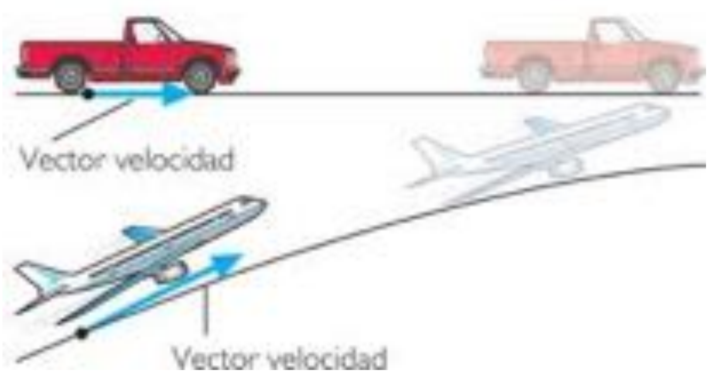
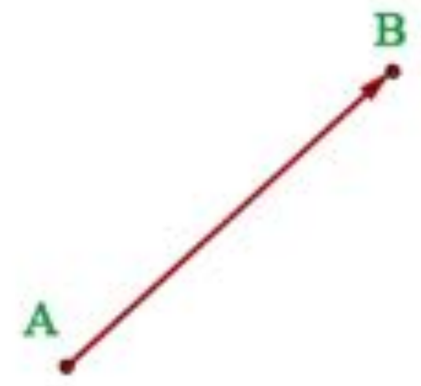
Vectores. Geometría Análítica



1. Los vectores y sus operaciones

• Un vector AB queda determinado por dos puntos, punto A (**origen**) y punto B (**extremo**).



• Las coordenadas de un vector son las coordenadas del extremo menos las del origen AB=B-A

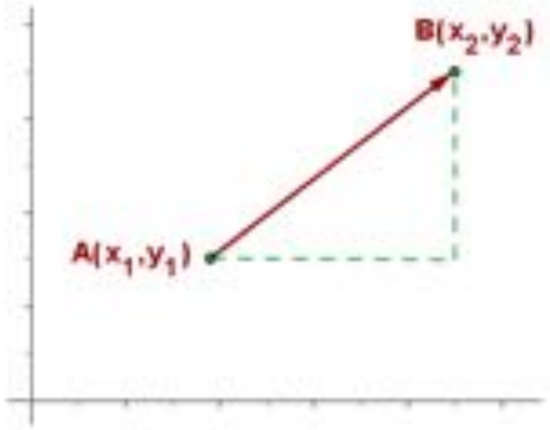
• Un vector también queda determinado por su módulo, su dirección y su sentido.

- **Módulo**: Es la distancia entre A y B (calcularlo)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

-**Dirección**: Es la dirección de la recta que contiene al vector o de cualquier recta paralela a ella.

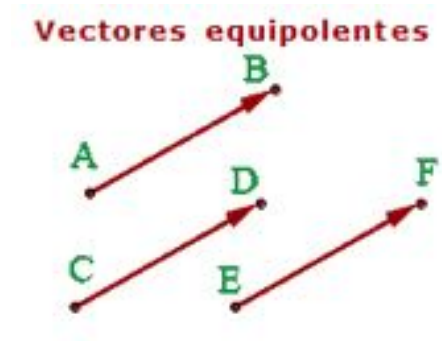
- **Sentido**: es el que va desde el **origen A** al **extremo B**



Clases de Vectores

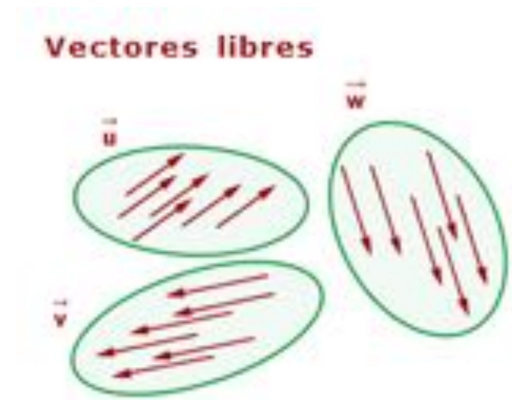
Vectores iguales o equipolentes

Tienen el mismo módulo, dirección y sentido



Vectores libres

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama vector libre. Es decir los vectores libres tienen el mismo módulo, dirección y sentido.



Vector fijo

Un vector fijo es un representante del vector libre con un punto origen determinado.

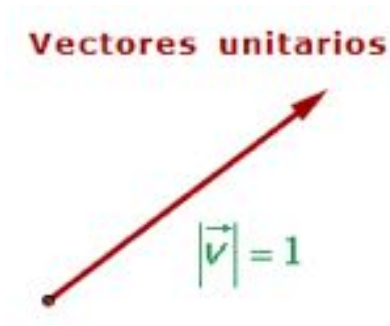
Clases de Vectores

Vectores opuestos

Tienen el mismo módulo, dirección, y distinto sentido.

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$
$$-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$$

Vector unitario



Es un vector de módulo 1

Para obtener un vector unitario, de la misma dirección y sentido que el vector dado se divide éste por su módulo.

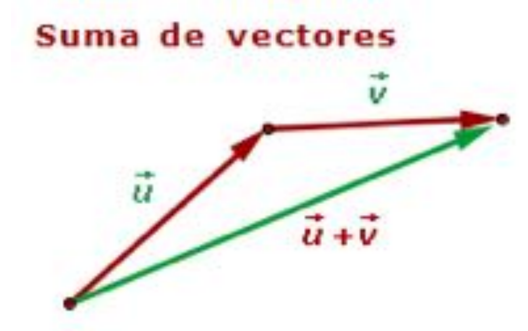
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Operaciones con vectores

Suma de vectores

Para sumar dos vectores libres “u” y “v” se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.

