Rectas y Planos 3D

01.- Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas: $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z-8}{4}$ y $s: x=y=z$

Sol: $\pi=\{x=0+2\alpha+\beta, y=0+3\alpha+\beta, z=0+4\alpha+\beta\}$

02.- Determina el plano que contiene a la recta $r:\begin{cases}x+y+z=-5\\ x-3y-z=3\end{cases}$ y es paralelo a la recta $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-10}{4}$

Sol: $\{x=-3+2\alpha+2\beta, y=-2+2\alpha+3\beta, z=0-4\alpha+4\beta\}$

03.- Halla la ecuación implícita del plano π que pasa por el punto P(1,1,1) y es paralelo a $\pi':\begin{cases}x=1+2\alpha-3\beta\\ y=3+2\beta\\ z=-1-\beta\end{cases}$

Sol: $y+2z-3=0$

04.- Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$ y es paralelo a la recta $s:\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+2t\\ z=t\end{cases}$

Sol: $\pi=\{x=2+\alpha+3\beta, y=2-2\alpha+2\beta, z=4+3\alpha+\beta\}$

05.- Estudia si los puntos (1,1,1); (2,3,4); (-5,0,-2) están alineados. En caso afirmativo halla las ecuaciones paramétricas y continua que definen y en caso negativo, la ecuación del plano correspondiente.

Sol: No, $\pi:\{x=1+\lambda-6\beta, y=1+2\lambda-\beta, z=1+3\lambda-3\beta\}$

06.- Consideramos la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+8}{3}=\dfrac{z-2}{5}$, el plano $\pi: 2x-y+3z=0$ y el punto P(1,0,4). **a)** Obtén una recta s paralela a r que pase por el punto P. **b)** Calcula el punto de intersección de r y π.

Sol: a) $s:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{5}$; b) P es: $(-1,-11,-3)$

07.- Dada la familia de planos:

2mx + (m+1)y – 3(m+1)z + 2m + 4 = 0

a) Calcular la ecuación del plano de esta familia que pasa por el punto (1,1,-2); **b)** Calcular la ecuación del plano de esta familia perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x+3z-1=0\\ y-5z+2=0\end{cases}$

Sol: a) $x+6y+15z+23=0$; b) No hay

08.- Estudiar la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases}x=1+2t\\ y=0\\ z=2+2t\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=1\\ z=y+2\end{cases}$ y obtener si es posible el ángulo que forman.

Sol: secantes.

09.- Dada la recta $r:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x+my+2z-3=0$, hallar razonadamente:

a) El valor de m para que r y π sean paralelos.

b) Los valores de m para que r y π sean perpendiculares

c) ¿Existe algún valor de m para el que la recta r esté contenida en el plano π?

Sol: a) m=2; b= m=-4; c) No existe

10.- Estudiar la posición relativa de los planos
$\pi_1: mx+y-z=1$
$\pi_2: 2x-y+mz=3$ según los valores de m.
$\pi_3: x-2y+(m+1)z=3m-1$

Sol: Si m≠1 secantes en un punto; si m=1, secantes dos a dos.

11.- Hallar el valor de k para que los planos
$\pi_1: x+y+z=2$
$\pi_2: 2x+3y+z=3$ tengan una recta común.
$\pi_3: kx+10y+4z=11$

Sol: k=7.

12.- Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto A(1,2,1) y corta perpendicularmente a la recta $s:\begin{cases}x-y-z=1\\ x+z=2\end{cases}$

Sol: $x=1-\lambda;\ y=2+\lambda;\ z=1+\lambda$

13.- Hallar el valor de p para que las rectas $r:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ y $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-p}{p-1}=\dfrac{z-3}{3}$ sean perpendiculares, el punto de intersección y la ecuación del plano que determinan.

Sol: a) p=6; b) (0,1,0); c) 8x+5y-11z-5=0

14.- Deducir una ecuación para el plano π que es perpendicular a $\pi_1: x-6y+z=0$ y que contiene a la recta intersección de $\pi_2: 4x-2y+z=2$ y $\pi_3:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=2+\lambda+\mu\\ z=1+\lambda+2\mu\end{cases}$

Sol: 13x+2y-z-15=0

15.- Los puntos A(3,3,5) y B(3,3,2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C, consecutivo de B, está en la recta de ecuaciones $r: x=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. Determinar los vértices C y D.

Sol: $C\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2},2\right)$ y $D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{11}{2},5\right)$

16.- Dados el plano $\pi: x+3y-z=1$ y la recta $r:\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación general del plano π’ que contiene a r y es perpendicular a π. **b)** Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π’.

Sol: a) $\pi': -5x+7y+16z-17=0$ *b)* $r:\begin{cases}x=-2+5\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$

17.- Obtén el valor de a para el cual las rectas $r: x=y=z-a$ y $s:\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{0}$ se corten, y hallar el punto de corte.

Sol: a=3; y se cortan en (-1,-1,2)

18.- Sea el plano $\pi \equiv$ 2x+y-z+8=0 **a)** Calcula el punto *P’*, simétrico del punto *P*(2,-1,5) respecto del plano π. **b)** Calcula la recta *r’*, simétrica de la recta:

$$r\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$$

Sol: a) P’(-2,-3,7); b) $r'\equiv\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-8}{-11}=\dfrac{z-8}{-1}$

19.- ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = y = z+1$ y $s: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1+t \\ z = t \end{cases}$

Sol: No

20.- Determinar la recta que pasa por el punto $A = (1,1,2)$ y es paralela a la recta: $r: \begin{cases} 2x+y-3z-2=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

Sol: x-1=y-1=z-2

21.- Dado el plano $\pi: x-y+z-3=0$, determinar todos los planos que contienen a los puntos A=(-1,0,0), B=(0,1,0) y forman un ángulo de 30° con el plano π.

Sol :

22.- Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1, 3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1, m)$ **a)** Calcula *m* para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en un mismo plano. **b)** Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos *A* y *B* son simétricos. **c)** Calcula el área del triángulo *A*, *B* y *C*.

Sol: a) m=3; b) x+z-3=0; c) √2

23.- Considera el punto P(-3,1,6) y la recta r dada por:

$$\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*. **b)** Calcula las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.

Sol: a) x+2y+2z-11=0; b) P'(9,1,0)

24.- Los puntos A(0,1,1) y B(2,1,3) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta r, dada por: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$ **a)** Calcula las coordenadas de los posibles puntos C de r, para que el triángulo tenga un ángulo recto en el vértice A. **b)** Calcula las coordenadas de los posibles puntos D de r para que el triángulo ABD tenga un área de √2.

Sol: a) C(1,-2,0); b) $D_1(-1,2,0)$ $D_2(-1/9,2/9,0)$

25.- Dado el plano Π_1 de ecuación $z = 0$, escriba las ecuaciones de dos planos Π_2 y Π_3 tales que los planos Π_1, Π_2 y Π_3 se corten dos a dos pero no exista ningún punto común a los tres.

Sol: Respuesta abierta.

26.- Sea el punto P(1,6,-2) y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

a) Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r. **b)** Calcula la distancia d entre el punto P y la recta r.

Sol: a) -4x+2y+15z+22=0; b) $d = \sqrt{20}$

27.- Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta r, que contiene al punto P(3,-5,4) y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z}{4}$.

Sol: x=3+6t; y= -5+10t; z=4

28.- Determinar los parámetros reales α y β para los cuales la recta definida por las ecuaciones:

$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+3t \\ z = -1+2t \end{cases}$ donde $(t \in \mathbb{R})$ está contenida en el plano

$\pi: \alpha x + 4y - 7z = \beta$

Sol: No existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / r está contenida en π

29.- Sea la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de r que equidista del origen de coordenadas y del punto P(4,-2,2); **b)** Determina el punto de la recta r más próximo al origen de coordenadas.

Sol: a) A(7,11,3); b) (-11/13, 7/13, 5/13)

30.- Considera los puntos B(1,2,-3),C(9,-1,2), D(5,0,-1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.

a) Calcula el área del triángulo BCD. **b)** Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Sol: a) $A = 2\sqrt{3}$ *u.a.* ; b) A(1,-2,-2)

31.- Calcular m y n para que la recta de ecuación continua $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{-y+2}{n} = \dfrac{z+3}{2}$, sea perpendicular al plano de ecuación $\pi: 2x+5y-z+4=0$.

