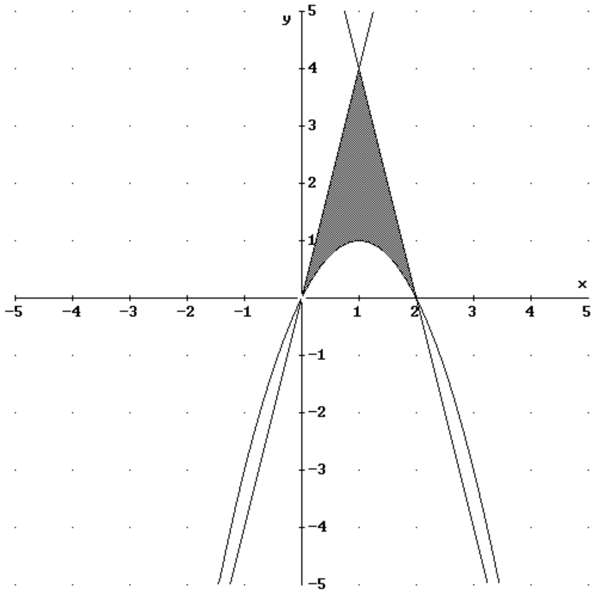
b)

$$A = \int_0^3 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^3 \left[-2x^2 + 6x\right] dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{54}{3} + \frac{54}{2}\right) - (0) = 9u^2$$

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.
a) Realiza un esbozo de dicho recinto.
b) Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo.



b) $A = 2 \cdot \int_0^1 \left[(4x) - (2x - x^2) \right] dx = 2 \cdot \int_0^1 \left[2x + x^2 \right] dx = 2 \cdot \left[\frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) - (0) = \frac{8}{3} u^2$

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^4 f(x)dx=27-8\ln 4$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como tiene un extremo relativo en $x=1$, se cumple que $f'(1)=0$, luego:

$$f'(x)=2ax+\frac{b}{x}\Rightarrow f'(1)=2a\cdot 1+\frac{b}{1}=0\Rightarrow b=-2a$$

Calculamos la integral: Previamente calculamos por partes la integral de ln(x)

$$f(x)=\int \ln x\,dx=x\ln x-x$$

$$\int_1^4 ax^2-2a\ln(x)dx=\left[\frac{ax^3}{3}-2a(x\ln x-x)\right]_1^4=\left(\frac{64a}{3}-8a\ln 4+8a\right)-\left(\frac{a}{3}+2a\right)=27-8a\ln 4\Rightarrow a=1$$

Luego, los valores son: $a=1$; $b=-2$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-x^2;\ du=-2x\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=\int(1-x^2)e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx$$

Volvemos a hacer la integral que nos queda por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right]=$$
$$=-e^{-x}\cdot(1-x^2)+2xe^{-x}+2e^{-x}+C=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(-1,0)$.

$$F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C\Rightarrow F(-1)=0\Rightarrow F(-1)=-e^{-1}(1-2+1)+C=0\Rightarrow C=0$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)$

Sean las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$ respectivamente.
a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

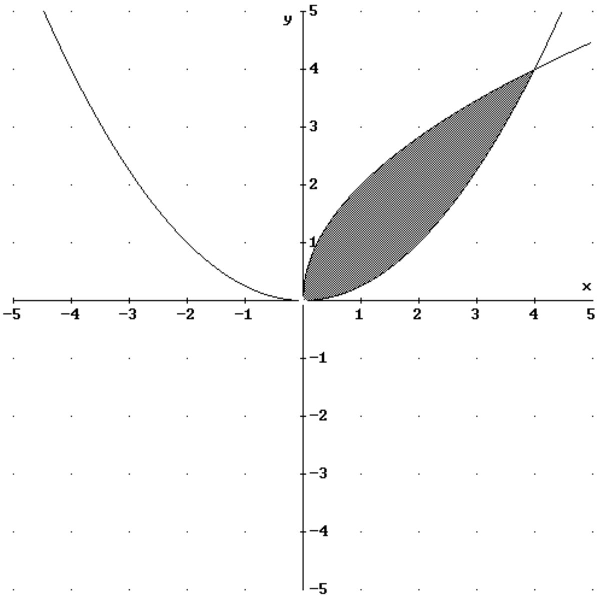
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\Rightarrow\frac{x^4}{16}=4x\Rightarrow x^4-64x\Rightarrow x=0\ ;\ x=4$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(4,4)$

Hacemos un esbozo.



b) $$A=\int_0^4\left[(2\sqrt{x})-(\frac{x^2}{4})\right]dx=\int_0^4\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left(\frac{2\sqrt{64}}{\frac{3}{2}}-\frac{64}{12}\right)-(0)=\frac{16}{3}u^2$$

