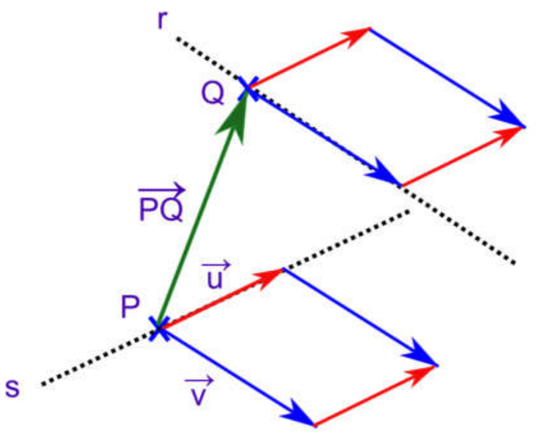
Departamento de Matemáticas
I.E. Juan Ramón Jiménez
Casablanca (Marruecos)

Tema 12

Problemas Métricos



Raúl González Medina
I.E. Juan Ramón Jiménez
Tema 12

12.0.- Introducción

Al trabajar en el espacio se nos pueden presentar dos tipos de problemas con los elementos habituales (puntos, rectas y planos):

- ***Problemas Afines:*** Son los que tratan de incidencias (¿pertenece un punto a una recta? o ¿está esta recta contenida en este plano?), paralelismo, posición relativa de dos o más elementos en el espacio e intersecciones. Tratados en el capítulo anterior.

- ***Problemas métricos:*** Son aquellas situaciones en las que intervienen distancias entre los diferentes elementos del espacio o intervienen ángulos. Por ejemplo, la perpendicularidad es una cuestión métrica.

Abordaremos en esta unidad problemas de éste último tipo.

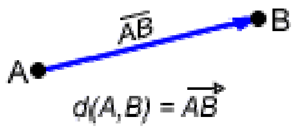
12.1.- Distancias

Desde un punto de vista formal, para un conjunto de elementos X se define **distancia** o **métrica** como cualquier función matemática o aplicación $d(a,b)$ de X x X en $\mathbb{R}$ que verifique las siguientes condiciones:

- **No negatividad:** $d(a,b)\geq 0 \quad \forall a,b\in X$
- **Simetría:** $d(a,b)=d(b,a) \quad \forall a,b\in X$
- **Desigualdad triangular:** $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b) \quad \forall a,b,c\in X$
- $\forall x\in X : d(x,x)=0$.
- Si $x,y\in X$ son tales que $d(x,y)=0$, entonces $x=y$.

12.1.1.- Distancia entre dos puntos

La **distancia** entre dos puntos del espacio euclídeo equivale a la longitud del segmento de la recta que los une, expresado numéricamente



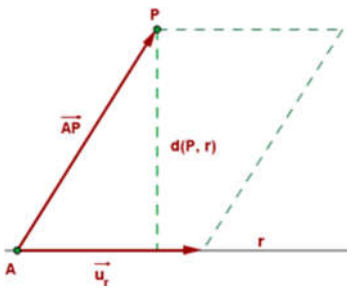
La distancia entre dos puntos $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ es el módulo del vector que une dichos puntos:

$$\boxed{d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$

Ejemplo 1: ***Calcular la distancia entre los puntos A(3,-2,1) y B(5,3,-4)***

$$d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(3+2)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$

12.1.2.- Distancia de un punto a una recta



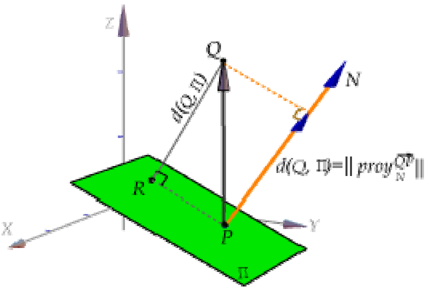
Se llama distancia de un punto a una recta a la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta. *Es **la menor de las distancias** entre el punto dado y un punto cualquiera de la recta.*

Sea la recta definida r definida por $\begin{cases} p\in r \\ \overrightarrow{dr} \end{cases}$ y sea Q un punto exterior. La distancia de Q a la recta r viene dada por: $\boxed{d(Q,r)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}}$

Ejemplo 2: ***Calcular la distancia entre el punto Q(1,-1,2) y la recta*** $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$

$$d(Q,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}=\frac{\left\|(0,-1,2)\wedge(2,1,-2)\right\|}{\left\|(2,1,-2)\right\|}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

12.1.3.- Distancia de un punto a un plano



Sean el plano $\pi : ax+by+cz+d=0$ y el punto P(p$_1$,p$_2$,p$_3$), la distancia entre ambos se calcula mediante la expresión:

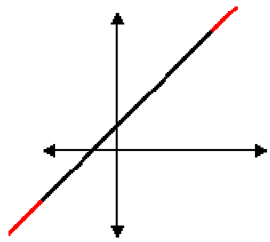
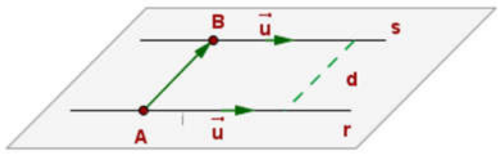
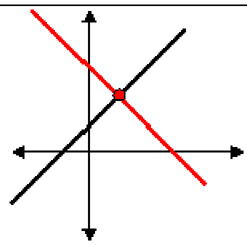
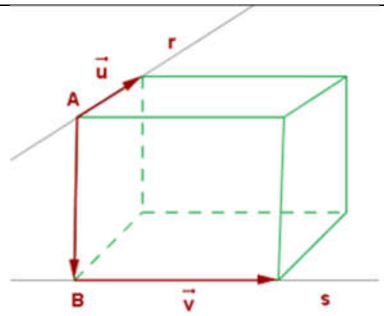
$$d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|}$$

Ejemplo 3: ***Calcular la distancia entre el punto Q(1,-1,2) y el plano*** $\pi : x-2y+z=1$

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\|\overrightarrow{n_\pi}\|}=\frac{|1+2+2-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

12.1.4.- Distancia entre dos rectas

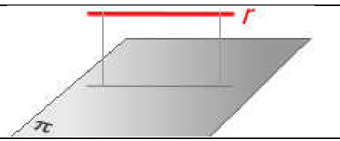
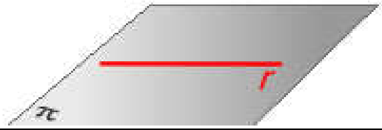
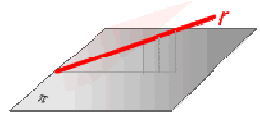
Sean la recta r y la recta s, dadas por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}\\ P_r\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{ds}\\ Q_s\end{cases}$

