Vectores y rectas

B4.C3.1. Producto escalar. Normalizar vectores, ortogonalidad y proyección de un vector. B4.C3.2. Expresión analítica del producto escalar, módulo y ángulo de 2 vectores.

1. Ángulo entre 2 vectores

Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. (Usa la calculadora).

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44''$$

2. Distintas preguntas sobre vectores y producto escalar:

Dados los vectores $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \frac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

Un vector unitario paralelo a $(4, 3)$ es $\frac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

3. Calcular un valor “k” para que los vectores sean perpendiculares

Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(6, k),\ \vec{v}(-1, 3)$ **b)** $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right),\ \vec{v}(k, 3)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \ \to\ -6 + 3k = 0 \ \to\ k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0 \ \to\ \frac{k}{5} - 6 = 0 \ \to\ k = 30$

B4.C4.1. Calcula distancias entre puntos, de un punto a una recta y entre dos rectas .

4. Ángulo entre 2 rectas

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases},\quad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

$\vec{v}_{r_1} = (-2, 1);\ \vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (-4, 3)|}{|(-2, 1)|\,|(-4, 3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0{,}9838699101 \ \to\ \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

5. Distancias entre puntos y rectas

$P(-6, -3),\ Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0,\ \ s: 5x + 15 = 0$

Halla la distancia entre los dos puntos. Halla también las distancias de cada uno de los puntos a cada recta.

$P(-6, -3),\ Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

$$dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\,(P, s) = \frac{|5(-6) + 15|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\,(Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

B4.C4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando elementos.

6. Distintos tipos de ecuaciones de rectas

Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita y explícita de la recta que pasa por A y B, siendo:

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$

a) $A(-1, -1)$; $B(3, 3)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$ Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$; $B(6, 0)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$ Explícita: $y = \dfrac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$; $B(-1, 5)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$ Explícita: $y = 5$

7. Preguntas para trabajar con rectas

a) Encuentra dos puntos, P y Q, pertenecientes a la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $(2, -3)$.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m es la pendiente de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

— Si $x = 0$ $\rightarrow$ $2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0$ $\rightarrow$ $y = 2$ $\rightarrow$ $P(0, 2)$

— Si $x = -3$ $\rightarrow$ $2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$$2x - 3y + 6 = 0 \rightarrow 2x + 6 = 3y \rightarrow \frac{2}{3}x + 2 = y$$

Explícita: $y = \frac{2}{3}x + 2$

$$m = \frac{2}{3} \rightarrow (1, m) = \left(1, \frac{2}{3}\right)$$

El vector $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales

B4.C4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas

8. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a r.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \rightarrow \text{Vector dirección de } r\text{: } \vec{v}_r = (-5, 2)$$

- Recta paralela a r que pasa por P.

$P(4, -3)$ $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

- Recta perpendicular a r que pasa por P.

$P(4, -3)$ $\vec{v}_l = (2, 5)$

$$l: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

9. Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente de r es 3/5. Halla:

a) Las coordenadas de un vector paralelo a la recta r.

b) La pendiente de una recta perpendicular a la recta r.

c) Las coordenadas de un vector perpendicular a la recta r.

a) $m_r = \frac{3}{5} \rightarrow \vec{v} = (5, 3)$ es paralelo a r.

b) $-\frac{1}{m} = m_r \rightarrow m = -\frac{5}{3}$

c) $m = -\frac{5}{3} \rightarrow \vec{w} = (-3, 5)$ es perpendicular a r.

10. Rectas paralelas y perpendiculares.

$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ **. Halla:**

a) Ecuación continua de una recta, r_1, perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) Ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) Ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s;\ \vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$r_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$.

$P_2(0, 4) \in r_2$.

$r_2: \frac{x-0}{-1} = \frac{y-4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$.

$P_3(-3, 0) \in r_3$.

$r_3: \frac{x+3}{3} = \frac{y-0}{1} \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$

11. Posición relativa de varias rectas (secantes, paralelas o coincidentes)

Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0$
$s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0$
$s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0$, $s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, -5) \rightarrow \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3),\ P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.