Sea $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$ **.**

a) Expresa la integral *I* aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$ **.**

b) Calcula el valor de *I*.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=\sqrt{1-x}$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx=\frac{-1}{2t}dx\Rightarrow dx=-2t\,dt$$

$$t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow x=1-t^2$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=0\Rightarrow t=1$$

$$x=1\Rightarrow t=0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I=\int_1^0 \frac{(1-t^2)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 \frac{(1+t)(1-t)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 -2t(1-t)\,dt=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt$$

b) Calculamos el valor de *I*

$$I=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt=\left[-\frac{2t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}\right]_1^0=0-\left(-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

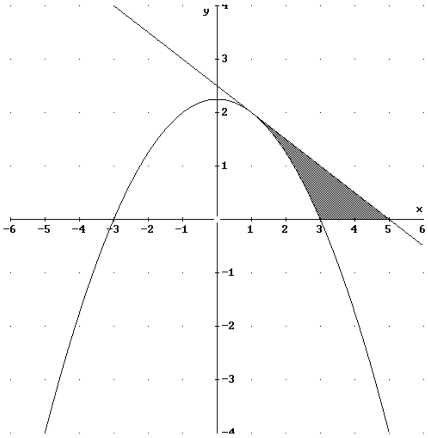
Calculamos: $f(1)=\dfrac{9-1}{4}=2$

$$f'(x)=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-5=0$$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos el área del recinto

$$A=\int_1^3\left(\frac{5-x}{2}-\frac{9-x^2}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2-2x+1}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\frac{x^3}{3}-x^2+x}{4}\right]_1^3+\left[\frac{5x-\frac{x^2}{2}}{2}\right]_3^5=\left(\frac{9-9+3}{4}\right)-\left(\frac{\frac{1}{3}-1+1}{4}\right)+\left(\frac{25-\frac{25}{2}}{2}\right)-\left(\frac{15-\frac{9}{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\ u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=|x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x)=x+4$$

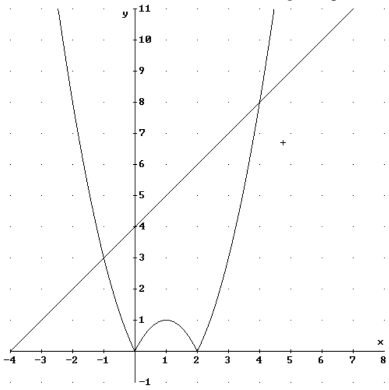
a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f(x)*, para que nos resulte más sencillo dibujarla y después calcular el área que nos piden.

$$f(x)=|x(x-2)|=\begin{cases} x^2-2x & si\ x<0 \\ -x^2+2x & si\ 0\le x\le 2 \\ x^2-2x & si\ x>2 \end{cases}$$

La función *f(x)* son tres ramas de parábola fáciles de dibujar y la función *g(x)* es una recta.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x+4=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=4$$

Luego, los puntos de corte son: $(-1,3)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área.

$$A=\int_{-1}^{0}\left[(x+4)-(x^2-2x)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[(x+4)-(-x^2+2x)\right]dx+\int_{2}^{4}\left[(x+4)-(x^2-2x)\right]dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+3x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x+4)dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{2}^{4}=\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}\ u^2$$

Sea $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=ln(x^2+1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de *g* cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $g(x)$, por partes:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$u=Ln(1+x^2);\ du=\frac{2x}{1+x^2}\ dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int 2\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$= x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

De todas las primitivas de $g(x)$

$$G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$G(0)=0\cdot Ln(1+0^2)-2\cdot 0+2\,arc\,tg\,0+C=0\Rightarrow C=0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x$

De la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$. Calcula *a*, *b*, *c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\; ; \;\; f''(x)=6ax+2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$

- Punto de inflexión en $(0,0)\Rightarrow\begin{cases} Pasa\;\; por\;\; (0,0)\Rightarrow d=0 \\ f''(0)=0\Rightarrow b=0\end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}\Rightarrow\int_0^1 (ax^3+cx)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{5}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=-1$; $b=0$; $c=3$; $d=0$

Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular primero la integral indefinida, que es una integral racional y, como el numerador y el denominador tienen igual grado, lo que hacemos es la división de los dos polinomios y la descomponemos en:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1$; $x=5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$x=5 \Rightarrow 25=4B \Rightarrow B=\frac{25}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{25}{4}}{x-5}\,dx = x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{25}{4}\ln|x-5|$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \left[x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{25}{4}\ln|x-5|\right]_2^4 = \left(4 - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{25}{4}\ln 1\right) - \left(2 - \frac{1}{4}\ln 1 + \frac{25}{4}\ln 3\right) = 2 - \frac{13}{2}\ln 3$$

Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx = 2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t^2+1}{1+t}\,2tdt=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt$$

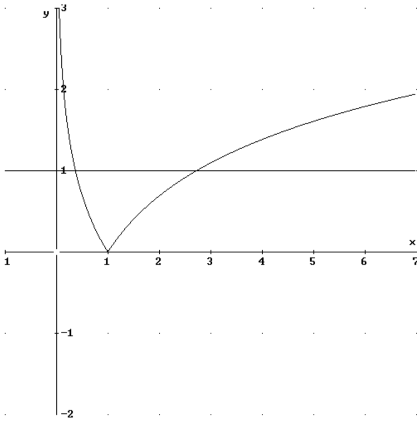
Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt=\int\left(2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t}\right)dt=\frac{2t^3}{3}-t^2+4t-4\ln|1+t|=\frac{2(\sqrt{x})^3}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=|\ln x|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.
b) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ -\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^2$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx$
$dv=dx;\ v=x$

Sea $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx=\int \frac{2t}{t+t^2}dt=\int \frac{2}{1+t}dt=2\ln|1+t|=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Calculamos la que pasa por el punto $P(1,0)$

$$0=2\ln\left|1+\sqrt{1}\right|+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|-2\ln 2$

Calcula $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x\, sen(2x)\, dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx=\left[-x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx=\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{sen\, 2x}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=sen\, 2x\, dx;\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array}}$$

Sean *f* y *g* las funciones definidas por $f(x)=2-x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$ para $x\neq -1$.

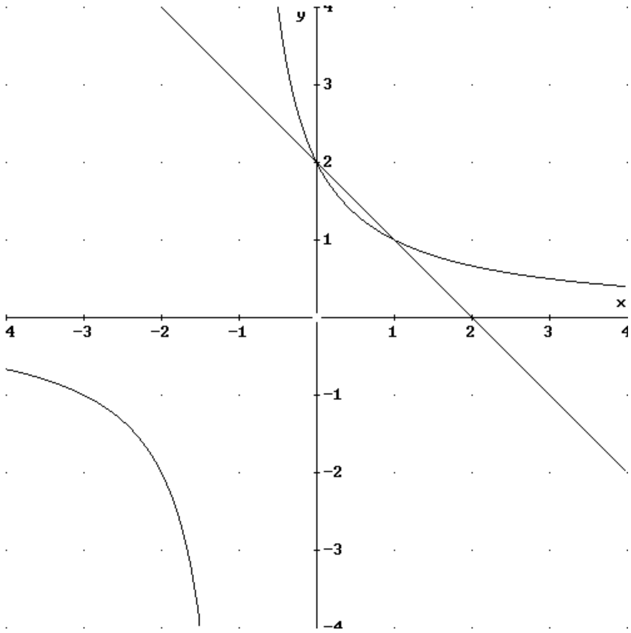
a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de *f* y *g*.
b) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos las dos funciones para calcular los puntos de corte

$$2-x=\frac{2}{x+1}\Rightarrow -x^2+x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

b) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



c) Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_0^1\left[(2-x)-\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|\right]_0^1=\left(2-\frac{1}{2}-2\ln 2\right)-(0)=\frac{3}{2}-2\ln 2\,u^2$$

Calcula $\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{e^{x}}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{e^{x}} = t \Rightarrow e^{x} = t^{2}$$
$$e^{x} dx = 2t\ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $\begin{matrix} x=2 \Rightarrow t=e \\ x=4 \Rightarrow t=e^{2} \end{matrix}$

Con lo cual:

$$I=\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx=\int_{e}^{e^{2}} \frac{2t}{1+t}\, dt=\int_{e}^{e^{2}} \left(2-\frac{2}{1+t}\right) dt=\left[2t-2\ln|1+t|\right]_{e}^{e^{2}}=$$
$$=2e^{2}-2e+2\ln\frac{1+e}{1+e^{2}}=14'15$$

a) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
b) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)=\int (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2x+1;\ du=2\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}+2\int e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+C$$

Como su gráfica pasa por el origen de coordenadas, se cumple que:

$$f(0)=0\Rightarrow -(2\cdot 0+1)\cdot e^{-0}-2\cdot e^{-0}+C=0\Rightarrow C=3$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+3$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=0$.

- $x=0\Rightarrow f(0)=0$

- $f'(0)=(2\cdot 0+1)e^{-0}=1$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=-x^2+6x-5$.
a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=4$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g*, la recta $x-2y+2=0$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

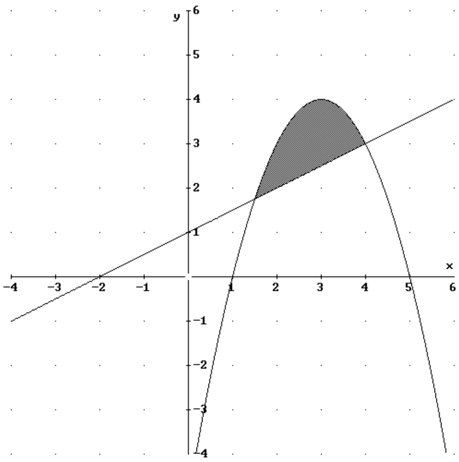
a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x=4$ es: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)$

Calculamos: $g(4)=-4^2+6\cdot 4-5=3$

$g'(x)=-2x+6\Rightarrow g'(4)=-2$

Sustituyendo, tenemos: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)\Rightarrow y-3=\dfrac{1}{2}(x-4)\Rightarrow x-2y+2=0$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$-x^2+6x-5=\frac{x+2}{2}\Rightarrow -2x^2+11x-12=0\Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{-4}=\frac{-11\pm 5}{-4}\Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Calculamos el área del recinto

$$A=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left((-x^2+6x-5)-\frac{x+2}{2}\right)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(-x^2+\frac{11x}{2}-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{11x^2}{4}-6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+44-24\right)-\left(-\frac{9}{8}+\frac{99}{16}-9\right)=\frac{125}{48}\ u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x)=\frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