Posición Relativa	Distancia	Dibujo
Rectas Coincidentes	$d(r,s)=0$	
Rectas Paralelas	$d(r,s)=d(P_r,s)$ Es igual a la distancia de un punto de la recta ***r*** a la recta ***s***. $d(P_s,r)=\frac{\|\overrightarrow{P_rQ_s}\wedge\overrightarrow{ds}\|}{\|\overrightarrow{ds}\|}$	
Rectas Secantes	$d(r,s)=0$	
Rectas que Se Cruzan	$d(r,s)=\frac{\left\|\det(\overrightarrow{P_rQ_s},\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds})\right\|}{\|\overrightarrow{dr}\wedge\overrightarrow{ds}\|}$	

© Raúl González Medina 2016

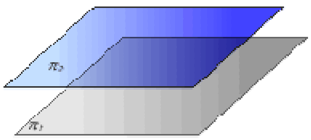
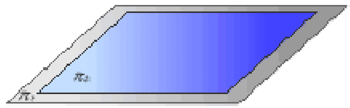
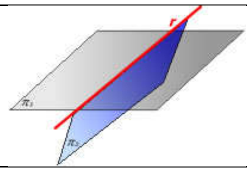
12.1.5.- Distancia de una recta a un plano

Sea la recta r dada por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}\\ P_r\end{cases}$ y el plano π dado por $\pi: ax+by+cz+d=0$

Posición Relativa	**Paralelos**	**Recta Contenida en Plano**	**Secantes**
Distancia	$d(r,\pi)=d(P_r,\pi)$ $d(P_r,\pi)=\dfrac{\lvert ap_1+bp_2+cp_3+d\rvert}{\lVert\overrightarrow{n_\pi}\rVert}$	$d(r,\pi)=0$	$d(r,\pi)=0$
Dibujo			

12.1.5.- Distancia entre dos planos

Sean los planos π y π' dados por $\pi: ax+by+cz+d=0$ y $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

Posición Relativa	**Paralelos**	**Coincidentes**	**Secantes**
Distancia	$d(\pi,\pi')=\dfrac{\lvert d-d'\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	$d(\pi,\pi')=0$	$d(\pi,\pi')=0$
Dibujo			

12.2.- Ángulos

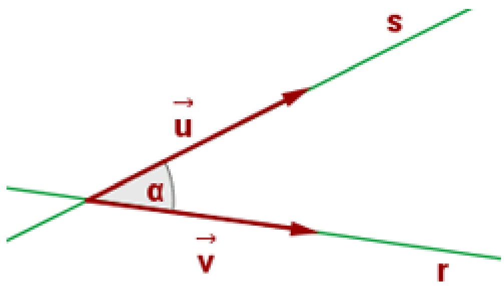
Para estudiar el ángulo entre dos rectas, recta y plano y dos planos, necesitaremos los vectores directores de las rectas y los vectores normales de los planos. Con la expresión del producto escalar, calcularemos el menor ángulo que forman las direcciones dadas por los vectores directores y normales.

12.2.1.- Ángulo entre dos rectas

Sean la recta *r* y la recta *s*, dadas por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}=(r_x,r_y,r_z)\\ P_r=(p_1,p_2,p_3)\end{cases}$ y $s:\begin{cases}\overrightarrow{ds}=(s_x,s_y,s_z)\\ Q_s=(q_1,q_2,q_3)\end{cases}$.

El ángulo α que forman ambas rectas viene dado por:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{\lvert\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{ds}\rvert}{\lVert\overrightarrow{dr}\rVert\cdot\lVert\overrightarrow{ds}\rVert}=\frac{\lvert r_x\cdot s_x+r_y\cdot s_y+r_z\cdot s_z\rvert}{\sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}\cdot\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}}}$$



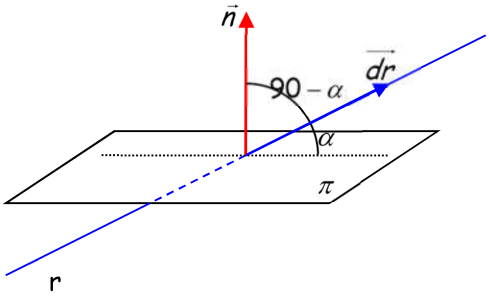
Nota: El ángulo siempre es el menor de los ángulos.

© Raúl González Medina 2016

12.2.2.- Ángulo entre recta y plano

Sean la recta r, dada por $r:\begin{cases}\overrightarrow{dr}=(r_x,r_y,r_z)\\ P_r=(p_1,p_2,p_3)\end{cases}$ y el plano $\pi: ax+by+cz+d=0$

En ángulo α formado por la recta y el plano es complementario del ángulo que forman el vector normal del plano $\vec{n}$ y el vector director de la recta $\overrightarrow{dr}$



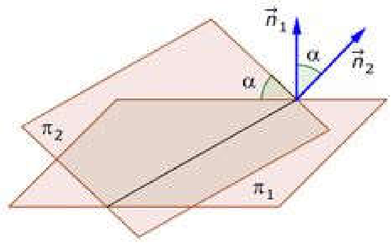
$$\boxed{sen\alpha = sen(r,\pi)=\left|\cos(\overrightarrow{dr},\vec{n})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{n_\pi}\right|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}}$$

La recta r, será paralela al plano π, cuando el producto escalar $\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0$, o lo que es lo mismo: $r_x\cdot a+r_y\cdot b+r_z\cdot c=0$.

12.2.3.- Ángulo entre dos planos

Sean los planos $\pi: ax+by+cz+d=0$ y $\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$, el ángulo entre ambos es el mismo que el ángulo entre sus vectores normales $\vec{n}$ y $\overrightarrow{n'}$.

$$\boxed{\cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\overrightarrow{n'})=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'}}{\left\|\vec{n}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{n'}\right\|}=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$



12.3.- Recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan

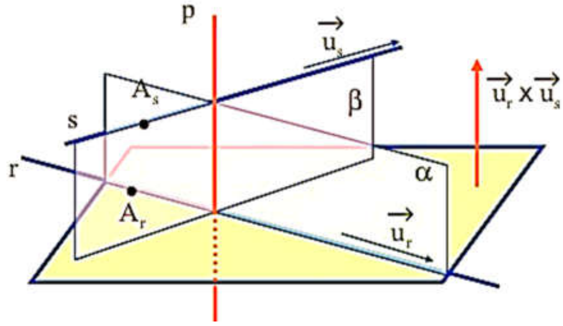
Para calcular la recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan, seguiremos el siguiente método:

- Escribimos las rectas r y s en paramétricas.
- Obtenemos de cada una de ellas un punto genérico (A y B respectivamente), y sus vectores directores $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{ds}$.
- Hallamos las componentes del vector que une los puntos A y B , $\overrightarrow{AB}$, como éste vector es ortogonal a $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{ds}$, los productos escalares $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{dr}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ds}=0\end{cases}$ son nulos, y del sistema formado podemos despejar los dos parámetros.
- Sustituimos los valores hallados en las expresiones genéricas de A y B, y ya tenemos estos puntos. Con un punto y el vector, ya tenemos la ecuación de la recta.