Para sumar dos vectores se suman sus respectivas componentes.



$$\vec{u}=(u_1, u_2) \quad \vec{v}=(v_1, v_2)$$

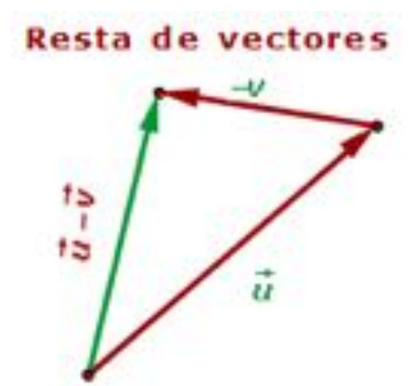
$$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2)$$

Resta de vectores

Para restar dos vectores libres “u” y “v” y se suma “u” con el opuesto de “v”.

$$\vec{u}=(u_1, u_2) \quad \vec{v}=(v_1, v_2)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=(u_1-v_1,\ u_2-v_2)$$

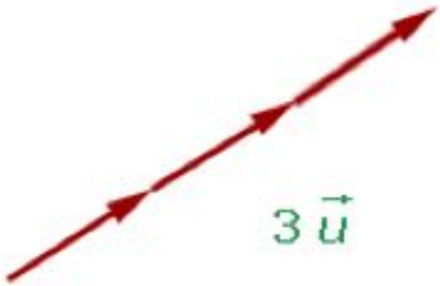


Operaciones con vectores

Producto de un número por un vector

El producto de un número k por un vector “u” es otro vector:

- De **igual dirección** que el vector $\vec{u}$.
- Del **mismo sentido** que el vector $\vec{u}$ **si k es positivo.**
- De **sentido contrario** del vector $\vec{u}$ **si k es negativo.**
- De **módulo** $|k| \cdot |\vec{u}|$



Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

$$k \cdot (u_1, u_2) = (k \cdot u_1, k \cdot u_2)$$

Operaciones con vectores

Combinación lineal de vectores

Dados dos vectores “x” y “y” y dos números a y b, al vector ax+by se le llama combinación lineal de “x” y “y”.

Ejercicios:

Dados los vectores $\vec{x} = (1,\ 2)$ e $\vec{y} = (3,\ -1)$, hallar el **vector combinación lineal** $\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$

El vector $\vec{z} = (2,\ 1)$, ¿se puede expresar como **combinación lineal** de los vectores $\vec{x} = (3,\ -2)$ e $\vec{y} = (1,\ 4)$?

$$(2,\ 1) = a(3,\ -2) + b(1,\ 4)$$

Operaciones con vectores

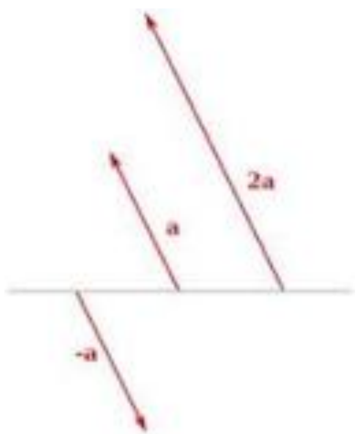
Vectores linealmente dependientes

Varios vectores libres del plano se dice que son **linealmente dependientes** si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal.

$$a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} = \vec{0}$$

Ejemplo: v1=(1,1) y v2=(2,2)

En el plano, los vectores L.Dependientes son los vectores paralelos, es decir, si sus componente son proporcionales



Operaciones con vectores

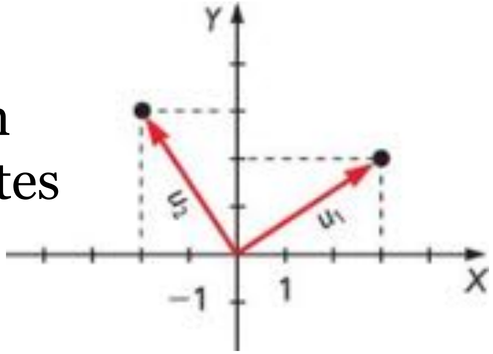
Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son **linealmente independientes** si una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero implica que todos los coeficientes de la combinación lineal son cero.

$$a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} = \vec{0} \qquad a_1 = a_2 = 0$$

Esto es lo mismo que decir que varios vectores libres son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los restantes.

En el plano, dos vectores L. Independientes son dos vectores que no son paralelos, ni coincidentes



Base

Llamaremos **base** del conjunto de vectores del plano a dos vectores de distinta dirección (es decir, L.Independientes).

Cualquier vector del plano se puede poner como combinación lineal de los vectores de una base de forma única.

¿Cómo calcular las coordenadas de un vector en una base?.

Dado un vector "v" y una base B(x,y), las coordenadas de "v" en esa base resultan de resolver el sistema v=ax+by .

