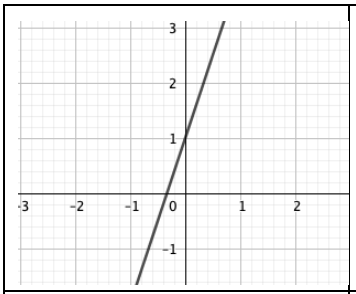
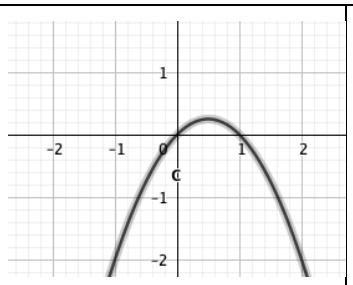
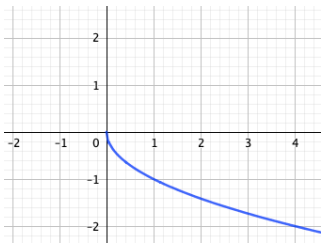
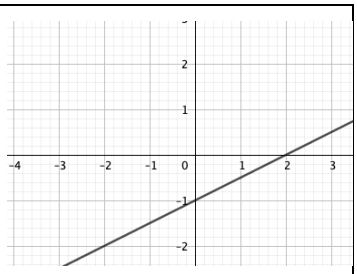
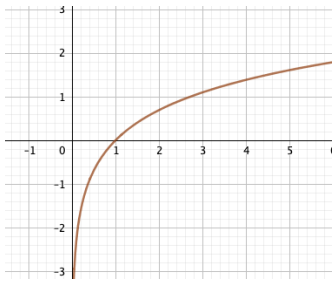
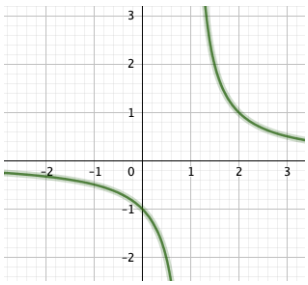
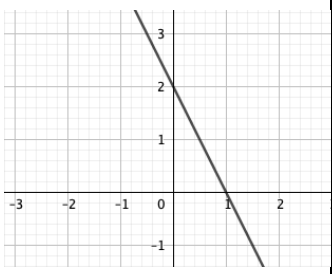
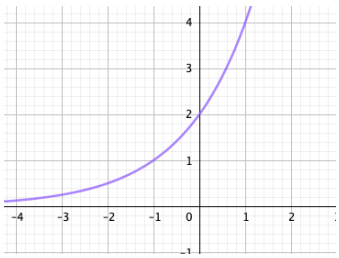
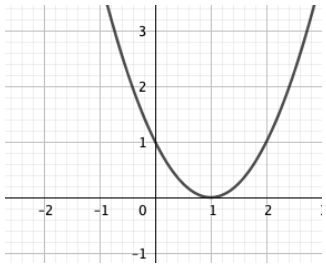
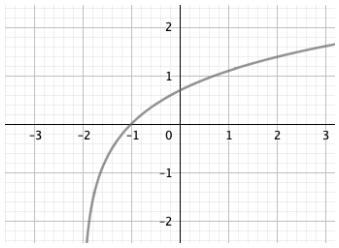
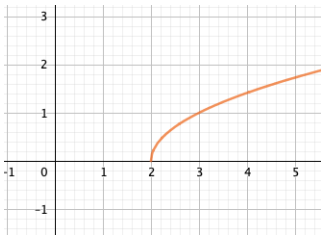
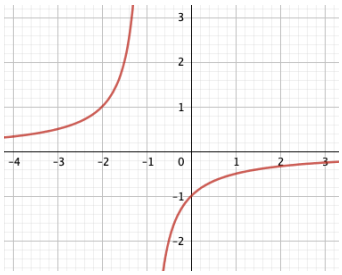
Ejercicios Tema 5. Estudio de funciones. Límites. Asíntotas

B3.C1.1. Representa funciones elementales y estudia sus propiedades locales y globales.