Aunque podemos dar la recta también como intersección de dos planos: La recta p, perpendicular común queda determinada por el corte de los planos α y β.

Se observa que p viene dada por: $p:\begin{cases}\det\left(\overrightarrow{A_rX},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r\wedge u_s}\right)\\ \det\left(\overrightarrow{A_sX},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{u_r\wedge u_s}\right)\end{cases}$

(Ver figura)



Ejemplo 4: ***Obtener la perpendicular común a las rectas*** $r:\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ ***y*** $s:\begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$

Para obtener la perpendicular común a dos rectas que se cruzan, lo primero es escribir las rectas en forma paramética:

Recta r:

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}_1=(0,1,0) \\ \vec{n}_2=(0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{dr}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1,0,0) \Rightarrow \text{ Si x=1} \Rightarrow \text{Un punto de r es el P(1,0,0)} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Recta s:

$$\left.\begin{matrix} \vec{n}_1=(1,0,0) \\ \vec{n}_2=(0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{ds}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(0,-1,0) \Rightarrow \text{ Si y=1} \Rightarrow \text{Un punto de r es el Q(0,1,3)} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$$

Obtenemos un punto genérico de cada una: $\begin{matrix} A\in r; A(1+t,0,0) \\ B\in s; B(0,1-\lambda,3) \end{matrix}$

Hallamos las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1-t,1-\lambda,3)$

Y este vector tiene que ser perpendicular al vector director de r $\overrightarrow{dr}$ y al vector director de s $\overrightarrow{ds}$.

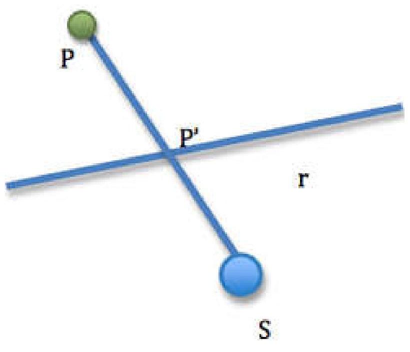
$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{ds}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} (1,0,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0 \\ (0,-1,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -1-t=0 \\ -1+\lambda=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} t=-1 \\ \lambda=1 \end{matrix}$$

Si sustituimos en las rectas r y s, obtenemos los puntos: A(0,0,0) y B(0,0,3)

Ya tenemos dos puntos de la recta, como $\overrightarrow{AB}=B-A=(0,0,3)$, la recta perpendicular común a r y s, es: $r'\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3t \end{cases}$

12.4.- Simetrías

12.4.1.- Simétrico de un punto A respecto de una recta



Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta, seguiremos los pasos siguientes:

1) Hallamos el plano perpendicular a la recta *r*, que pasa por el punto *A*.
2) Hallamos el punto de intersección, *M*, entre la recta y el plano.
3) Hallamos el punto simétrico *A'* con la condición de que *M* sea el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

Las coordenadas del punto medio de un segmento se calculan:

$$M=\frac{A+A'}{2}$$

Ejemplo 5: ***Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta r:*** $x-1=y+3=\frac{z-4}{2}$

Calculamos el plano perpendicular a ***r*** que contiene al punto A(1,3,7).

Para ello hacemos el producto escalar del vector director de la recta ***dr=(1,1,2)*** por el vector perpendicular a la recta y que pasa por le punto (x-1,y-3,z-7)

$$(1,1,2)\cdot(x-1,y-3,z-7)=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+2z-18=0}$$

Calculamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

Para ello escribimos la recta r en forma paramétrica $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+t \\ z=4+2t \end{cases}$ y la sustituimos en el plano π.

$$1+t-3+t+8+4t-18=0 \Rightarrow 6t-12=0 \Rightarrow t=2$$

Y sustituyendo en la ecuación paramétrica obtenemos el punto deseado.

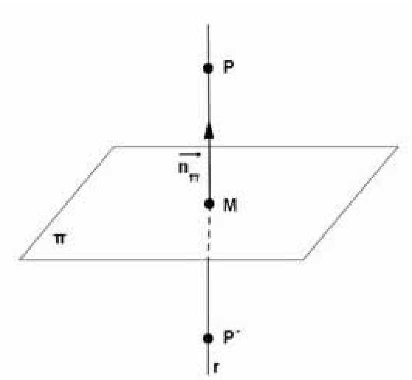
Punto de intersección de r y π $\boxed{H=(3,-1,8)}$

H es el punto medio entre A y su simétrico A, por tanto: $H=\dfrac{A+A'}{2}$

$A'=2H-A$ ➔ (6,-2,16)-(1,3,7)=(5,-5,9).

Y el punto simétrico del (1,3,7) es el punto $A'=(5,-5,9)$

12.4.2.- Simétrico de un punto A respecto de un plano



Para hallar el simétrico de un punto respecto de un plano, seguiremos los pasos siguientes:

- ✓ Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.
- ✓ Hallamos el punto de intersección, M, entre la recta y el plano.
- ✓ Hallamos el punto simétrico P' con la condición de que M sea el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

$$M=\frac{P+P'}{2} \quad \rightarrow \quad P'=2M-P$$

<u>Ejemplo 6:</u> ***Hallar el punto simétrico de P(1,2,3) respecto del plano*** $\pi: x-3y-2z+4=0$

Primero calculamos la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto p:

El vector director de la recta será el vector normal del plano: $\vec{dr}=\vec{n_\pi}=(1,-3,-2)$

Así que la recta perpendicular al plano que pasa por el punto p será: $r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-3t \\ z=3-2t \end{cases}$

Calculamos el punto M que es el punto intersección entre la recta y el plano sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano π.

$$(1+t)-3(2-3t)-s(3-2t)+4=0 \quad \rightarrow \quad 14t-7=0 \quad \rightarrow \quad t=\frac{1}{2}$$

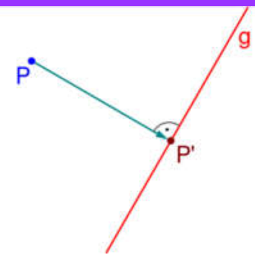
Por tanto las coordenadas del punto M serán: $M:\begin{cases} x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ y=2-3\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ z=3-2\frac{1}{2}=2 \end{cases} \rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right)$

Ahora obligamos al punto M a ser el punto medio entre el punto P y su simétrico P'.

$$\left.\begin{array}{l} M_x=\dfrac{P_x+P_x'}{2} \rightarrow P_x'=2\cdot M_x-P_x=2\cdot\dfrac{3}{2}-1=2 \\ M_y=\dfrac{P_y+P_y'}{2} \rightarrow P_y'=2\cdot M_y-P_y=2\cdot 2-3=1 \\ M_z=\dfrac{P_z+P_z'}{2} \rightarrow P_z'=2\cdot M_z-P_z=2\cdot\dfrac{1}{2}-2=-1 \end{array}\right\} \leftrightarrow \text{Coordenadas de } P'(2,1,-1)$$

12.5.- Proyecciones Ortogonales

12.5.1.- Proyección ortogonal de un punto sobre una recta



La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r, será otro punto P' perteneciente a la recta y tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ que una los puntos P y P' es perpendicular al vector director de la recta.

Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre una recta dada por la ecuación:

$$r: \frac{x-p_x}{v_x} = \frac{y-p_y}{v_y} = \frac{z-p_z}{v_z}$$

debemos seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P. Para ello, utilizamos el vector director de la recta como vector normal del plano y utilizamos la ecuación del plano dado su vector normal y un punto:
$$v_x \cdot (x-p_x) + v_y \cdot (y-p_y) + v_z \cdot (z-p_z) = 0$$
2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección entre la recta y el plano. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.
$$v_x\left(a_x + v_x t - p_x\right) + v_y\left(a_y + v_y t - p_y\right) + v_z\left(a_z + v_z t - p_z\right) = 0$$
de donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:
$$t = \frac{v_x(p_x - a_x) + v_y(p_y - a_y) + v_z(p_z - a_z)}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ejemplo 7: **Halla la proyección ortogonal del punto P(1,2,–1) sobre la recta r de ecuación:** $r: \frac{x+2}{3} = y-1 = \frac{z+1}{2}$

En primer lugar, hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto P:
El vector normal de dicho plano será el vector director de la recta: dr=(3,1,2) , y la ecuación del plano es de la forma: $3x + y + 2z + k = 0$
Como debe pasar por el punto P (1,2,–1):

$$3\cdot 1 + 2 + 2\cdot(\ ) - 1 + k = 0 \Rightarrow 3 + 2 - 2 + k = 0 \Rightarrow k = -3$$

Tenemos: $\pi: 3x + y + 2z - 3 = 0$

Resolvemos el sistema, pasando primero la ecuación de la recta a su forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \end{cases}$

$$3(-2+3t) + (1+t) + 2(-1+2t) - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 14t - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{5}{7}$$

y sustituyendo el valor de t en la ecuación paramétrica, obtenemos: $\left\{x = \frac{1}{7}, y = \frac{12}{7}, z = \frac{3}{7}\right\}$

Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r será el punto $P'\left(\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7}\right)$

<u>Aunque también se podría hacer de esta otra manera:</u>

1. Como Q pertenece a la recta, sus coordenadas deben verificar la ecuación de la recta:
$$q_1 = a_1 + v_1 \cdot t \qquad q_2 = a_2 + v_2 \cdot t \qquad q_3 = a_3 + v_3 \cdot t$$
2. El vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta, por tanto, el producto escalar de dicho vector con el vector director cela recta es cero:
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1\left(q_1 - p_1\right) + v_2 \cdot \left(q_2 - p_2\right) + v_3\left(q_3 - p_3\right) = 0$$

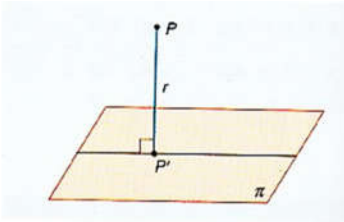
3. Resolvemos la ecuación resultante:

$$v_1 \cdot (a_1 + v_1 \cdot t - p_1) + v_2 \cdot (a_2 + v_2 \cdot t - p_2) + v_3 \cdot (a_3 + v_3 \cdot t - p_3) = 0$$

4. De donde hallamos el valor de t que nos permitirá calcular las coordenadas del punto Q:

$$t = \frac{v_1 (p_1 - a_1) + v_2 (p_2 - a_2) + v_3 (p_3 - a_3)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

12.5.2.- Proyección ortogonal de un punto sobre un plano



La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es otro punto Q perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.

Para hallar la proyección ortogonal de un punto sobre un plano dado por la ecuación:

$$\pi : A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Debemos de seguir los siguientes pasos:

1. Determinar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

   Para ello, utilizamos el vector normal al plano como vector director de la recta: $r : \begin{cases} x = p_1 + At \\ y = p_2 + Bt \\ z = p_3 + Ct \end{cases}$

2. El punto que estamos buscando (la proyección ortogonal) es el punto de intersección entre la recta con el plano.

   Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y del plano.

$$A \cdot (p_1 + At) + B(p_2 + Bt) + C(p_3 + Ct) + D = 0$$

   De donde:

$$t = -\frac{D + Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Ejemplo 8: **Halla la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano** $\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0$

En primer lugar, calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v} = (1, -2, 3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es: $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

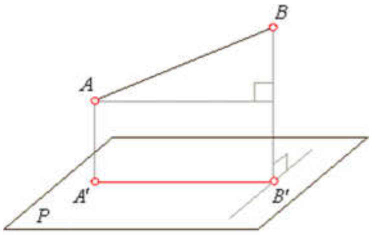
Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi : x - 2y + 3z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1 + t) - 2(3 - 2t) + 3(2 + 3t) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 14t - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{1}{14}$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\begin{cases} x = -\dfrac{9}{14} \\ y = \dfrac{16}{7} \\ z = \dfrac{29}{14} \end{cases}$

Por tanto la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano π es el punto $Q\left(-\frac{9}{14}, \frac{16}{7}, \frac{29}{14}\right)$

12.5.3.- Proyección ortogonal de una recta sobre un plano



La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π.

Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano que contiene a r y que además es perpendicular al plano dado π. La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los planos π y π'.