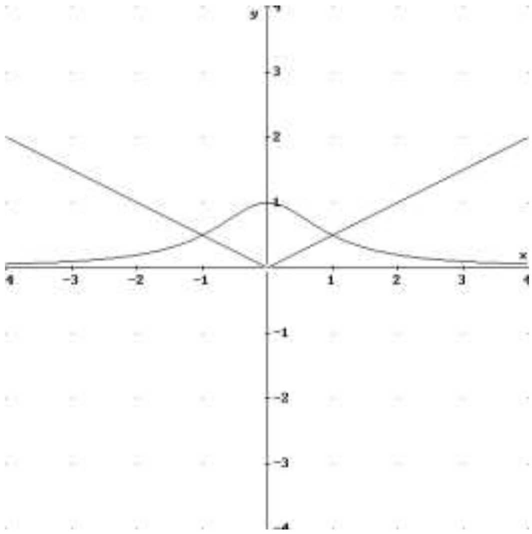
a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



Abrimos la función $f(x)$: $f(x)=\frac{|x|}{2}=\begin{cases} \frac{x}{2} & si \ \ x>0 \\ -\frac{x}{2} & si \ \ x\le 0 \end{cases}$

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow x+x^3=2\Rightarrow x=1$$

$$-\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow -x-x^3=2\Rightarrow x=-1$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A=2\cdot\int_0^1\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{x}{2}\right]dx=2\left[arc\,tg\,x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=2\left(arc\,tg\,1-\frac{1}{4}\right)-2\left(arc\,tg\,0-\frac{0}{4}\right)=2\frac{\pi}{4}-2\frac{1}{4}=\frac{\pi-1}{2}u^2$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=x\ln(x+1)$ para $x>-1$ (ln denota el logaritmo neperiano).
Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot ln(x+1)\ dx$, que es una integral por partes.

$$u=\ln(x+1);\ du=\frac{1}{x+1}\ dx$$
$$dv=x\,dx;\ v=\frac{x^2}{2}$$

$$I=\int x\cdot ln(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(x+1)}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)+C$$

Calculamos la constante:

$$0=\frac{1^2}{2}\cdot ln(1+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)\right)+C\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)-\frac{1}{4}$$

Determina una función derivable $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f(1)=-1$ y que

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como es derivable también es continua.

Calculamos $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+C & si \quad x<0 \\ e^x-x+D & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Como $f(1)=-1\Rightarrow e^1-1+D=-1\Rightarrow D=-e$

Como es continua en $x=0$, tenemos:

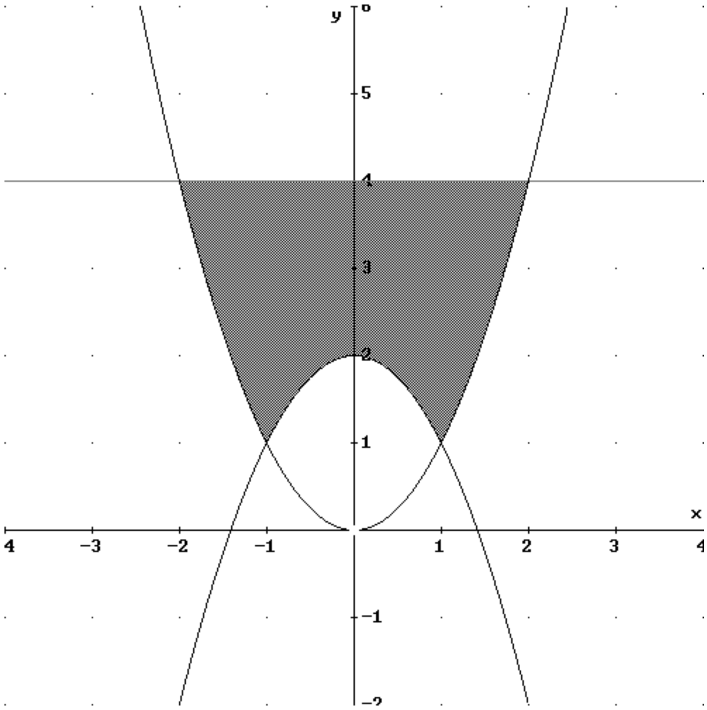
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3}{3}+x^2+C=C \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^x-x-e=1-e \end{array}\right\}\Rightarrow C=1-e$$

Luego, la función es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+1-e & si \quad x<0 \\ e^x-x-e & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$
a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.
b) Calcula el área del recinto.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$ y $(-2,4)$.

b) Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, el área que nos piden es:

$$A = 2 \cdot \left[\int_0^1 (4-2+x^2)dx + \int_1^2 (4-x^2)dx \right] = 2\left[2x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$
$$= 2\left(2+\frac{1}{3}\right) + 2\left[\left(8-\frac{8}{3}\right) - \left(4-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{14}{3} + \frac{32}{3} - \frac{22}{3} = \frac{24}{3} = 8\ u^2$$

Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\ dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $I=\int \ln(4-x)\ dx$, que es una integral por partes.

$$u=\ln(4-x);\ \ du=-\frac{1}{4-x}dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

$$I=\int \ln(4-x)\ dx = x\ln|4-x| - \int \frac{-x}{4-x}dx = x\ln|4-x| + \int \frac{x}{4-x}dx$$

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{4}{4-x}dx = \int\left(-1+\frac{4}{4-x}\right)dx = -x-4\ln|4-x|$$

Con lo cual: $I=\int \ln(4-x)\ dx = x\ln|4-x| - x - 4\ln|4-x|$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\ dx = \left[x\ln|4-x| - x - 4\ln|4-x|\right]_{-1}^{1} = \left(\ln 3 - 1 - 4\ln 3\right) - \left(-\ln 5 + 1 - 4\ln 5\right) = -2-3\ln 3+5\ln 5$$

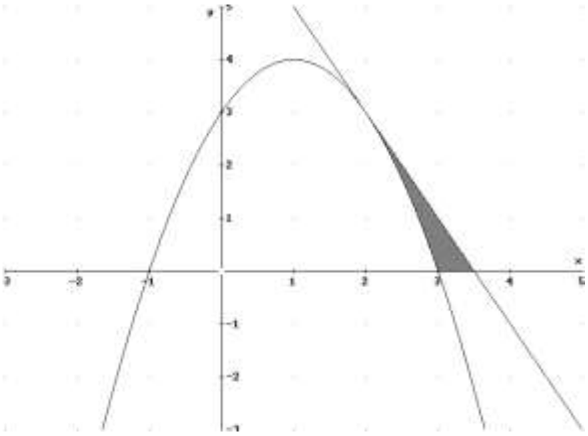
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-x^2+2x+3$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $2x+y-7=0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.
c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto $x=2$, es: $y-f(1)=f'(2)\cdot(x-2)$
Sustituyendo los valores de $f(2)=-4+4+3=3$ y $f'(2)=-4+2=-2$, tenemos:

$$y-f(1)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=-2\cdot(x-2)\Rightarrow 2x+y-7=0$$

b) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2+2x+3=0\Rightarrow x=3\ ;\ x=-1$$

$$-2x+7=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$$-x^2+2x+3=-2x+7\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(3,0)$, $\left(\frac{7}{2},0\right)$ y $(2,3)$.

b)

$$A=\int_2^3\left[(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\right]dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=\int_2^3(x^2-4x+4)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3+\left[-x^2+7x\right]_3^{\frac{7}{2}}=(9-18+12)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)+\left(-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}\right)-(-9+21)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-3x^2-x+3$.
a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=3-x$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta del apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es tangente, en ese punto la función y la tangente coinciden, luego:

$$x^3-3x^2-x+3=3-x\Rightarrow x^3-3x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

$f(0)=3$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(0)=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-3=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x+3$

La ecuación de la recta tangente en $x=3$ es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$.

$f(3)=0$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(3)=27-18-1=8$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)\Rightarrow y-0=8\cdot(x-3)\Rightarrow y=8x-24$

Luego, el punto es: $(0,3)$

b) Ya hemos visto que los puntos de corte de las dos funciones son: $x=0$ y $x=3$. Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y 3, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=1\Rightarrow y=(1)^3-3(1)^2-1+3=0$
Para $x=1\Rightarrow y=-1+3=2$

Por lo tanto, la función que va por encima es $y=-x+3$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_0^3\left[(-x+3)-(x^3-3x^2-x+3)\right]dx=\int_0^3 (-x^3+3x^2)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}\ u^2$$

Sea $f:(-1,3)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=-1\Rightarrow 8=-4A\Rightarrow A=-2$$
$$x=3\Rightarrow 12=4B\Rightarrow B=3$$

Con lo cual:

$$\int\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}\,dx=\int\frac{-2}{x+1}\,dx+\int\frac{3}{x-3}\,dx=-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$$

Como tiene que pasar por el punto $(1,0)$

$$0=-2\ln|1+1|+3\ln|1-3|+C\Rightarrow C=2\ln 2-3\ln 2=-\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\ln 2$

Calcula $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ **(Sugerencia: cambio de variable** $t=\sqrt{x}$ **)**

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{1}{2x(x+\sqrt{x})}dx=\int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)}dt=\int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}=\frac{A\cdot t(t+1)+B\cdot(t+1)+C\cdot t^2}{t^2(t+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $t=1$