Las coordenadas de "v" serán (a,b)

Base

Ejemplo

Qué pares de los siguientes **vectores** forman una **base**:

$$\vec{u} = (2, -3) \qquad \vec{v} = (5, 1) \qquad \vec{w} = (-4, 6)$$

Pista: No forman base los que sean proporcionales

$\frac{2}{-3} = \frac{5}{1}$	$2 \neq -15$	$\{\vec{u}, \vec{v}\}$
$\frac{2}{-3} = \frac{-4}{6}$	$12 = 12$	No
$\frac{5}{1} = \frac{-4}{6}$	$30 \neq -4$	$\{\vec{v}, \vec{w}\}$

Base

Sean los vectores libres $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$ y $\vec{w} = (5, 6)$. Determinar:

1. Si forman una base $\vec{u}$ y $\vec{w}$.
2. Expresar $\vec{w}$ como combinación lineal de los de la base $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (1, 4)$

Base

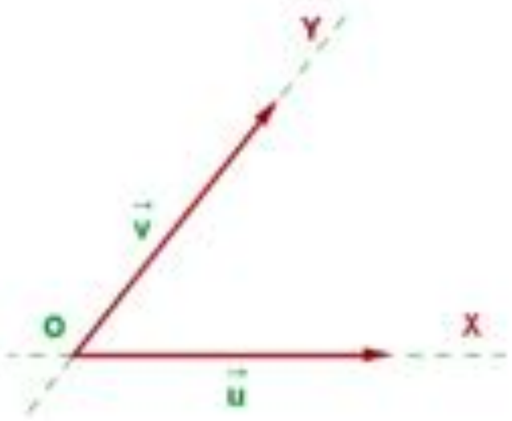
Un vector $\vec{w}$ tiene de coordenadas (3, 5) en la base canónica. ¿Qué coordenadas tendrá referido a la base $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (2, 1)$?

Sistema de Referencia

En el plano, un sistema de referencia **está constituido por un punto O del plano y una base** ($\vec{u}$, $\vec{v}$).

El punto O del sistema de referencia se llama **origen.**

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ no paralelos forman la base.



Producto Escalar de Vectores

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos coseno del ángulo que forman.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{u} = (3,\ 0) \qquad \vec{v} = (5,\ 5) \qquad \widehat{uv} = 45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

Producto Escalar de Vectores

Expresión analítica

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Ejemplo

$\vec{u} = (3,\ 0)$ $\qquad$ $\vec{v} = (5,\ 5)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$

Producto Escalar de Vectores

Demostración de la Expresión analítica

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2$$

Demostración usando x, y vectores que son base ortonormal

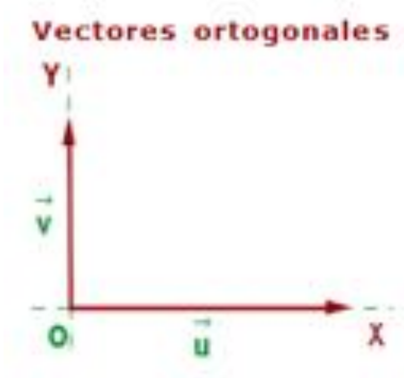
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y}) \cdot (x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y}) = \\ &= (x_1\, x_2)(\vec{x} \cdot \vec{x}) + (x_1\, y_2)(\vec{x} \cdot \vec{y}) + (y_1\, x_2)(\vec{y} \cdot \vec{x}) + (y_1\, y_2)(\vec{y} \cdot \vec{y}) = \\ &= (x_1\, x_2) \cdot 1 + (x_1\, y_2) \cdot 0 + (y_1\, x_2) \cdot 0 + (y_1\, y_2) \cdot 1 = \\ &= x_1\, x_2 + y_1\, y_2\end{aligned}$$

Producto Escalar de Vectores

Vectores ortogonales o perpendiculares

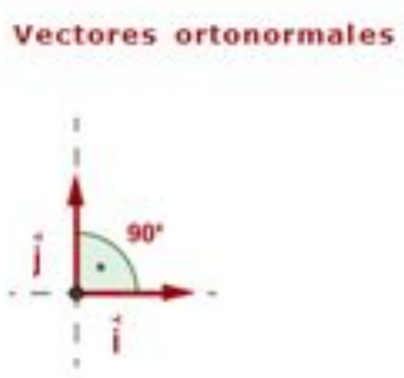
Dos **vectores** son **ortogonales** o **perpendiculares** si su **producto escalar** es **cero**.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



u·v=0 -> cos(u,v)=0 -> El ángulo es 90º

Vectores ortonormales



Dos **vectores** son **ortonormales** si:

1. Su **producto escalar** es **cero**.
2. Los dos **vectores** son **unitarios**.

Producto Escalar de Vectores

¿Cómo comprobar si dos vectores son perpendiculares?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad\qquad u_1 . v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,\ 0) \qquad\qquad \vec{v} = (5,\ 5)$$

Producto Escalar de Vectores

Calcular un vector ortogonal a otro

Dado un vector (a,b), el vector (-b,a) es ortogonal a él ya que su producto escalar es cero.

Ejemplo: Calcula un vector ortogonal a (3,4).

Producto Escalar de Vectores

¿Cómo calcular el ángulo que forman dos vectores?

$$\cos \alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Ejemplo

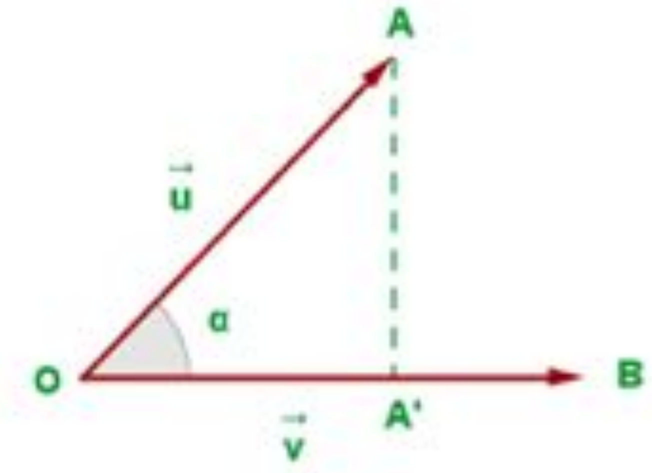
$\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$ $\cos \alpha =$

Producto Escalar de Vectores

Interpretación geométrica del producto escalar

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA'$$



$$\cos \alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \qquad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$$

Ejercicios

3

Dado el vector $\vec{v}$ =(9,12). Calcula las coordenadas de:

a) Un vector $\vec{u}$ unitario y de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Un vector $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ y con el mismo módulo.

c) Un vector $\vec{x}$ de módulo 5 y ortogonal a $\vec{v}$.