Sol: m=10 y n=-4

32.- Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4} \quad \text{y} \quad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3}$$

a) Estudiar su posición relativa en el espacio; **b)** Calcula la distancia entre ellas.

Sol: Se cruzan, $d(r,s) = \dfrac{17\sqrt{237}}{79}$

33.- Calcula, de manera razonada, un plano que sea paralelo al plano de ecuación $x+y+z=1$ y determine con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea $18\sqrt{3}$.

Sol: $x+y+z=18$

34.- Razonar si se puede construir un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las siguientes rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = y = z+1 \qquad s: \begin{cases} x-2y=2 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

Sol: Si

35.- **a)** Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano: $\pi: 3x-2y+z=6$ con los tres ejes coordenados. **b)** Ecuación de una recta perpendicular al plano π y de otra paralela al mismo, pasando ambas por el origen de coordenadas.

Sol: a) $A = 3\sqrt{14}$ *u.a.; b)* $x = 3t;\ y = -2t;\ z = t$

36.- Se consideran las rectas: r_1 que pasa por los puntos A(0,1,0) y B(1,1,0) y r_2 que pasa por los puntos C(-1,2,1) y D(2,3,4). Estudiar la posición relativa de dichas rectas.

Sol: Se cruzan.

37.- Sean los planos $\pi_1 \equiv x+3y+2z-5=0$ y $\pi_2 \equiv -2x+y+3z+3=0$. **a)** Determina el ángulo que forman. **b)** Calcula el volumen del tetraedro limitado por π_1 y los planos coordenados.

Sol: a) 60°; b) 125/36 u.a.

38.- Determinar la recta que pasa por el punto A=(1,1,2) y es paralela a la recta: $r: \begin{cases} 2x+y-3z-2=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$

Sol: $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z-2}{-5}$

39.- Sean la recta r y el plano π dados por:

$$r: \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad \pi: 2x-y+z-1=0$$

a) Calcule el seno del ángulo que forman la recta r y el plano π. **b)** Halle las ecuaciones de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

Sol:

40.- Halle a y b para que los tres planos $\pi : x+2y-z=1$, $\pi' : 2x+y+az=0$ y $\pi'' : 3x+3y-2z=b$ contengan una misma recta r. Determine unas ecuaciones paramétricas de la recta r.

Sol:

41.- Sea la recta definida por $r : \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas; b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto (1,1,0).

Sol: a) $-5x+5y-4z=0$; b) $x=-2+3t+5s$; $y=t$; $z=s$

42.- Sea la recta dada por $\frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$ y sea la recta dada por $\begin{cases} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{cases}$; a) Determina la posición relativa de r y s; b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Sol: a) Se cruzan; b) $6x-9y+z+2=0$

43.- Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo. **a)** Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo. **b)** Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas. **c)** Calcula el área del triángulo ABC.

Sol: a) $x-2z+3=0$; b) $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-2}$; c) $A=4\sqrt{5}\ u^2$

44.- Sean $r \equiv x=y=z$ $\quad s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\quad t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$ tres rectas, halla la ecuación de la recta que corta a **r** y a **s** y es paralela a **t**.

Sol: $\frac{x-4}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-4}{1}$

45.- Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$. **a)** Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo. **b)** Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo. **c)** Calcula las coordenadas del vértice D.

Sol: a) $x+y+z-2=0$; b) $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{-6}$; c) $D(0,3,-1)$

46.- Considera los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(-1,0,4)$. **a)** Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales. **b)** Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

Sol: a) $M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3}\right)$ y $N\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{11}{3}\right)$ b) $-2x-2y+z+3=0$

47.- Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos. **a)** Halla la ecuación de la recta r que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r. **b)** Calcula la distancia de A a r.

Sol: a) $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-3/2}{2}$; b) $d=3/2$ u.

48.- Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$, respecto de la recta r de ecuaciones: $x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

Sol: (9,1,0)

49.- Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$. **a)** Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo. **b)** Calcula el área de dicho rectángulo.