Ejemplo 9: **Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano** $\pi : x-2y+3z-1=0$

En primer lugar, calculamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por P:

El vector director de dicha recta es el vector normal del plano: $\vec{v}=(1,-2,3)$

La ecuación de la recta que pasa por P y con vector director $\vec{v}$ es: $r:\begin{cases} x=-1+t \\ y=3-2t \\ z=2+3t \end{cases}$

Determinamos el punto de intersección del plano con la recta:

$$\pi : x-2y+3z-1=0 \quad \Rightarrow \quad (-1+t)-2(3-2t)+3(2+3t)-1=0 \quad \Rightarrow \quad 14t-1=0 \quad \leftrightarrow \quad t=\frac{1}{14}$$

Sustituyendo el valor de t, tenemos: $\begin{cases} x=-\frac{9}{14} \\ y=\frac{16}{7} \\ z=\frac{29}{14} \end{cases}$

Por tanto la proyección ortogonal del punto P(-1,3,2) sobre el plano π es el punto $Q\left(-\frac{9}{14},\frac{16}{7},\frac{29}{14}\right)$

Otra forma de calcular la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, que puede resultar interesante dependiendo del problema al que nos enfrentamos, sería la siguiente:

- Obtener la intersección de la recta *r* con el plano π, que es un punto al que llamaremos P.
- Calculamos la proyección ortogonal de un punto cualquiera de r sobre el plano π, llamémoslo Q.
- Obtenemos la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos P y Q.

Dicha recta será la proyección ortogonal buscada.

Actividades Propuestas:

1.- Halla la proyección ortogonal del punto P(0,3,1) sobre la recta $r:\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$

2.- Halla la proyección ortogonal del punto P(4,0,3) sobre el plano $\pi : 3x-2y+z-2=0$

3.- Halla la proyección ortogonal de la recta $r:\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$ sobre el plano $\pi : 3x-2y+z-2=0$

12.6.- Ejercicios Resueltos

1.- Hallar la distancia del punto P al plano determinado por los puntos A(1,0,1); B(0,0,1); C(1,2,0), siendo P en que la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{-1}$ ***corta al plano*** $\pi: 2x + y - z + 4 = 0$

Lo primero que vamos a hacer es calcular la ecuación del plano, para calcularla, necesitamos 2 vectores directores y un punto.

Vamos a calcular los vectores AB, AC, AX, donde X es el punto(x,y,z) del plano:

$$\vec{AB} = (-1,0,0)$$
$$\vec{AC} = (0,2,-1)$$
$$\vec{AX} = (x-1, y, z-1)$$

Estos tres vectores han de ser coplanarios, y para ello tienen que cumplir que su producto, mixto sea cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ x-1 & y & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-2z+2) - (y) = 0 \rightarrow -y - 2z + 2 = 0$$

Por tanto la ecuación del plano pedido es: $\boxed{y + 2z - 2 = 0}$

Lo siguiente es calcular P. Para ello escribimos la ecuación de la recta ***r*** en forma paramétrica, y la sustituimos en la ecuación del plano ***π***

$$r \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \qquad \pi: y + 2z - 2 = 0$$

$$2(2+2\lambda) + (4+3\lambda) - (4-\lambda) + 4 = 0 \rightarrow 4 - 4\lambda + 4 + 3\lambda - 4 + \lambda + 4 = 0 \rightarrow 8\lambda + 8 = 0$$

De donde obtenemos $\lambda = -1$

Si sustituimos $\lambda = -1$ en la ecuación paramétrica de la recta, obtenemos el punto pedido: $\boxed{P(0,1,5)}$

La distancia de un punto a un plano se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|ap_x + bp_y + cp_z + d|}{\|\vec{n}\|}}$$

Como P(0,1,5) y $\pi: y + 2z - 2 = 0$, sustituyendo, obtenemos:

$$d(P,\pi) = \frac{|ap_x + bp_y + cp_z + d|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|1+10-2|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

2.- Calcular la distancia entre las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}$ ***y*** $s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \\ z = 8 + 2t \end{cases}$

Para calcular la distancia entre dos rectas, lo primero que hay que hacer es ver la posición relativa de ambas rectas.

$$r\begin{cases} P(2,2-1) \\ \overrightarrow{dr}=(3,-1,4) \end{cases} \quad s\begin{cases} Q(5,-1,8) \\ \overrightarrow{ds}=(1,0,2) \end{cases}$$

Vemos que sus vectores directores no son proporcionales, por tanto las rectas, o se cortan o se cruzan. *Si se cortan, la distancia entre ellas es 0, y si se cruzan la distancia se calcula utilizando la expresión:*

$$d(r,s)=\frac{\left|\det(\vec{dr},\vec{ds},\vec{PQ})\right|}{\left\|\vec{dr}\wedge\vec{ds}\right\|}$$

Si el rango de $\begin{pmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix}$ es 2, los vectores son coplanarios y las rectas se cortan, si el rango de $\begin{pmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{pmatrix}$ es 3, entonces los vectores no son coplanarios y las rectas se cruzan.

$$\begin{vmatrix} \vec{dr} \\ \vec{ds} \\ \vec{PQ} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}=(-9-18)-(-6-12)=-27+18=-9\neq 0$$, Por tanto se cruzan.

Como se cruzan, calculamos $\left\|\overrightarrow{dr}\wedge\overrightarrow{ds}\right\|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right\|=\left\|-2i-2j+k\right\|=\sqrt{9}$

Y ahora calculamos la distancia: $d(r,s)=\dfrac{\left|\det(\vec{dr},\vec{ds},\vec{PQ})\right|}{\left\|\vec{dr}\wedge\vec{ds}\right\|}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\sqrt{9}=3$

3.- Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $r:\begin{cases} 3x-2y+2z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$ ***y distan 3 unidades del punto P(-1,1,2). Calcular el seno del ángulo formado por r y el plano coordenado OXY.***

Para la ecuación del plano $\perp$ a una recta, necesitamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{dr}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(-2i+2j)-(-2k+3j)=-2i+2j+2k-3j=(-2,-1,2)$$

Sea $\vec{u}=(x,y,z)$ un vector perpendicular a la recta *r*, un haz de planos perpendiculares a esta recta viene dado por: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{dr}=0$ ➔ $(x,y,z)\cdot(-2,-1,2)=0$

Por tanto el haz de planos es: $-2x-y+2z+K=0$

Si la distancia de P(-1,1,2) al plano es 3. Tenemos que:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|ap_x+bp_y+cp_z+d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}=\frac{\left|2-1+4+k\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\left|5+K\right|}{3}=3$$

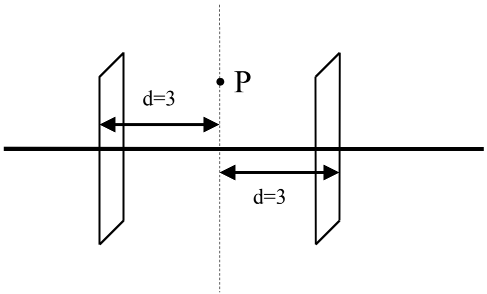
De donde:

$|5+K|=9$ que al resolver obtenemos: K=4 y K= -14

Por tanto las ecuaciones de los planos pedidos son:

$$\boxed{\begin{array}{l}\pi_1 : -2x-y+2z+4=0 \\ \pi_2 : -2x-y+2z-14=0\end{array}}$$

Como el punto P no pertenece a la recta (porque no cumple su ecuación), tenemos dos planos que están a una distancia de 3 unidades, uno por delante del punto y otro por detrás.