4

Dados $\vec{u}(3, n)$ y $\vec{v}(-2, m)$, calcula el valor de n y m para que se cumpla:

a) $|\vec{u}| = 5$

b) $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$ y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

c) $\vec{u}$ forme 45º con el vector $\vec{w}(1,1)$

Ejercicio Propuesto

Dados los vectores $\vec{a} = (3, -2)$ y $\vec{b} = (7, 4)$, descomponer el vector $\vec{b}$ en suma de dos vectores, $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$, tales que:

- *$\vec{u}$ sea paralelo a $\vec{a}$.*
- *$\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{a}$.*

SOLUCIÓN:

$\vec{u}$ es paralelo a $\vec{a}$, entonces: $\vec{u} = k\vec{a} = (3k, -2k)$

$\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{a}$, por tanto: $\vec{v} = h(2, 3) = (2h, 3h)$

$\vec{b} = \vec{u} + \vec{v} \rightarrow (7, 4) = (3k, -2k) + (2h, 3h) = (3k + 2h, -2k + 3h)$

Igualando coordenadas: $\begin{cases} 7 = 3k + 2h \\ 4 = -2k + 3h \end{cases}$, de donde $k = 1$; $h = 2$

Los vectores buscados son $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (4, 6)$.

5

¿Cuáles de los siguientes vectores forman una base?

$a)$ $\vec{u}(3,-1)$ y $\vec{v}(1,3)$

b) $\vec{u}(2,6)$ y $\vec{v}(2/3,2)$

6

Inventa un vector paralelo y otro perpendicular a:

a) $\vec{u}(3,-1)$ b) $\vec{u}(-2,0)$ c) $\vec{u}(-4,-4)$

7

Calcula “k” para que estos vectores sean ortogonales:

a) $\vec{u}(6,k)$ y $\vec{v}(-1,3)$ b) $\vec{u}(5,-1)$ y $\vec{v}(k,2)$

8. Halla “m” para que el vector $\vec{u}(3, m)$ sea unitario.

9. Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$, calcula “k” de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$

10. Halla un vector de módulo 50 perpendicular

$\vec{u}(8,6)$.

11. Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(3,2)$ y

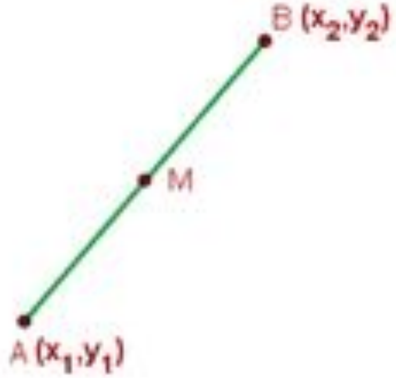
$\vec{v}(1,-5)$

Algunos cálculos…

Punto Medio de un Segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Hallar las coordenadas del punto medio del segmento AB.

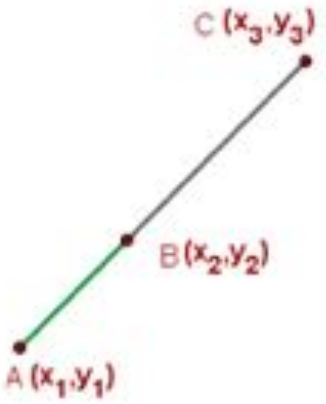
$$A\,(3,\ 9) \qquad B\,(-1,\ 5)$$

Algunos cálculos…

Condición para que 3 puntos estén alineados

Los puntos A (x_1, y_1), B(x_2, y_2) y C(x_3, y_3) **están alineados** siempre que los **vectores** $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ **tengan la misma dirección.** Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales.

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$



Calcular el valor de a para que los puntos estén alineados.

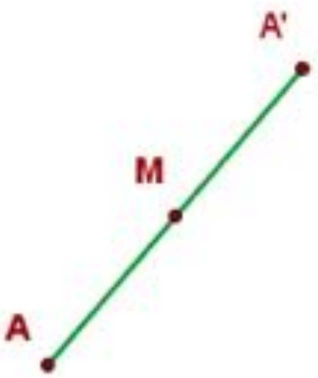
$A(2, 1)$ $\quad B(4, 2)$ $\quad C(6, a)$

Algunos cálculos…

Simétrico de un punto respecto a otro

Si A' es el simétrico de A respecto de M, entonces M es el punto medio del segmento AA'. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$



Hallar el simétrico del punto A(7, 4) respecto de M(3, - 11).

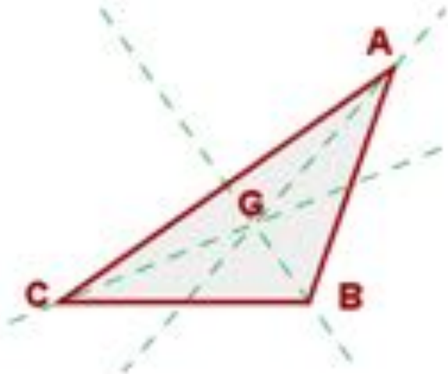
Algunos cálculos…

Coordenadas del Baricentro

Baricentro o centro de gravedad de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas.

Las coordenadas del baricentro son:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$



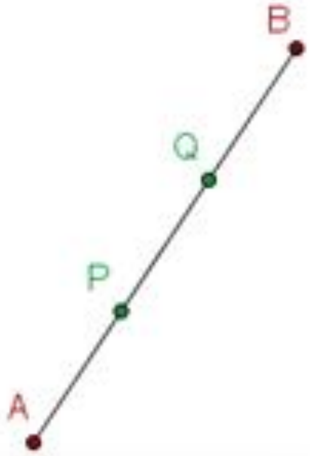
Dados los vértices de un triángulo A(-3, -2), B(7, 1) y C(2, 7), hallar las coordenadas del baricentro.

Algunos cálculos…

Dividir un segmento en una relación dada

Dividir un segmento AB en una relación dada r es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento AB, de modo que las dos partes, PA y PB, están en la relación r:

$$\frac{PA}{PB} = r$$



¿Qué puntos P y Q dividen al segmento de extremos A(-1, -3) y B(5, 6) en tres partes iguales?

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{AP}$$

Algunos cálculos…

Ejercicios

- **<u>3 Puntos alineados</u>** ->
  Pag. 189 – Ej. resueltos 1,2,3 – Ej.Propuestos 2, 3

- **<u>Punto Medio, Simétrico, …</u>** ->
  Pag. 190. Ej. resueltos 1,2,3 – Ej. Propuestos 4

Se proponen los ejercicios Pag. 206 – 2,4,6

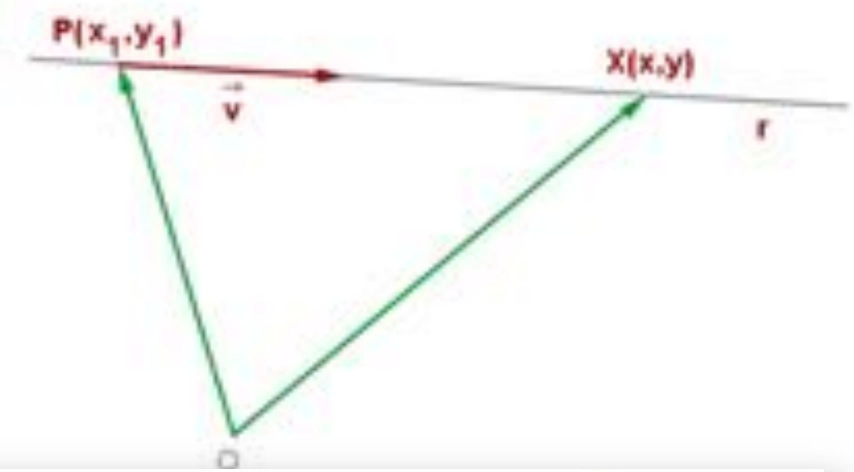
Ecuaciones de la recta

Ecuación Vectorial

Fijado un sistema de referencia con origen en O, definimos una recta r como el conjunto de los puntos del plano, alineados con un punto P y con una dirección dada v .

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k \cdot \vec{v}$$

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$$



Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v}$ = (2,5). Escribir su ecuación vectorial.

Ecuaciones de la recta

Ecuación Paramétrica

A partir de la ecuación vectorial:

- $(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$

Realizando las operaciones indicadas se obtiene:

- $(x, y) = (x_1 + k \cdot v_1, y_1 + k \cdot v_2)$

La igualdad de vectores se desdobla en las dos igualdades escalares:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases}}$$

Ecuaciones de la recta

Ecuación Continua

Si de las ecuaciones paramétricas despejamos el parámetro k.

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad k = \frac{x - x_1}{v_1} \qquad k = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y si igualamos, queda:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}}$$

Ecuaciones de la recta

Ecuación Punto-Pendiente

Partiendo de la ecuación continua la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y quitando denominadores:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1$$

Y despejando:

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_1)$$

Pendiente dado el ángulo

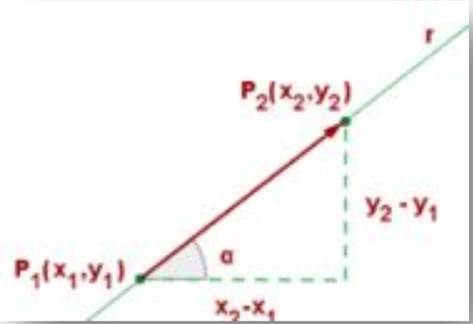
$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Pendiente dado el vector director

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Pendiente dados dos puntos

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ecuaciones de la recta

Ecuación General o Implícita

Partiendo de la ecuación continua la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Y quitando denominadores se obtiene:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1$$

$$v_2 x - v_2 x_1 = v_1 y - v_1 y_1$$

Trasponiendo términos:

$$v_2 x - v_1 y + v_1 y_1 - v_2 x_1 = 0$$

$A = v_2 \quad B = -v_1 \quad C = v_1 y_1 - v_2 x_1$

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Si el vector director de la recta es v(v1,v2), entonces n(A,B) es un vector perpendicular a v ya que v·n=0

Ecuaciones de la recta

Ecuación Explícita

Si en la **ecuación general de la recta:**

$$Ax + By + C = 0$$

despejamos **y**, se obtiene la **ecuación explícita de la recta:**

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

Un vector de la recta será (1,m)

El coeficiente de la x es la pendiente, m.

El término independiente, b, se llama ordenada en el origen de una recta, siendo (0, b) el punto de corte con el eje OY

Ecuaciones de la recta

Ejercicios

12. Escribe todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2,1) y B(-3,6).

13. Obtener la ecuación implícita de la recta a partir de la Ec. Paramétrica $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$

Ecuaciones de la recta

14. Obtener la Ec. Paramétricas de la recta a partir de la recta y=2x+1.

15. Obtener las ecuaciones Paramétricas e Implícita de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y}{0}$

Ecuaciones de la recta

16. Halla las ecuaciones Paramétricas, Continua, Explícita e Implícita que pasa por:

a) A(-2,-2), B(4,4) b) A(3,0) y B(0,4)

17. Dada la recta r: $3x-4y+5=0$.

a) Obtén 2 puntos P y Q de la recta.
b) Comprueba si el vector PQ es perpendicular a (3,-4)
c) Escribe la recta en forma paramétrica.
d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector (1,m) es paralelo al vector PQ.

Paralelismo y Perpendicularidad

Dos rectas paralelas de vectores directores u(u1,u2) y v(v1,v2)

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \qquad m_r = m_s$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$
$$s \equiv Ax + By + k = 0$$

Dos rectas r y s perpendiculares

$$r \perp s \qquad \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

$$\vec{v}_r = (-B, A)$$
$$\vec{v}_s = (A, B)$$

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$
$$s \equiv -Bx + Ay + k = 0$$

Ecuaciones de la recta

18. Dada la recta r: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$. a) Halla una recta paralela que pase por P(3,5) , b) Halla una recta perpendicular pase por P(3,5).

19. Dada la recta r: 2x-4y+5=0. a) Halla una recta en forma paramétrica perpendicular a r y que pasa por P(-1,2), b) Halla una recta en forma explícita que sea paralela a r y que pase por P(0,0).

Ecuaciones de la recta

21. Dada la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2}$. Indica cuál de estas rectas es paralela a ella:

a) 2x+5y-4=0 b) 2x-5y+1=0 c)5x+2y=0

d) y=-5/2x+1 e) y=2/5x-3

22. Dada la recta x-2y+4=0, indica cuál de estas rectas es perpendicular a ella: a) y=2x+1 b) y= - 2x+3 c) y=x/2

d) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$

Ecuaciones de la recta

23. Dada $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}.$

a) Halla una recta en forma Continua que sea perpendicular a r y que pase por P(2,3).

b) Halla una recta en forma implícita que sea paralela a r y pase por P(0,3).

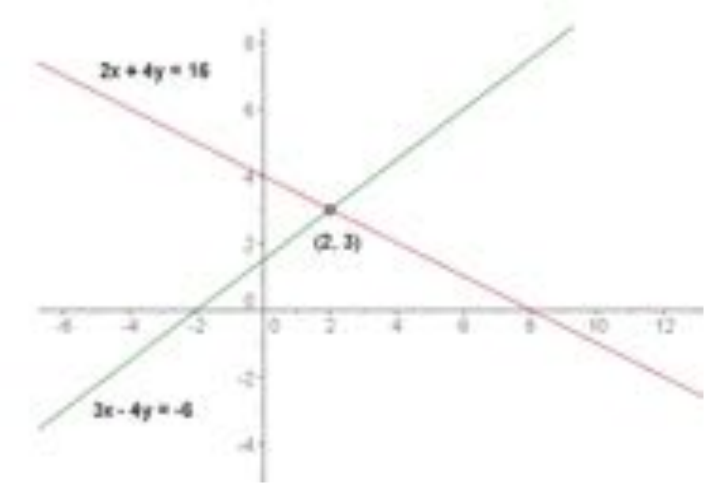
c) Halla una recta en forma explícita que sea perpendicular a r y pase por P(-4,0).

Posición relativa de dos rectas

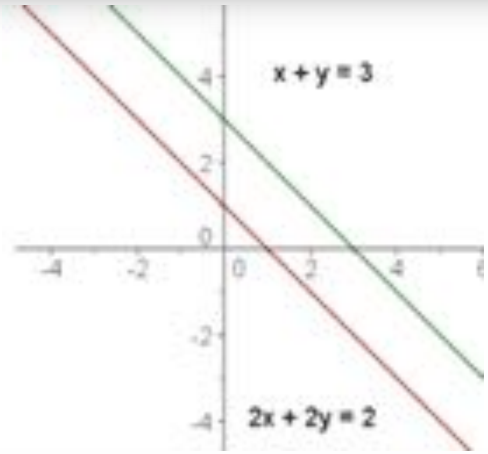
En forma General

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$
$$s \equiv Ax + By + k = 0$$

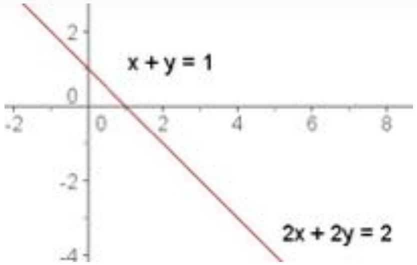
Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, las rectas son secantes, se cortan en un punto.



Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, las rectas paralelas,



Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, las rectas son coincidentes



Posición relativa de dos rectas

En forma Paramétrica

Dos rectas en ecuaciones paramétricas. Igualamos las “x” y las “y” y resolvemos el sistema que queda con la letras “k” y “t.”

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + t \cdot v_1 \\ y = y_1 + t \cdot v_2 \end{cases}$$

Si tiene una solución se cortan, si no tiene solución serán paralelas y si tiene infinitas soluciones serán coincidentes.