1. Coloca las siguientes funciones debajo de su dibujo:

Lineales	Cuadráticas	Proporcionalidad Inversa	Radicales	Exponenciales	Logarítmicas
y=3x+1	$y=-x^2$	$y=\frac{1}{x+1}$	$y=\sqrt{x+1}$	$y=2^{x+1}$	y=log(x)
y=-2x+2	$y=x^2-2x+1$	$y=\frac{1}{x-1}$	$y=\sqrt{x-2}$	$y=2^{x-1}$	y=log(x+2)
y=(1/2)x-1	$y=-x^2+x$	$y=-\frac{1}{x+1}$	$y=-\sqrt{x}$	$y=(1/2)^x$	y=-log(x)

			
y=	y=	y=	y=
			
y=	y=	y=	y=
			
y=	y=	y=	y=

2. Representa estas funciones:

a) $y=\frac{1}{x-2}$ b) $y=\frac{1}{x+2}$ c) $y=-\frac{1}{x+2}$ d) $y=\frac{1}{x+2}+2$

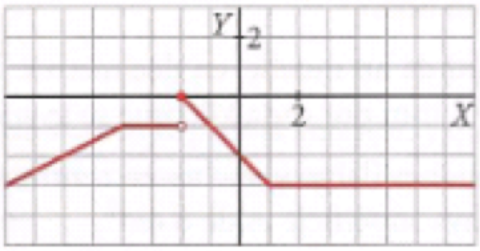
3. Representa la función a trozos

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & x\in[0,3] \\ 4 & x\in(3,7) \end{cases}$$

4. Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} -2x-1 & x<1 \\ x^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

5. Escribe la expresión gráfica que corresponde a la siguiente gráfica:



B3.C1.3. Realiza composiciones de funciones y cálculo de funciones inversas.

6. Dadas f(x)=x^2-5x+6, g(x)=x^2+1, h(x)=sen(x) , I(x)=x+3. Calcular g(f(x)), f(g(2)), f(h(x)), h(I(x)), I(h(x)).
7. Comprueba que las funciones y=2x , y=x/2 son funciones inversas.
8. Comprueba que las funciones y=2x+4 , y=x/2 - 2 son funciones inversas.
9. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

   a) y=3x+2 b) y=$x/4$ +3 c) y=$\frac{3x-1}{x}$ d) y=$\frac{2x-1}{3x+3}$ e) y= 3^{x+1} f) y= log(x-2)

10. Descomponer y=$2x^2$-4 en dos ramas para hallar sus inversas.

B3.C1.2. Conoce las operaciones con funciones y las aplica en el cálculo de dominios.

11. Calcula el dominio de las siguientes funciones

a) y= $\sqrt{x^2-4}$ b) y=$\sqrt{x-4}$ c) y=$\sqrt{2-x}$ d) y=$\frac{2x+1}{3x-1}$ e) y=$\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

f) y=x^4-4x+1 g) y=$\frac{1}{x^2-9}$ h)y=log(x-5) i) y=$\log\,(x^2-5x+6)$ j) y=$\frac{x}{\log\,(x^2+16)}$

B3.C1.4. Estudia y analiza funciones en contextos reales.

12. Se quiere hacer una ventana con forma de rectángulo añadiéndole un semicírculo sobre el lado menor en la parte superior. Si el perímetro del rectángulo es 8 m, escribe el área de la ventana en función del lado menor del rectángulo. Indica cuál es su dominio y su recorrido.

13. Una feria ganadera está abierta entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función N(t)=-20t^2+Bt+C, donde t es la hora de visita. Sabiendo que a las 17h se alcanza el máximo de 1500 visitantes, calcula B y C.
14. El coste de producción de un modelo de batidora es C(x)=x^2/4 +35x +25 y el precio de venta V(x)=50-(x/4) con x el número de unidades producidas. Escribe la función B(x) de beneficio total y halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

B3.C2.1. Comprende el concepto de límite, realiza las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplica los procesos para resolver indeterminaciones.

15. Se ha realizado un estudio sobre el crecimiento del número de orugas en un bosque y se ha llegado a la conclusión de que el número de individuos viene dado por la función $f(x) = 500 \cdot 2^x$, donde x indica los años y f(x) el número de orugas.
    a) ¿A qué cantidad se acerca el número de orugas si estamos próximos a los 3 años? ¿Y a los 5 años? .
    b) Si no se pone ningún remedio, ¿qué ocurre con el número de orugas a largo plazo?.

16. Supongamos que tras realizar un estudio demográfico de una población albaceteña obtenemos que el número de habitantes viene dado por la función $f(x)=\frac{6400x+3000}{2x+2}$, donde x es el nº de años transcurridos.
    a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?¿Y dentro de 2 años?
    b) Suponiendo que la función es válida para todo el tiempo, ¿Crees que la población crecería indefinidamente o se estabilizaría en torno a un determinado número de habitantes?