Para calcular el seno formado por una recta un plano utilizamos la ecuación:

$$Sen(r,\pi)=|Cos(r,n_\pi)|=\frac{|\vec{ds}\cdot\vec{n_\pi}|}{\|\vec{dr}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|(-2,-1,2)\cdot(0,0,\lambda)|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{\lambda^2}}=\frac{2\lambda}{3\lambda}=\frac{2}{3}$$

Donde el vector $n_\pi=(0,0,\lambda)$ es el vector normal del plano OXY (Z=0). Si cogemos como vector normal el (0,0,1) ó (0,0,2) ….obtenemos el mismo resultado, de forma general utilizamos el vector $n_\pi=(0,0,\lambda)$.

4.- Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi: 2x+y+3z=6$ con los ejes coordenados.

Para resolver este ejercicio de forma rápida escribiremos la ecuación del plano en forma segmentaria, ya que esta ecuación nos da los puntos de corte con los respectivos ejes.

$$2x+y+3z=6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{6}x+\frac{1}{6}y+\frac{3}{6}z=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=1$$

Por tanto los vértices del triángulo son m(3,0,0), n(0,6,0) y t(0,0,2).

Y ahora *para calcular el área del triángulo utilizamos el módulo del producto vectorial.* Sabemos que el área del paralelogramo formado por los vectores $\overrightarrow{mn}$ y $\overrightarrow{mt}$ vale el módulo de su producto vectorial, por tanto el área del triángulo formado por ellos es la mitad.

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{mn}\wedge\overrightarrow{mt}\|=\frac{1}{2}\|(12,6,18)\|=\frac{1}{2}\sqrt{504}=3\sqrt{14}$$

5.- Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta $r:\begin{cases}x+y-2z=-3\\3x+2y+z=1\end{cases}$

Para calcular la distancia de un punto a una recta, necesitamos el vector director de la recta y un punto de ella.

$$dr = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (i + 2k - 6j) - (3k - 4i + j) = 5\hat{i} - \hat{k} - 7\hat{j} = (5,-7,-1)$$

Para obtener un punto, resolvemos el sistema dando a z el valor 0, Z=0.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = -3 \\ 0 - y = 10 \end{cases} \rightarrow \text{y=10} \rightarrow \text{x=7}$$

Por tanto un punto de la recta es A(7,-10,0)

La distancia de un punto a una recta viene dada por: $d(P,r) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}$

$\overrightarrow{AP} = (7,-10.0) - (1,-3,1) = (6,-7,-1)$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dr} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -7 & -1 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} j & k \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = -(-j + 7k) = j - 7k = (0,1,-7)$$

Y ahora:

$$d(P,r) = \frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

6.- Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x - 1 = y + 3 = \dfrac{z-4}{2}$

Calculamos el plano perpendicular a ***r*** que contiene al punto A(1,3,7).

Para ello hacemos el producto escalar del vector director de la recta ***dr=(1,1,2)*** por el vector perpendicular a la recta y que pasa por le punto (x-1,y-3,z-7)

$$(1,1,2)\cdot(x-1, y-3, z-7) = 0 \rightarrow \boxed{\pi : x + y + 2z - 18 = 0}$$

Calculamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

Para ello escribimos la recta r en forma paramétrica $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ y la sustituimos en el plano π.

$$1 + t - 3 + t + 8 + 4t - 18 = 0 \rightarrow 6t - 12 = 0 \rightarrow t = 2$$

Y sustituyendo en la ecuación paramétrica obtenemos el punto deseado.

Punto de intersección de r y π $\boxed{H = (3,-1,8)}$

H es el punto medio entre A y su simétrico A'.

Para calcular el punto medio de un segmento utilizamos: $H=\frac{A+A'}{2}$

$$A'=2H-A \rightarrow (6,-2,16)-(1,3,7)=(5,-5,9).$$

Por tanto el punto simétrico del (1,3,7) es el punto $\boxed{A'=(5,-5,9)}$

7.- Hallar el punto de la recta $r: x=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ ***que equidista del punto A(1,2,1) y del origen de coordenadas.***

Lo primero es escribir la ecuación de la recta en forma paramétrica: $r:\begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \\ z=3-t \end{cases}$

Un punto P, genérico de esta recta es: $P=(t,-2+2t,3-t)$

Tiene que ocurrir que $\left\|\overrightarrow{OP}\right\|=\left\|\overrightarrow{PA}\right\|$

$$\overrightarrow{OP}=(t,-2+2t,3-t) \text{ y } \overrightarrow{PA}=(1-t,2+2-2t,1-3+t)=(1-t,4-2t,-2+t)$$

$$\sqrt{t^2+4+4t^2-8t+9+t^2-6t}=\sqrt{1+t^2-2t+16+4t^2-16t+4+t^2-4t}$$

$$6t^2-14t+13=6t^2-22t+21$$

De donde $8t-8=0 \rightarrow \boxed{t=1}$

Por tanto el punto P de la recta que equidista del origen y del punto A es:

$$\boxed{P=(1,0,2)}$$

8.- Consideramos los planos $\pi: 2x+5=0$ ***y*** $\pi'=3x+3y-4=0$ ***¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos.***

Para ver el ángulo que determinan dos planos, lo hacemos usando sus vectores normales:

$$Cos(\pi,\pi')=\frac{n\cdot n'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}=\frac{(2,0,0)\cdot(3,3,0)}{2\sqrt{18}}=\frac{6}{2\sqrt{18}}=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$$

Para que el plano sea perpendicular a ambos, su vector normal también lo tiene que ser.

$\vec{n}''=\vec{n}\wedge\vec{n}'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=6\hat{k}$ → De aquí que el vector $\vec{n}''=(0,0,6)$ → Entonces el plano que buscamos es el plano: 6z+k=0, y como dice que pasa por el (0,0,0) entonces k=0 → $\boxed{z=0}$ es el plano pedido.