Sol: a) Tu qué crees; b) $A=2\sqrt{6}\ u^2$.

50.- Determina el punto de la recta $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+1$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x-y+3z+2=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-4+\lambda-3\mu \\ y=1+\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

Sol: $P\left(\frac{5}{8},\frac{-3}{4},\frac{-11}{8}\right)$

51.- Considera el plano π de ecuación $2x+y+3z-6=0$.
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

Sol: a) $A=3\sqrt{14}\ u^2$; b) $V=6\ u^3$

52.- Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$. **a)** Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C. **b)** Halla el punto simétrico de D respecto del plano $x-y-5z+9=0$.

Sol: a) $x-y-5z+9=0$; b) $D'\left(\frac{47}{27},\frac{-20}{27},\frac{8}{27}\right)$

53.- Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-6}=\frac{y-9}{4}=\frac{z-8}{4}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-2}$ **a)** Determina la posición relativa de las recta r y s. **b)** Calcula la distancia entre r y s.

Sol: a) Paralelas; b) $\frac{12\sqrt{34}}{17}\ u^2$

54.- Sea la recta r dada por $\begin{cases} 2x+y-mz=2 \\ x-y-z=-m \end{cases}$ y el plano π definido por $x+my-z=1$. **a)** ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos? **b)** ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano? **c)** ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m = 0?

Sol:

55.- Se sabe que los planos de ecuaciones π_1: $x+2y+bz=1$, π_2: $2x+y+bz=0$, y π_3: $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta r. **a)** Calcula el valor de b. **b)** Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

Sol:

56.- Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto $P=(0, a, b)$ esté en el plano determinado por los puntos $A=(1, 0, 0)$, $B=(1, 1, 1)$ y $C=(0, 2, 1)$.

Sol: a-b=1

57.- Dadas las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+bz=0 \end{cases}$$

determine la relación que debe existir entre a y b para que:
a) r y s sean paralelas. **b)** r y s sean perpendiculares.

Sol: a) a=b; b) a=-b

58.- Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,0,0)$ y $C(0, 2, 1)$, sea r la recta que pasa por A y B, y sea también Π el plano que pasa por C y es perpendicular a la recta r. Calcula el punto P_0 en el que se cortan la recta r y el plano Π.

Sol: $P_0\left(1,-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

59.- a) Determina los valores del parámetro a para los que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: (1,1,a), (a,3,2) y (0,0,a), son linealmente independientes. Justifica la respuesta. **b)** Determina la posición relativa de los planos cuyas ecuaciones son: $\pi_1 \equiv x+y+3z=5$, $\pi_2 \equiv 3x+3y+2z=8$ y $\pi_3 \equiv 3z=3$.

Sol:

60.- a) Determina la ecuación del plano que es paralelo al vector $\vec{u} = (1,2,3)$ y contiene a la recta que pasa por el punto P(1,1,1) y es paralela al vector $\vec{v} = (1,1,1)$. **b)** Determina la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular al vector $\vec{u} = (1,2,3)$.

Sol:

61.- Prueba que todos los planos de la familia $(3+\lambda)x + (3-\lambda)y + (5-2\lambda)z = \lambda$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

Sol:

62.- Los puntos A(-2,3,1); B (2,-1,3) (0,1,-2) son vértices consecutivos del paralelogramo ABCD. **a)** Halla las coordenadas del vértice D. **b)** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC. **c)** Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo.

Sol: a) D(-4,5,-4); b) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$; c) x+y-1=0

63.- Sea la recta dada por $r: \begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{cases}$ y el plano π: $x+my-z=1$. **a)** ¿Existe algún valor de m para el que π y r son paralelos?. **b)** ¿Para qué valor de m está la recta contenida en el plano?. **c)** ¿Cuál es la posición relativa de la recta y el plano cuando m = 0 ?

Sol: a) m=2; b) m=-1; c) Secante.

64.- Sea la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ y sean los planos π_1 de ecuación x+y+z=0, y π_2 de ecuación y+z=0 . Halla la ecuación de la recta contenida en el plano π_1, que es paralela al plano π_2 y que corta a la recta r.