Ángulo entre dos rectas

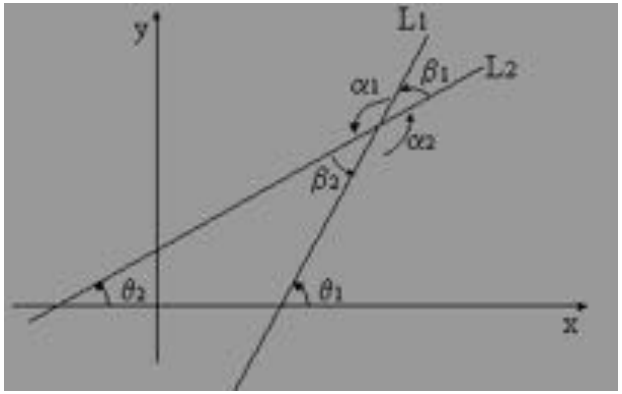
<u>Vectores Directores de las rectas</u>

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 . v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

<u>Pendientes de las rectas</u>

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|$$

<u>Demostración:</u>



$$\mathrm{tg}(\beta_1) = tg(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg(\theta_1) - tg(\theta_2)}{1 + tg(\theta_1) \cdot tg(\theta_2)}$$

$$\mathrm{tg}(\beta_1) = \frac{m1 - m2}{1 + m1 \cdot m2}$$

Ángulo entre dos rectas

Calcular el ángulo que forman las rectas r y s, sabiendo que sus vectores directores son: $\vec{u}$ = (-2, 1) y $\vec{v}$ =(2, -3).

$$\cos\ \alpha = \frac{|(-2,1)\cdot(2,-3)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{|-7|}{\sqrt{65}} = 0.868 \qquad \alpha = 29^{\circ}\ 44'$$

Dadas las rectas r ≡ 3x + y - 1 = 0 y s ≡ 2x + my - 8 = 0, determinar m para que formen un ángulo de 45°.

$$\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \vec{v_r} = (-1,\ 3) \qquad \vec{v_s} = (-m,\ 2)$$

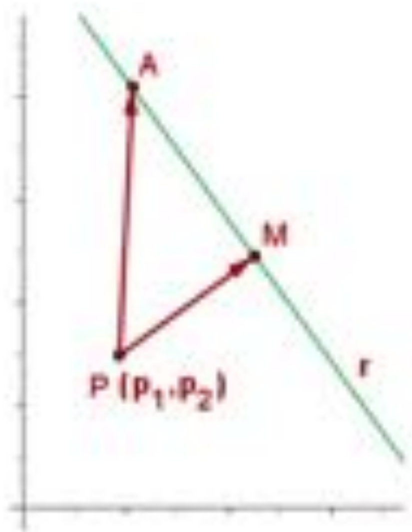
$$\cos\ \alpha = \frac{|u_1\cdot v_1 + u_2 . v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-1\cdot(-m) + 3\cdot 2}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{m^2+4}}$$

Distancia entre dos puntos

$$D = dist\left(\overline{P_0 Q}\right) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Distancia entre un punto y una recta

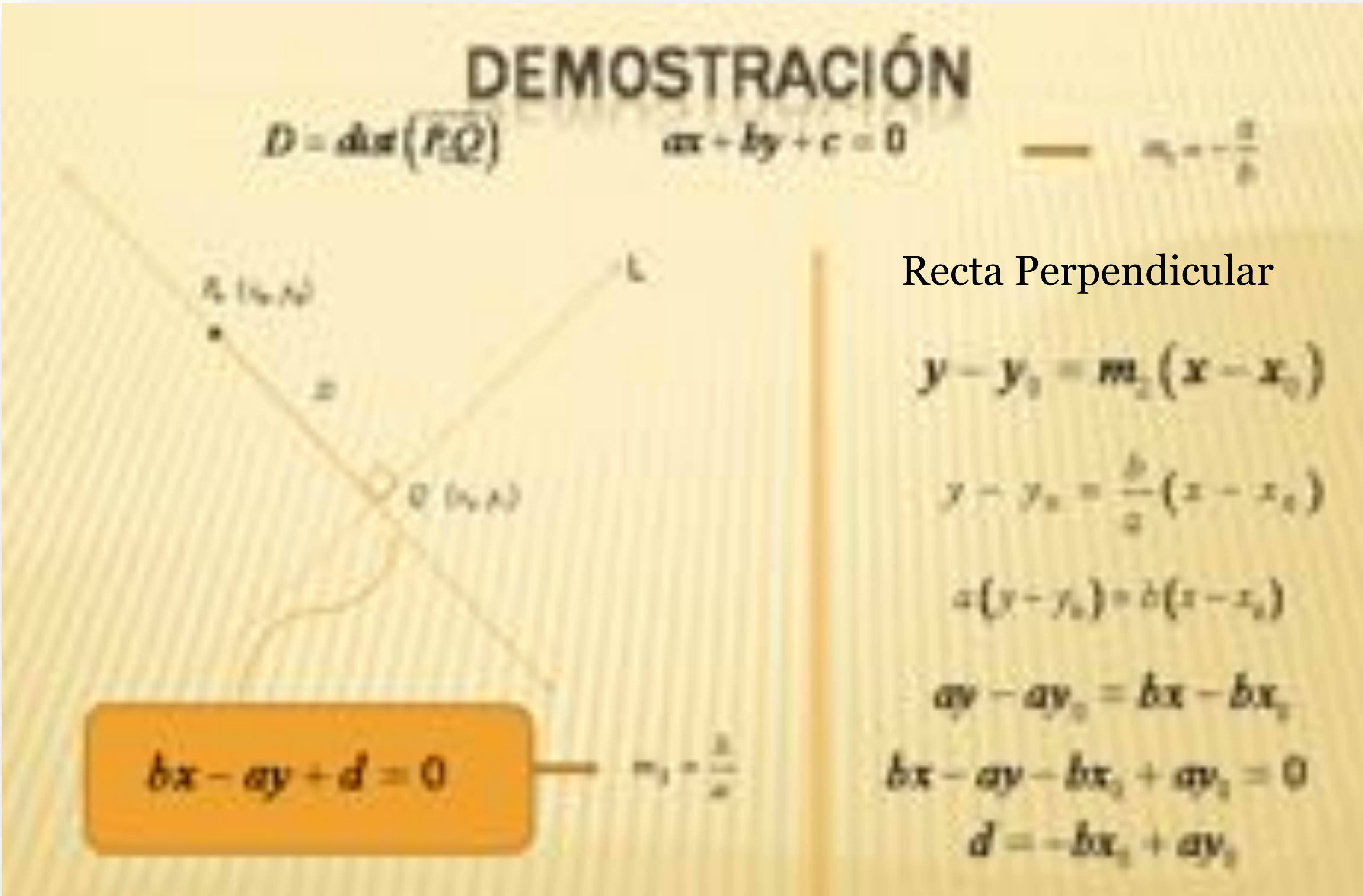
La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.