9.- Hallar el punto de la recta $r:\begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=1+2t \end{cases}$ ***cuya distancia al punto P(1,0,2) sea*** $\sqrt{5}$

Un punto genérico de la recta es el (t,3-t,1+2t) como la distancia de un punto a una recta se calcula:

$d(P,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|}{\left\|\overrightarrow{dr}\right\|}$ *Lo primero es calcular el vector AP(1-t,t-3,2-2t) y dr(1,-1,2)*

$$\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{dr}\right\|=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-t & t-3 & 2-2t \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\|=\left\|(-4\hat{i}+2\hat{k})\right\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \quad \text{y como } \|dr\|=2$$

Entonces la distancia del punto a la recta es $\sqrt{5}$.

Por tanto si calculamos en punto de intersección entre la recta r y otra recta perpendicular que pase por P, tenemos el punto buscado.

Sea Q el punto (t,3-t,1+2t), y P(1,0,2) entonces el vector PQ=(t-1,3-t,2t-2), y el producto escalar PQ·dr=0 porque ambos vectores son perpendiculares.

PQ·dr=(t-1,3-t,2t-1)· (1,-1,2)=t-1+t-3+4t-2=0 ➔ 6t-6=0 ➔ t=1

Por tanto el punto de la recta que está a una distancia $\sqrt{5}$ del punto P es: $\boxed{Q:(1,2,3)}$

10.- Encontrar los puntos de $r:\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ ***que disten*** $\frac{1}{3}$ ***del plano*** $\pi:2x-y+2z+1=0$

Lo primero es ver cual es la posición relativa de la recta y el plano.

Escribimos La matriz M y M*

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang(M)=3=Rang(M*), Por tanto recta y plano son secantes.

Tienen que existir dos puntos de la recta a una distancia $\frac{1}{3}$ del plano, uno por encima y otro por debajo. Escribimos la recta en forma paramétrica, para ello necesitamos el vector director y un punto:

$$dr=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}=(-1,1,-1) \quad \text{Punto (si hacemos Z=0)} \rightarrow \quad A(0,0,0) \quad \text{Por tanto } r:\begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$$

Un punto cualquiera de la recta es (-t,t,-t), pues calculamos la distancia de un punto a un plano y la igualamos a $\frac{1}{3}$. Y eso nos dará dos valores para t. $\pi:2x-y+2z+1=0$

$$d(P,\pi)=\frac{|ap_x+bp_y+cp_z+d|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|-2t-t-2t+1|}{\sqrt{9}}=\frac{|-5t+1|}{3}=\frac{1}{3} \rightarrow |-5t+1|=1 \rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\frac{2}{5} \end{cases}$$

Por tanto los puntos situados a una distancia $\frac{1}{3}$ del plano son $\boxed{(0,0,0) \text{ y } \left(\frac{-2}{5},\frac{2}{5},\frac{-2}{5}\right)}$

11.- Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r:\begin{cases}3x+2y+2z=0\\ x-2y+2z=0\end{cases}$ ***y otro lado sobre la recta*** $s:\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$. ***Calcula el área del cuadrado.***

Lo primero que tenemos que hacer es ver la posición relativa de las rectas r y s:

Calculamos el vector director de la recta r:

$$dr=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=8\hat{i}-4\hat{j}-8\hat{k}=(8,-4,-8)$$ ➔ Si comparamos $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{ds}$ vemos que $\overrightarrow{dr}=4\cdot\overrightarrow{ds}$

Por tanto las rectas r y s son paralelas.

Calculamos la distancia entre ellas, y el área del cuadrado será esa distancia al cuadrado.

Necesitamos un punto de s, A=(3,1,-5) ds=(2,-1,-2) y un punto de r, P(0,0,0) por ser homogéneo el sistema. Calculamos el vector $\overrightarrow{AP}=(-3,-1,5)$

$$\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{ds}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -3 & -1 & 5\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=7\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}=(7,4,5)$$

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{\left\|\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{ds}\right\|}{\left\|\overrightarrow{ds}\right\|}=\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{9}}=\sqrt{10}$$

Por tanto el área del cuadrado: $\boxed{A=\left(\sqrt{10}\right)^2=10}$

12.- Hallar el plano de la familia $mx+y+z-(m+1)=0$ ***que está situado a distancia 1 del origen.***

$$d(P,\pi)=\frac{\left|ap_x+bp_y+cp_z+d\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}=\frac{\left|-(m+1)\right|}{\sqrt{m^2+2}}=\frac{m+1}{\sqrt{m^2+2}}=1$$ ➔ $(m+1)^2=m^2+2$ ➔ $m^2+2m-m^2=1$

De donde $m=\frac{1}{2}$

Por tanto el plano de la familia es: $\frac{1}{2}x+y+z-\frac{3}{2}=0$ ➔ $\boxed{x+2y+2z-3=0}$

13.- Explicar como se obtiene la perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Obtener la perpendicular común a las rectas $r:\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$ ***y*** $s:\begin{cases}x=0\\ z=3\end{cases}$

Para obtener la perpendicular común a dos rectas que se cruzan, lo primero es escribir las rectas en forma paramética:

Recta r:

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1=(0,1,0)\\ \vec{n}_2=(0,0,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{dr}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,0,0)$$ ➔ Si x=1 ➔ Un punto de r es el P(1,0,0) ➔ $\begin{cases}x=1+t\\ y=0\\ z=0\end{cases}$

Recta s:

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1=(1,0,0)\\ \vec{n}_2=(0,0,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{ds}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,0)$$ ➔ Si y=1 ➔ Un punto de r es Q(0,1,3) ➔ $\begin{cases}x=0\\ y=1-\lambda\\ z=3\end{cases}$

Obtenemos un punto genérico de cada una: $\begin{matrix}A\in r;\ A(1+t,0,0)\\ B\in s;\ B(0,1-\lambda,3)\end{matrix}$

Hallamos las componentes del vector $\vec{AB}$; $\vec{AB}=B-A=(-1-t,1-\lambda,3)$

Y este vector tiene que ser perpendicular al vector director de r $\vec{dr}$ y al vector director de s $\vec{ds}$.

$$\left.\begin{matrix}\vec{dr}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{ds}\cdot\vec{AB}=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}(1,0,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0\\ (0,-1,0)\cdot(-1-t,1-\lambda,3)=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}-1-t=0\\ -1+\lambda=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}t=-1\\ \lambda=1\end{matrix}$$

Si sustituimos en las rectas r y s, obtenemos los puntos: A(0,0,0) y B(0,0,3), ya tenemos dos puntos de la recta, como $\vec{AB}=B-A=(0,0,3)$, la recta perpendicular es: $r'\begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=3t\end{cases}$

14.- a) Determinar la ecuación de un plano π pasando por el punto A(-1,-1,1) y siendo $\vec{v}(1,-2,-1)$ un vector normal al mismo.

Creamos un haz de planos paralelos de la forma: X-2Y-Z+K=0

Y calculamos que plano del haz pasa por ese punto, sustituyendo el punto en el haz de planos paralelos.

-1-2(-2)-1+k=0 ➔ -1+4-1+K=0 ➔ K=-2 ➔ $\pi: x-2y-z-2=0$

b) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta s que se obtiene al cortarse el plano $\pi: x-2y-z-2=0$ con el plano $\pi': z=1$

Si sustituimos $\pi': z=1$ en el plano $\pi: x-2y-z-2=0$, obtenemos la recta $r: x-2y=3$

Que es la forma general de la ecuación de una recta, si operamos tenemos: $y=\frac{x-3}{2}$

La forma paramétrica de r: $\begin{cases}x=3+2t\\ y=t\\ z=1\end{cases}$

Si lo hacemos de la forma habitual; calculamos el vector director de r: $\vec{dr}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-2,-1,0)$

Y para calcular un punto, z=1, y=0, x=3; por tanto la recta r tiene por ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$$

c) Determinar las ecuaciones paramétricas e la recta r que pasa por los puntos B(1,1,2) y C(1,-1,2)

Calculamos el vector $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,-2,0)$, y con el vector y un punto (1,1,2) escribimos las paramétricas:

$$r:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1-2t \\ z = 2 \end{cases}$$

d) Encontrar la posición relativa entre las rectas r y s de los apartados anteriores:

$$r:\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad y\ s:\begin{cases} x = 1 \\ y = 1-2t \\ z = 2 \end{cases} \qquad Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2,1,1) \qquad Rang(\overrightarrow{dr},\overrightarrow{ds},\overrightarrow{PQ}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Por tanto las rectas r y s SE CRUZAN.

e) Hallar un punto D de la recta r que esté a la misma distancia de los puntos B y C.

Un punto genérico de la recta r es el (3-2t, -t, 1), calculamos los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{BD} = (2-2t,-1-t,-1)$

$\overrightarrow{BC} = (2-2t,1-t,-1)$

Como están a la misma distancia, el modulo de los dos vectores serán iguales.

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \Rightarrow \sqrt{4+4t^2-8t+1+t^2+2t+1} = \sqrt{4+4t^2-8t+1-2t+t^2+1}$$

$$4+4t^2-8t+1+t^2+2t+1 = 4+4t^2-8t+1-2t+t^2+1 \Rightarrow t=0$$

Por tanto el punto buscado es el (3,0,1)

15.- Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2)

a) Razonar si es rectángulo:

El triángulo es rectángulo si alguno de estas parejas de vectores es ortogonal:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,-1,-3), \overrightarrow{AC} = (0,-4,0) \\ \overrightarrow{BA} = (0,1,3), \overrightarrow{BC} = (0,-3,3) \\ \overrightarrow{CA} = (0,4,0), \overrightarrow{CB} = (0,3,-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (0,-1,-3)\cdot(0,-4,0) = 4 \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (0,1,3)\cdot(0,-3,3) = 6 \\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (0,4,0)\cdot(0,3,-3) = 12 \end{matrix}$$

b) ***Calcular la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC.***

Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta AC. $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1-4t \\ z=2 \end{cases}$, un punto genérico de la recta es el $G\ (1,1-4t,2)$. Si calculamos el vector que une el punto genérico y el punto B:

$\overrightarrow{GB}=B-G=(0,4t-1,-3)$, este vector y el vector de la recta son perpendiculares, por tanto:

$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{dr}=(0,4t-1,-3)\cdot(0,-4,0)=0$ ➔ $-16t+4=0$ ➔ $t=\dfrac{1}{4}$

Por tanto el vector $\overrightarrow{GB}=(0,0,-3)$

Y la ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular a AC, es: $r:\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1-3t \end{cases}$

c) Calcular la recta S que pasa por los puntos A y C:

$$s:\begin{cases} x=1 \\ y=1-4\lambda \\ z=2 \end{cases}$$

a) D es el punto de corte de r y s, calcular el módulo de $\overrightarrow{BD}$

Como ambas rectas están en paramétricas, igualamos las paramétricas para obtener el punto de corte entre ellas. $\begin{cases} 1=1 \\ 0=1-4\lambda \\ 2=-1-3t \end{cases}$ ➔ $\lambda=\dfrac{1}{4};t=-1$ ➔ El punto de corte es el (1,0,2)

$\overrightarrow{BD}=D-B=(1,0,2)-(1,0,-1)=(0,0,3)$ ➔ $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{9}=3$

b) Calcular la longitud del lado AC:

La longitud del lado AC es el módulo del vector $\overrightarrow{AC}$; $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{16}=4$

c) Calcular el producto vectorial de los vectores AC y AB y comprueba que su módulo es igual a h·b, siendo h el módulo del vector BD y b la longitud del lado AC (calculados anteriormente)

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=(12,0,0) \quad ➔ \quad \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=12; \quad h\cdot b=4\cdot 3=12$$

16.- Consideramos los puntos A(2,1,2) y B(0,4,1) y la recta r: $x=y-2=\dfrac{z-3}{2}$

a) Determinar un punto C de la recta que equidiste de los puntos A y B

Escribimos r en forma paramétrica: $r:\begin{cases} x=t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}$, un punto genérico de ella es el G(t,2+t,3+2t).

Si calculamos los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{BG}$, como los puntos A y B están a la misma distancia, el módulo de estos vectores ha de ser el mismo.

$$\overrightarrow{AG} = G - A = (t, 2+t, 3+2t) - (2,1,2) = (t-2, 1+t, 1+2t)$$
$$\overrightarrow{BG} = G - B = (t, 2+t, 3+2t) - (0,4,1) = (t, t-2, 2+2t)$$

$$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BG}\right\|$$
$$\sqrt{(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (1+2t)^2}$$
$$(t-2)^2 + (1+t)^2 + (1+2t)^2 = t^2 + (t-2)^2 + (1+2t)^2$$
$$t^2 + 4 - 4t + 1 + t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t = t^2 + t^2 + 4 - 4t + 1 + 4t^2 + 4t$$

De donde:

$$6t^2 - 2t + 6 = 6t^2 - 3t + 5 \qquad \boxed{t = -1}$$

Por tanto el punto que está a la misma distancia de A y B es el (-1,1,1)

b) Calcular el área del triángulo ABC

El área del triángulo ABC se calcula como:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(-3,1,9)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+81} = \frac{1}{2}\sqrt{91} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$