$t=0 \Rightarrow 1=B$
$t=-1 \Rightarrow 1=C$
$t=1 \Rightarrow 1=2A+2B+C \Rightarrow A=-1$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)}=\int \frac{-1}{t}\ dt+\int \frac{1}{t^2}\ dt+\int \frac{1}{t+1}\ dt=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C=-\ln\left|\sqrt{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{x} \cdot \cos x$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.
b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,0)$
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=1$$
$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot sen\, x \Rightarrow f'(0) = 1$$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y - 1 = 1\cdot(x-0) \Rightarrow y = x+1$

b) Es una integral por partes cíclica

$$\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x sen\, x - \int e^x \cdot senx\, dx =$$
$$= e^x sen\, x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right] = e^x sen\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2\int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x sen\, x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x\, dx = \frac{e^x sen\, x + e^x \cos x}{2} + C$$

$u = e^x$; $du = e^x\ dx$ $dv = \cos x\, dx$; $v = senx$

$u = e^x$; $du = e^x\ dx$ $dv = sen\, x\, dx$; $v = -\cos x$

Como pasa por el origen de coordenadas:

$$0 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Luego, la función primitiva que nos piden es: $F(x) = \dfrac{e^x sen\, x + e^x \cos x}{2} - \dfrac{1}{2}$

Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{2}\left[x\right]_0^1+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2\ ;\ x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=2 \Rightarrow 4=3A \Rightarrow A=\frac{4}{3}$$
$$x=-1 \Rightarrow 1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

Con lo cual:

$$I_1=\int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{x-2}\,dx+\int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx=\left[\frac{4}{3}\ln|x-2|\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}\ln|x+1|\right]_0^1=-\frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 2=-\frac{5}{3}\ln 2$$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\ln 2\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\ln 2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$. (Sugerencia: integración por partes).

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x};\ v = tg\ x \end{array}}$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x\, tg\ x - \int tg\ x\, dx = x\, tg\ x - \int \frac{sen\, x}{\cos x} dx = x\, tg\ x + \ln|\cos x|$$

Calculamos la integral definida que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = \left[x\, tg\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx=\int -1\,dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx=-x+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow -1=3A\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$
$$x=-2\Rightarrow -4=-3B\Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx=-x+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx=-x+\int \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)}\,dx+\int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx=$$

$$=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$. (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x)=\int \ln(x)\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x);\ du=\dfrac{1}{x}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$f(x)=\int (x\ln x - x + C)\ dx = \int x\ln x\, dx - \int x\, dx + \int C\, dx = \int x\ln x\, dx - \frac{x^2}{2}+Cx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot x\, dx - \frac{x^2}{2}+Cx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+Cx+D=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+Cx+D$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x);\ du=\dfrac{1}{x}\ dx \\ dv=xdx;\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Calculamos el valor de las constantes *C* y *D*.

$$\text{Tangente horizontal} \Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=1\cdot\ln 1-1+C\Rightarrow C=1$$

$$\text{Pasa por el punto } (1,2)\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow 2=\frac{1\cdot\ln 1}{2}-\frac{3}{4}+1+D\Rightarrow D=\frac{7}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3x^2}{4}+x+\dfrac{7}{4}$

Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ (Sugerencia $\sqrt{x+2}=t$)

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{x+2}$, vamos a calcular cuánto vale *dx* y *x*:

$$dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+2}}dx \Rightarrow dx=2\cdot\sqrt{x+2}\,dt=2t\,dt$$
$$t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow x=t^2-2$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-2-2)\cdot t}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-4)\cdot t}=\int\frac{2dt}{(t^2-4)}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2-4}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(t+2)}{t^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t=2\Rightarrow 2=4B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$
$$t=-2\Rightarrow 2=-4A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=\int\frac{Adt}{t+2}+\int\frac{Bdt}{t-2}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C$$

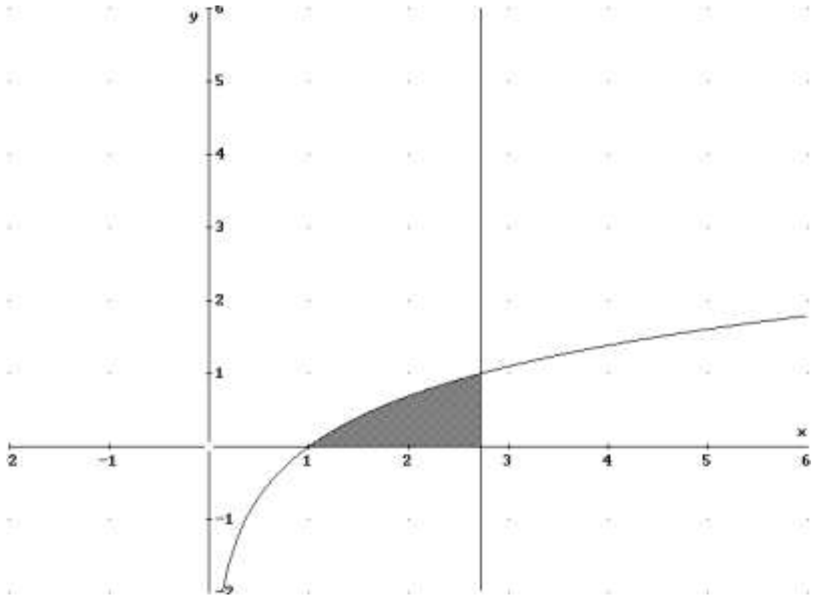
Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|+C$$