$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{PM}\right|$$

$$d(P,r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia entre un punto y una recta



Distancia entre un punto y una recta

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ bx-ay+d=0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema

$$Q(x_1, y_1)$$

$$\boxed{Q\left(-\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)}$$

Hacemos la distancia entre los dos puntos:

$$Q(x_1, y_1) = Q\left(-\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)$$

$$D=\sqrt{\left(-\frac{ac+bd}{a^2+b^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{ad-bc}{a^2+b^2}-y_0\right)^2}$$

Distancia entre un punto y una recta

Sustituyendo por la siguiente expresión y haciendo cuentas obtenemos el resultado

$$d = -bx_0 + ay_0$$

$$D = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)}}$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Distancia entre dos rectas

La distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a la otra.

Ecuaciones de la recta

24. Calcula el ángulo que forman

a) $r\colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ y 3: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$

b) r: 2x+3y-10=0 , s: 3x-4y+4=0

c) r: y=4x-1 y s:y=-2x+3

Ecuaciones de la recta

25. Calcula “k” de modo que la distancia entre los puntos

A(3,k) y B(4,-3) sea 2.

26. Halla la distancia de O(0,0) y P(-2,3) a las rectas:

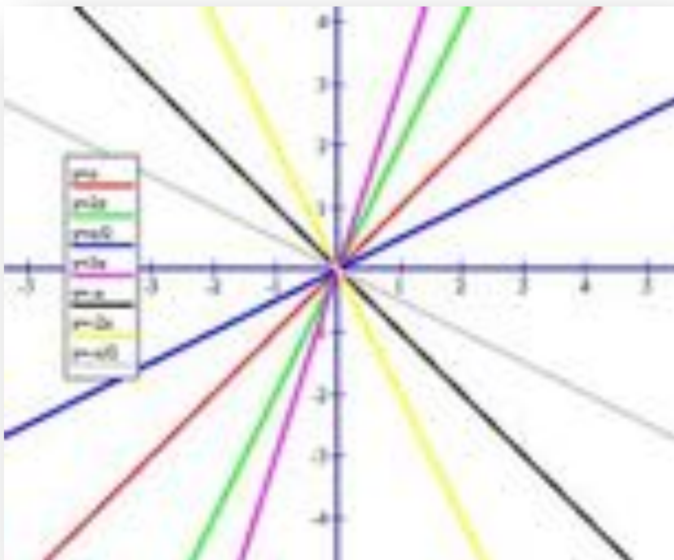
a) 3x-4y+5=0 b) 3x-4=0 c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$

27. Halla la distancia entre:

a) r: y=-2/3x+1 , s: $\frac{1-x}{3} = \frac{y+1}{2}$ b) r: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$, s: 2x+y-5=0

Haz de rectas de centro P

Es el conjunto de rectas que pasan por el punto P



Haz de rectas de centro P

Ecuación dado el punto P(x_1,y_1)

Expresión Analítica del Haz

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) = 0$$

Expresión en función de la pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación dadas dos rectas del haz

$$\alpha(Ax + By + C) + \beta(A'x + B'y + C') = 0$$

Haz de rectas de centro P

Ejercicio:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen y pertenece al **haz de rectas** de vértice P(2,, -1).

Calculamos la ecuación del haz y sustituimos en ella el punto (0,0) obteniendo

$$\alpha(-2) + \beta \cdot 1 = 0 \qquad \beta = 2\alpha$$

Sustituyendo esa relación en la ecuación del haz tendremos

$$\alpha(x-2) + 2\alpha(y+1) = 0 \longrightarrow x - 2 + 2y + 2 = 0$$

$$x + 2y = 0$$

Haz de rectas de centro P

Ejercicio:

Dadas las rectas: $r \equiv 3x + y - 11 = 0$ y $s \equiv x + 2y - 7 = 0$. Calcular el **rayo del haz** determinado por ellas, que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y el **vértice de haz.**

Calculamos el vértice del haz resolviendo el sistema que determinan las dos rectas:

$$\begin{cases} 3x + y - 11 = 0 \\ x + 2y - 7 \end{cases} \qquad P(3,2)$$

Después calculamos la recta que une A y P.