Repaso para el examen

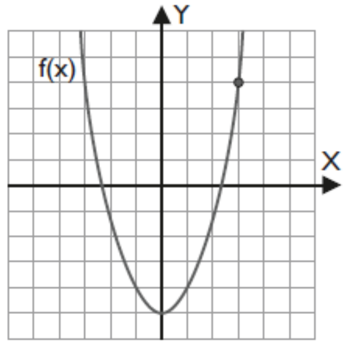
Dominio, Recorrido, Puntos de Corte, Simetrías → Repasar los ejercicios vistos en clase

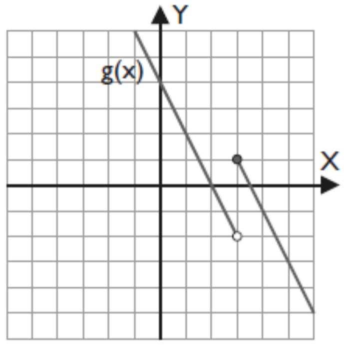
Valor Absoluto de una función → Representación y saber pasarlo a función a trozos

Cálculo de límites → Repasar la hoja resuelta en clase

1. Observando la gráfica, halla el límite en cada caso; si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

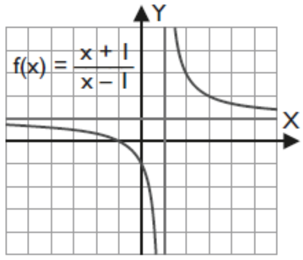
b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ no existe porque los límites laterales son distintos.

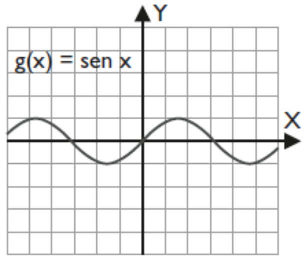
$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -2; \lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = 1$

5. Usa la gráfica para estimar el límite en cada caso; y si no existe, justifícalo:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ siendo $g(x) = \text{sen } x$





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ no existe porque la función sen **x** está oscilando continuamente entre –1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la **x** tiende a $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ no existe porque la función sen **x** está oscilando continuamente entre – 1 y 1

No se acerca a ningún valor cuando la **x** tiende a $+\infty$

Asíntotas

Calcula las asíntotas y la posición de la gráfica respecto de las asíntotas de las siguientes funciones:

25. $f(x) = \dfrac{1}{4 - x^2}$

Solución:

Verticales: $x = -2$, $x = 2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = -\infty$$

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

26. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Solución:

Verticales: $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x + 2} = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x + 2} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas: $y = x - 2$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x + 2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x + 2} = 0^+$$

La gráfica está encima de la asíntota.

27. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^+$$

La gráfica está encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Solución:

Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

29. $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

a) $y = -x + \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} + x - \frac{1}{2}\right) = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

b) $y = x - \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x + \frac{1}{2}\right) = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

30. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$

Solución:

Verticales: $x = 2$

$\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}$ no existe.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$$

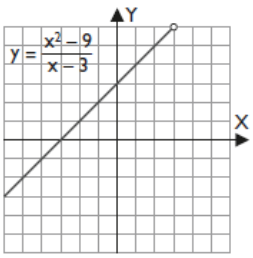
Horizontales: no tiene.

Oblicuas: no tiene.

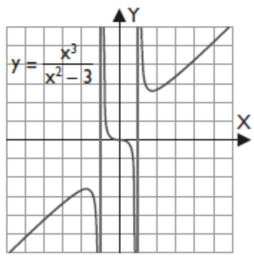
Continuidad

17. A la vista de la gráfica, clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

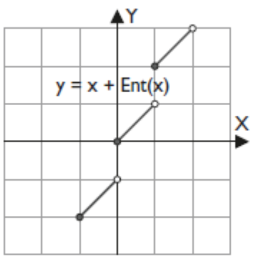
a)



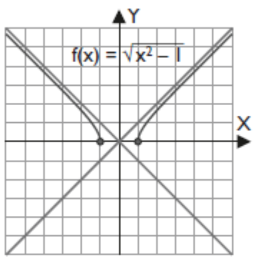
b)



c)



d)



Solución:

a) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$, que se evita haciendo $f(3) = 6$

b) Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en $x = -1$ y $x = 1$

c) Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en los valores enteros.

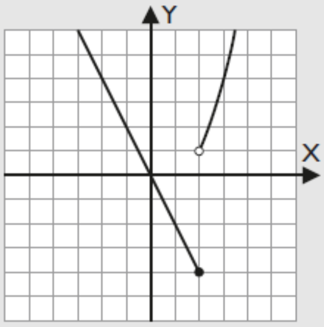
d) Tiene una discontinuidad de 2ª especie en los valores $x = -1$ y $x = 1$

18. Representa y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ L\,x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Solución:



La función está definida a trozos con dos funciones polinómicas que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para x = 2

a) $f(2) = -4$

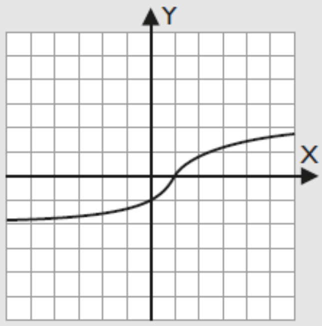
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x) = -4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$

Como los límites laterales no son iguales, no existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Existe una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en x = 2

b)



La función está definida a trozos con una función exponencial y una logarítmica que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para x = 1

a) $g(1) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2^x - 2) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} L\,x = 0$

Como los límites laterales son iguales, el $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

La función es continua.

51. Se considera la función:

$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Determina el valor de **k** para que la función sea continua.

Solución:

Como está definida por funciones polinómicas, el punto que puede ser conflictivo se da para el valor x = 1

$f(1) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 5) = 7$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + k) = 1 + k$

Como para ser continua

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

se tiene:

$1 + k = 7 \Rightarrow k = 6$

77. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \le -2 \\ a & \text{si } -2 < x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de **a** para que f(x) sea continua en $x = -2$.

b) Para el valor de **a** hallado, ¿es continua la función en $x = 2$?

Solución:

a) En $x = -2$

$f(-2) = 4a - 2$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} a = a$

Se tiene que cumplir:

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

$4a - 2 = a \Rightarrow a = 2/3$

b) Para $a = 2/3$

$f(2) = 2/3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2/3 = 2/3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x = 2$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

20. Halla el valor del parámetro **k** para que la siguiente función sea continua en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x} & \text{si } x \le 2 \\ kx - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(2) = 0$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = 0$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (kx - 1) = 2k - 1$

c) Para que sea continua, el límite debe existir cuando **x** tiende a 2, y ser igual que f(2)

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

Derivadas → Repasar los ejercicios de clase