Sea g la función definida por $g(x)=\ln(x)$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a>1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x=a$ es 1.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El recinto es:



Calculamos el área.

$$A=\int_{1}^{a}\ln x\,dx$$

Hacemos la integral por partes:

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}} \quad \int \ln x\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

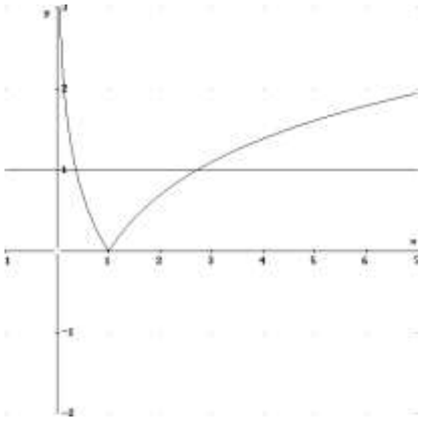
$$A=\int_{1}^{a}\ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_{1}^{a}=(a\ln a-a)-(1\ln 1-1)=a\ln a-a+1=1\Rightarrow a\ln a-a=0\Rightarrow \ln a=1\Rightarrow e^{1}=a$$

Luego: $a=e$

Sea f la función definida por $f(x)=|\ln(x)|$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=1$.
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y=1$.
c) Calcula el área del recinto citado.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ -\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^2$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx\\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

Calcula $\int e^{2x}\, sen(x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos la integral por partes.

$$\int e^{2x}\cdot sen\,x\,dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\,x - 2\int e^{2x}\cdot sen\,x\,dx\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = sen\,x\,dx;\ v = -\cos x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \cos x\,dx;\ v = sen\,x \end{array}}$$

$$I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\,x - 2\cdot I\right]$$

$$I + 4I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\,x$$

$$I = \frac{-e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\,x}{5} + C$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea *F* la primitiva de *f* tal que $F(1)=2$.
a) Calcula $F'(e)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\,dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Por lo tanto:

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

b) Calculamos $F(x)$. Para ello hacemos el cambio de variable $\ln x=t$, con lo cual $\ln x=t\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{2x}\,dx=\int\frac{t}{2}\,dt=\frac{t^2}{4}+C=\frac{(\ln x)^2}{4}+C$$

Como $F(1)=2\Rightarrow\dfrac{(\ln 1)^2}{4}+C=2\Rightarrow C=2$

Por lo tanto: $F(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{4}+2$

Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(e)=F'(e)\cdot(x-e)$

$$F(e)=\frac{(\ln e)^2}{4}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

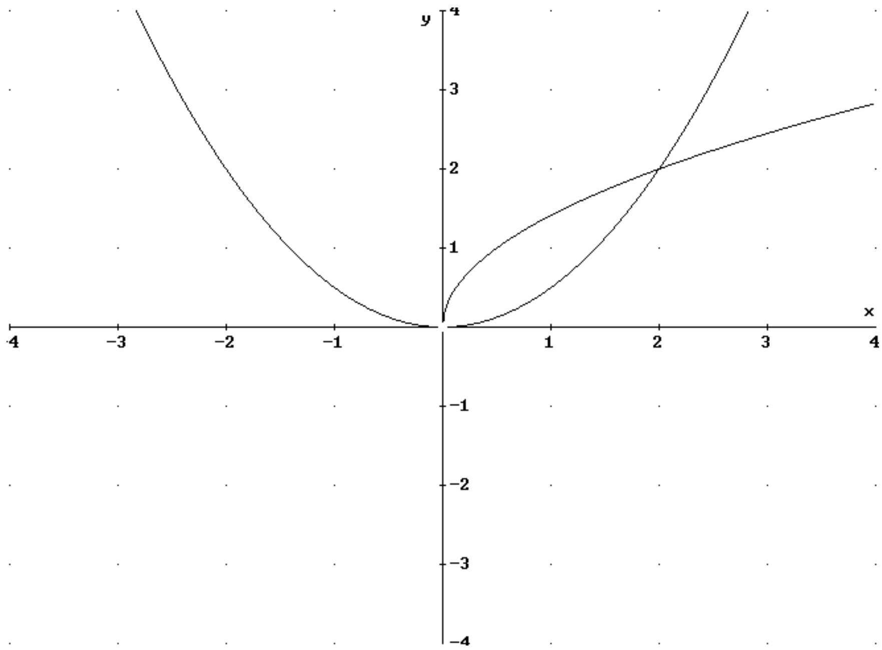
Luego, la recta tangente es: $y-\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{2e}\cdot(x-e)$

Sean $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **las funciones definidas por** $f(x)=\sqrt{2x}$ **y** $g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Haz un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(2,2)$.

b) Luego, el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\left[\frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}\,u^2$$

Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + ax \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + (1-a)x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = a-1$$

Calculamos el área:

$$A = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x)\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-1} = -\frac{(a-1)^3}{3} + \frac{a(a-1)^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini, sale que $a = 3$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 1$ y sea *F* la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $P(2,\ln 2)$ (ln denota logaritmo neperiano).
a) Calcula la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto *P*.
b) Determina la función *F*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\,dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(2)=F'(2)\cdot(x-2)$

$$F(2)=\ln 2$$
$$F'(2)=f(2)=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\ln 2=\dfrac{5}{4}\cdot(x-2)$

b) Calculamos $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx$

Las raíces del denominador son: $x=0$; $x=0$; $x=1$
Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\cdot x\cdot(x-1)+B(x-1)+C\cdot x^2}{x^2\cdot(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $x=2$

$$x=0\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$$
$$x=1\Rightarrow 2=C\Rightarrow C=2$$
$$x=2\Rightarrow 5=2A+B+4C\Rightarrow A=-1$$

Con lo cual:

$$F(x)=\int\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x^2}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+C$$

Como $F(x)$ pasa por el punto $(2,\ln 2)$ entonces: $\ln 2=-\ln 2+\dfrac{1}{2}+2\ln 1+C\Rightarrow C=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$

Por lo tanto: $F(x)=-\ln x+\dfrac{1}{x}+2\ln(x-1)+2\ln 2-\dfrac{1}{2}$

Calcula $\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2 sen(x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2 sen(x)\,dx=-x^2\cdot\cos x+2\int x\cdot\cos x\,dx=-x^2\cdot\cos x+2\cdot\left[x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx\right]=$$
$$=-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\,x+2\cos x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\,dx=\left[-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\,x+2\cos x\right]_0^{\pi}=$$
$$=\left(-\pi^2\cdot\cos\pi+2\pi\cdot sen\,\pi+2\cos\pi\right)-\left(-0^2\cdot\cos 0+2\cdot 0\cdot sen\,0+2\cos 0\right)=$$
$$=\pi^2-2-2=\pi^2-4$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\left|x^2-4\right|$

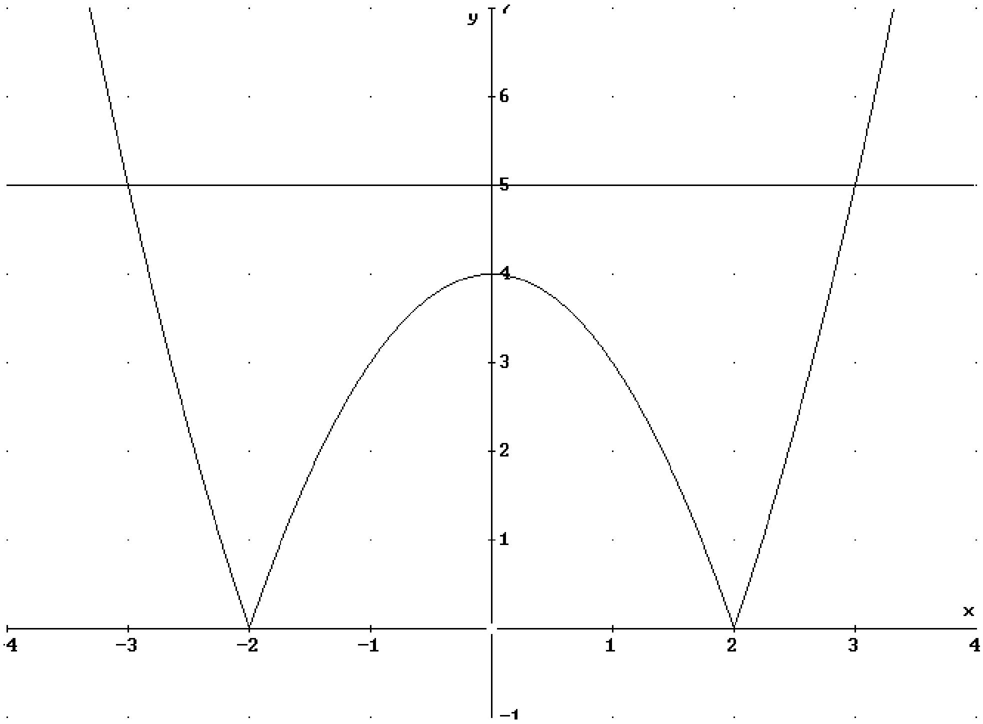
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=5$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<-2 \\ -x^2+4 & si \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & si \quad x>2 \end{cases}$, y hacemos el dibujo



b) Vemos por el dibujo que es simétrica respecto el eje OY, luego:

$$A=2\left[\int_0^2(5+x^2-4)\,dx+\int_2^3(5-x^2+4)\,dx\right]=2\left[\int_0^2(1+x^2)\,dx+\int_2^3(9-x^2)\,dx\right]=$$

$$=2\left(\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\right)=2\left(\left[2+\frac{8}{3}\right]+\left[27-\frac{27}{3}\right]-\left[18-\frac{8}{3}\right]\right)=\frac{44}{3}\ u^2$$