17. Se ha comprobado en una empresa textil que los ingresos medidos en millones de euros vienen dados por la función $I(x)=\frac{5x}{x+4}$ y los gastos por la función $G(x)=\frac{3x+6}{x^2+2}$ con x el nº de años desde que se creó.

    a) ¿Cuántos gastos tuvieron inicialmente al crear la empresa?
    b)¿Qué ingresos y que gastos tuvieron el primer año?¿Y el segundo año?
    c) El beneficio de la empresa será la diferencia entre ingresos y gastos. ¿Se puede decir que la empresa será rentable con el paso de los años?¿Tiende a estabilizarse el beneficio de la empresa?

LÍMITES EN FUNCIONES A TROZOS

18. Estudiar para estas funciones cuál es el límite en el punto que se pasa de un trozo a otro:

a) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si } x \geq 0 \\ x+2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ -3x-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x^2-2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ h) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -x^2+4x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ i) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 1 \\ -2x+1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

19. Expresa la función f(x)=|x^2-1| como una función a trozos y calcula su límite cuando x tiende a 1 y -1.
20. Calcula el límite de f(x)=$\frac{x-2}{|x-1|}$ cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.
21. Calcula los valores de "a" y "b" para que exista el $\lim_{x\to -2} f(x)$ y exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si\ x\le -2 \\ x-5 & si\ -2<x<1 \\ bx & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

LÍMITES CUANDO $x \to \infty$

22) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{-2x^4+3x^3-6}$ 23) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^2-6x}$ 24) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^2}{x^5+1}$ 25) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2-2x+1\right)$

26) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)$ 27) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2-4x+4}}$ 28) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^5+x^2}{2x^2-1}$ 29) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$

30) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\log(x)}$ 31) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$ 32) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{2^x}$ 33) $\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x}{3e^x-1}$

Indeterminación ∞-∞

34) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x+3}-2x$ 35) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x+1}-2x^2$ 36) $\lim_{x\to\infty} 2^x-x^2$ 37) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x}-x$

38) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ 39) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ 40) $\lim_{x\to\infty} x^2-\sqrt{x^2-2x}$

a^∞, con a $\neq 1$

41) $\lim_{x\to\infty} 2^x$ 42) $\lim_{x\to\infty} (\frac{2}{3})^x$ 43) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{x^2}$ 44) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{5^x}$

Indeterminación 1^∞

Dos opciones: 1) Utilizar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 2) Fórmula $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$

45) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{x^2}$ 46) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{x-5}$ 47) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$ 48) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2x+1}{X+2}\right)^{\frac{1}{X-1}}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

49) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x}{x^2+1}}{\frac{1}{x+1}}$

LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

50) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+x\right)$ 51) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2+x\right)$ 52) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2}$ 53) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2}$ 54) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot 2^x$

LÍMITES CUANDO $x \to a$

55) $\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-6x+1\right)$ 56) $\lim\limits_{x\to5}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-x\right)$ 57) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$

Caso $\frac{k}{0}$ - Estudiar los límites laterales

58) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2}{x-3}$ 59) $\lim_{x\to3}\dfrac{x+3}{2x-6}$ 60) $\lim_{x\to1}\dfrac{3x+4}{x^2-1}$ 61) $\lim_{x\to2}\dfrac{2x+3}{x^2-4}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

62) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ 63) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2}$ 64) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ 65) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

66) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ 67) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

Indeterminación ∞-∞

68) $\lim_{x\to3}\dfrac{2x^2}{x-3}-\dfrac{x}{x^2-9}$ 69) $\lim_{x\to2}\dfrac{3}{x^2-5x+6}-\dfrac{4}{x-2}$

ASÍNTOTAS

70) Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:

a) f(x) = $\frac{3x}{1-x}$ b) f(x) = $\frac{3x^2}{x^2-1}$ c) f(x) = $\frac{x^2+4}{x^2-9}$ d) f(x) = $\frac{2x}{1-x^2}$ e) f(x) = $\frac{x^2}{x+5}$

f) f(x) = $\frac{4x^2+1}{x^3-4x}$ g) f(x) = $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ h) f(x) = $\frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$ i) f(x) =$\sqrt{x^2-1}$ j) f(x) = $x \cdot 3^x$

71) Determina el valor de "a" para que la función f(x) = $\frac{2x+5}{ax+8}$ tenga una asíntota vertical en x=4.

72) Determina el valor de "a" para que la función f(x) = $\frac{ax^2+2}{bx^2+ax+1}$ tenga una asíntota vertical en x=2 y una asíntota horizontal en y=1.