Sol: Ec's paramétricas {x=1; y=1-t; z=-2+t}

65.- a) Halla los dos puntos que dividen al segmento de extremos A(1,2,1) y B(-1,0,3) en tres partes iguales. **b)** Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por su punto medio.

Sol: a) M(1/3,4/3,5/3) y N(-1/3,2/3,7/3); b) x+y-z+1=0

66.- Considera el plano π de ecuación 2x+y-z+2=0 y la recta r de ecuación: $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$. **a)** Halla la posición relativa de *r* y π según los valores del parámetro *m*. **b)** Para *m* = –3, halla el plano que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π . **c)** Para *m* = –3, halla el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo al plano π .

Sol: a) si m≠-3 secantes, y si m=-3 paralela al plano; b) -x+4y+2z-7=0; c) 4x+2y-2z-8=0

67.- Considera la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y no corta al eje *OZ*. **b)** Calcula la proyección ortogonal del punto *A*(1, 2,1) sobre la recta *r*.

Sol: a) 2x+5y-3=0; b) (1/19, 11/19,7/19)

68.- Considera los puntos *A*(1,0,-2) y *B* (-2,3,1) **a)** Determina los puntos del segmento *AB* que lo dividen en tres partes iguales. **b)** Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, donde *C* es un punto de la recta de ecuación -x=y-1=z. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto *C*?

Sol: a) M(0,1,-1) y N(-1,2,0); b) A=3√2/2 y no depende.

69.- Sean *A*(-3,4,0); B(3,6,3) y C(-1,2,1) los vértices de un triángulo. **a)** Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo. **b)** Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas. **c)** Calcula el área del triángulo *ABC*.

Sol: a) x-2z+3=0; b) $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$; c) A=4√5

70.- Considera un plano $\pi \equiv x+y+mz=3$ y la recta $x = y - 1 = \frac{z-2}{2}$ **a)** Halla *m* para que *r* y π sean paralelos. **b)** Halla *m* para que *r* y π sean perpendiculares. **c)** ¿Existe algún valor de *m* para que la recta *r* esté contenida en el plano π ?.

Sol: a) m=-1; b) m=2; c) No existe.

71.- Sean los puntos A (1,2,1); B (2,3,1); C (0,5,3) y D (—1,4,3). **a)** Prueba que los 4 puntos están en el mismo plano. Halla la ecuación de dicho plano. **b)** Demuestra que el polígono de vértices consecutivos ABCD es un rectángulo. **c)** Calcula el área de dicho rectángulo.

Sol: A=2√6 u.a.

72.- Considera los puntos *P*(6,-1,-10), *Q*(0,2,2) y *R*, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x+\lambda y+z-2=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. Determina λ , sabiendo que *P*, *Q* y *R* están alineados.

Sol: λ=0

73.- Calcula el área del triángulo de vértices *A*(0,0,1) , *B* (0,1,0) y *C*, siendo *C* la proyección ortogonal del punto (1,1,1) sobre el plano x+y+z=1.

Sol: $A = \frac{\sqrt{3}}{6} u.a.$

74.- Se sabe que el triángulo *ABC* es rectángulo en el vértice *C*, que pertenece a la recta intersección de los planos *y+z=1* e *y-3z+3=0*, y que sus otros dos vértices son *A*(2,0,1) y *B*(0,-3,0). Halla *C* y el área del triángulo *ABC*.

Sol: C(0,0,1) ; $A = \sqrt{10}$ u.a.

75.- Halla la recta perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta - 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Sol: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$

76.- ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones *ax+by+cz=d* , *a'x+b'y+c'z=d'* de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

Sol: La relación que deben guardar es: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ Ello se debe a:

1. La doble igualdad implica que los vectores normales son proporcionales y por tanto paralelos.
2. La desigualdad hace que no hablemos del mismo plano.

77.- Si los lados de un rectángulo ABCD miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo PAC, donde P es el punto medio del lado BC.

Sol: $\cos\alpha = \frac{9\sqrt{85}}{85} = 0{,}976$

78.- Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación *x* + *y* + *z* = 3, que corte a la recta de ecuaciones *x*=0, *z*=0, y que también corte a la recta de ecuaciones *z*=1, *y*=0.

Sol: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$