Página 315

1. **Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$

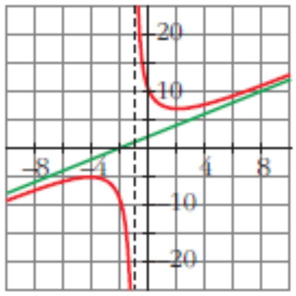
$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 2, \ x_2 = -4$

Máximo en $(-4, -5)$.

Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} =$

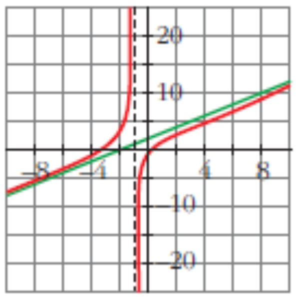
$= \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-3, 0)$

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

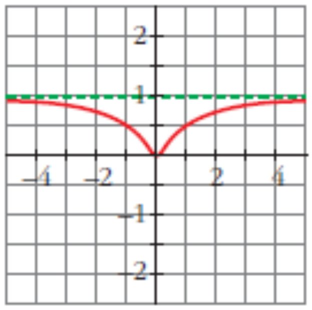


c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

Mínimo en (0, 0).

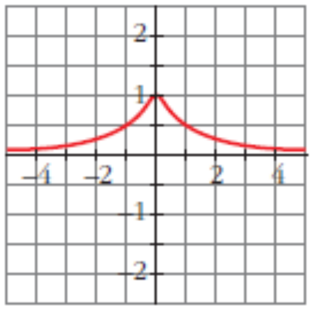
Asíntota horizontal: $y = 1$



d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$



e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x) - (x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{(x^2-2x)^2} =$

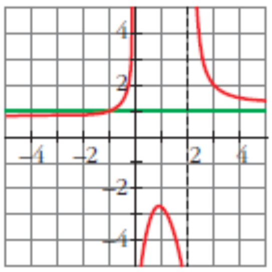
$= \dfrac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$

Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$



f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) \neq 0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

- Corta al eje x en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

- Gráfica: