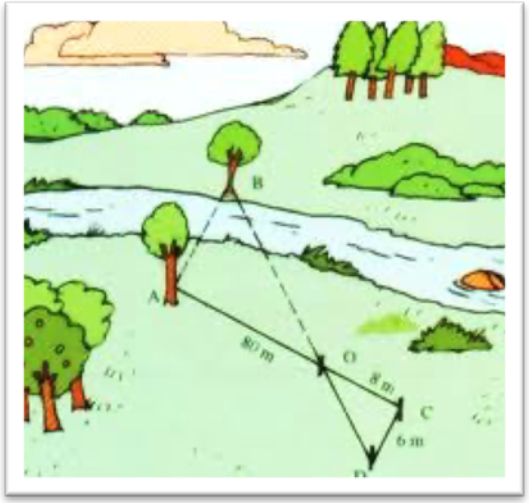
Trigonometría



Trigonometría

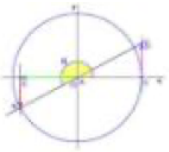
Repaso de 4º ESO:

1. Razones Trigonométricas

- Definición de sen(a),cos(a),tg(a)
- Definición de cosec(a), sec(a), cotg(a)
- Teorema Fundamental ($sen^2(a)+cos^2(a)=1$) y otras reglas…

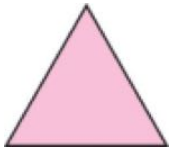
2. Circunferencia Goniométrica (radio 1)

Relacionar razones trigonométricas de distintos ángulos…



3. Resolución de Triángulos

- Razones Trigonométricas – T.Pitágoras
- Método de igualación de tangentes
- Teorema del Seno
- Teorema del Coseno



Funciones y fórmulas Trigonométricas

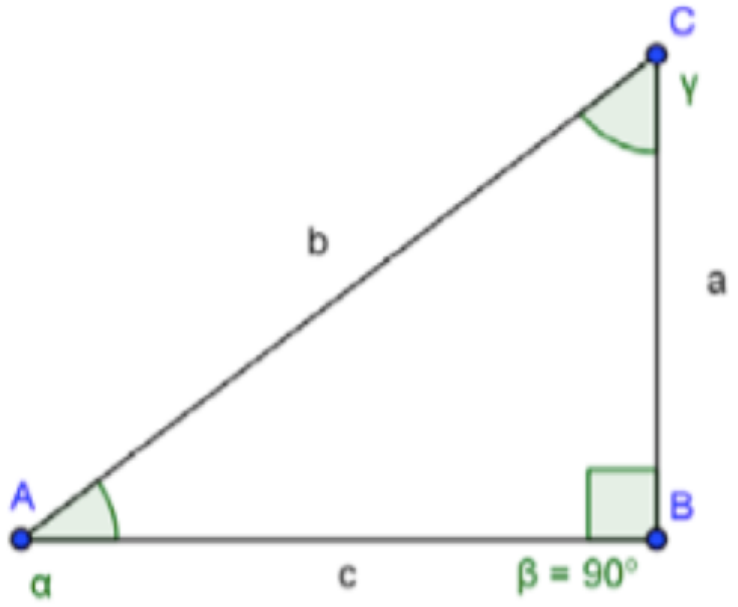
4. El radián, como nueva unidad de medida

5. Representación de Funciones Trigonométricas

6. Fórmulas Trigonométricas

7.Ecuaciones Trigonométricas

1. Definiciones razones trigonométricas



Con la definición:

sen (α)=

cos (α)=

tag (α)=

Definimos también sec(α), cosec(α) y cotag(α)

1. Demostraciones de algunas relaciones

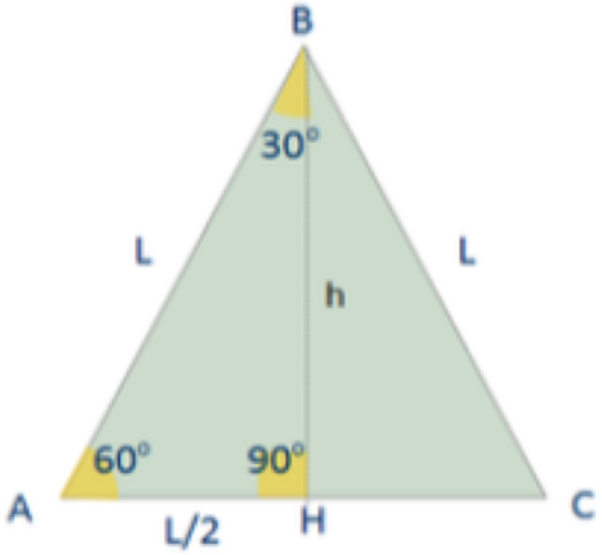
Teorema Fundamental Trigonometría: $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)=1$

Otras fórmulas: $\text{tag}(\alpha)=\text{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$; $1+\text{tag}^2(\alpha) =1/\cos^2(\alpha)$

Razones Trigonométricas más habituales

	0º	30º	45º	60º	90º
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0
tg					…

Cálculo Razones Trigonométricas de 30º y 60º



Aplicando Pitágoras

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Con la definición:

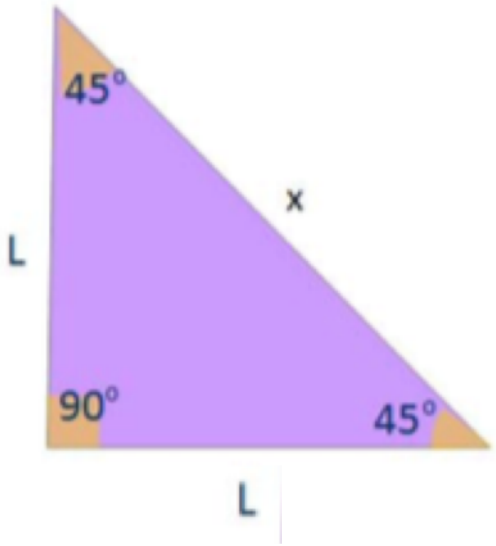
sen 30º =

cos 30º =

sen 60º =

cos 60º =

Cálculo Razones Trigonométricas de 45º



Aplicando Pitágoras

$$x = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

Con la definición:

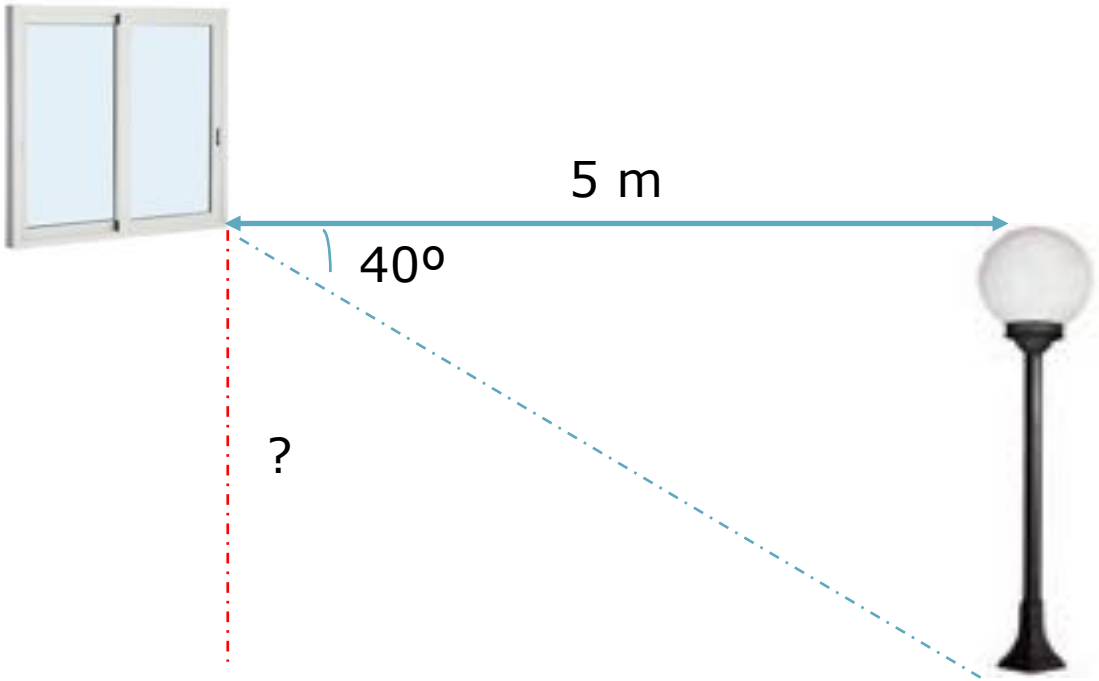
sen 45º =

cos 45º =

1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Utilidad a situaciones de la vida real

Imaginad que miráis por una ventana de la clase y veis una farola en línea recta a 5 metros y el suelo forma con esa línea recta 40º. ¿A qué altura está la ventana del suelo?



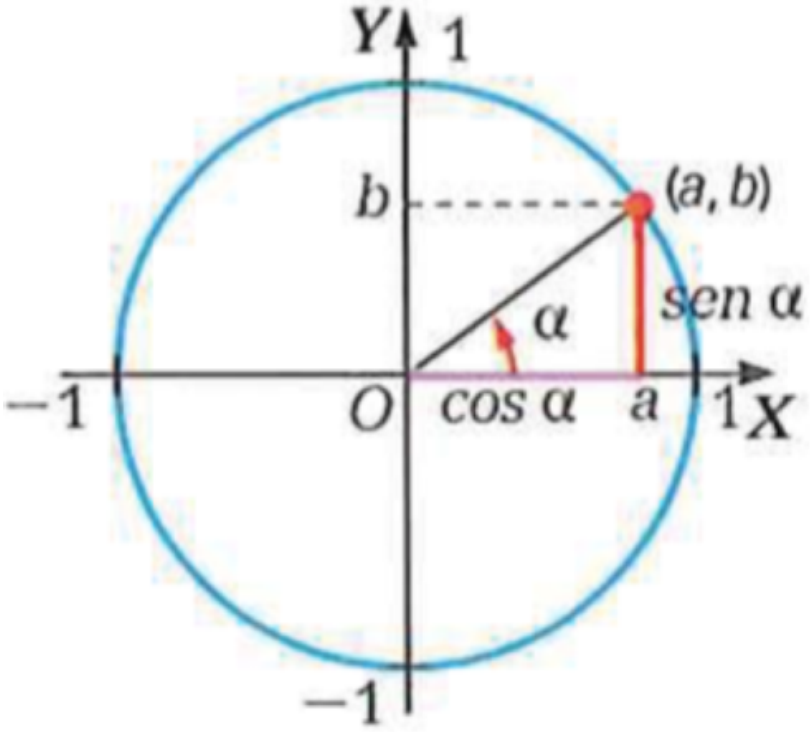
Ejercicios

1. ¿Existe un ángulo "x" tal que sen(x)=1/2 y cos(x)=1/4? ¿Puede valer el seno de un ángulo 1/8?.

2. Calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo α:
a) senα=1/4 y α del primer cuadrante
b) senα=-1/3 y α del tercer cuadrante.

2. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

Se llama **circunferencia *goniométrica*** a una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. A situar un ángulo cualquiera α en dicha circunferencia, este corta a la circunferencia en un punto P de coordenadas P(cos(α),sen(α))

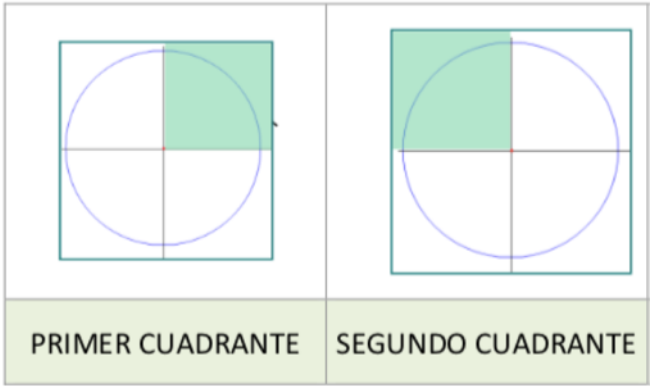


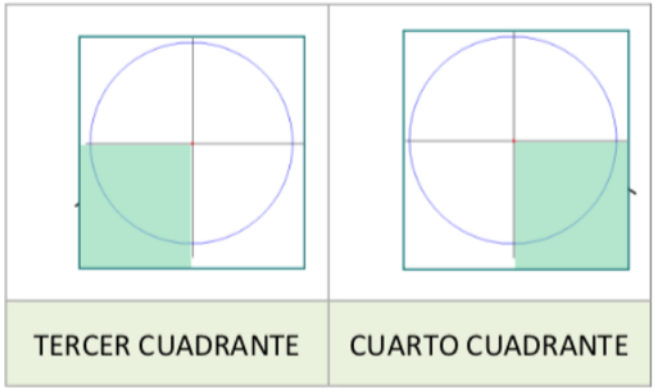
$$(a, b) = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

Como la hipotenusa del triángulo mide 1:

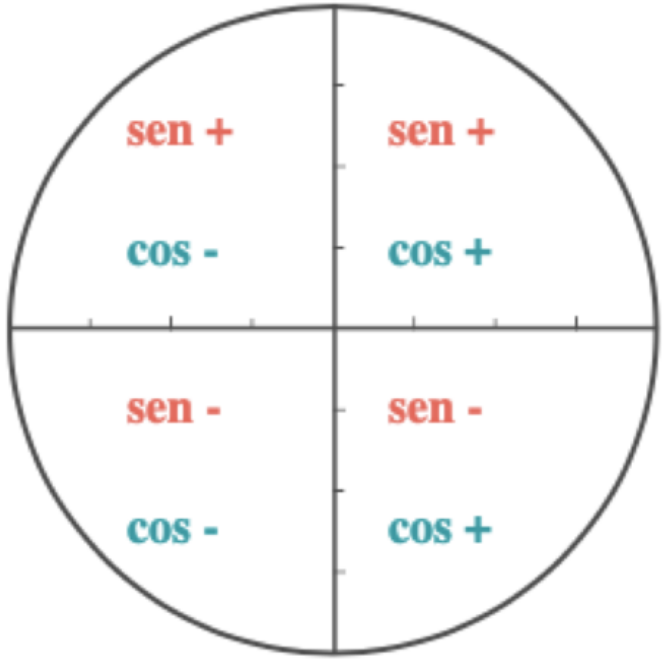
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{1} = b \qquad \cos \alpha = \frac{a}{1} = a$$

2. Cuadrantes y signos Circunf. Goniométrica





Signo según el cuadrante



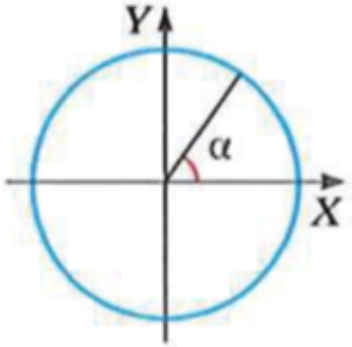
1.er cuadrante: $0° < \alpha < 90°$ 2.º cuadrante: $90° < \alpha < 180°$

3.er cuadrante: $180° < \alpha < 270°$ 4.º cuadrante: $270° < \alpha < 360°$

2. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

Signo según el cuadrante

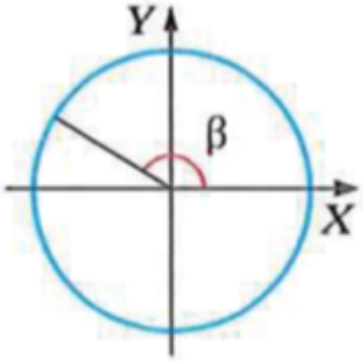
Los ángulos del 1.er cuadrante miden entre 0° y 90°.



$sen\ \alpha > 0$

$cos\ \alpha > 0$

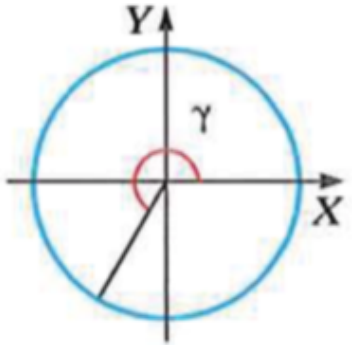
Los ángulos del 2.º cuadrante miden entre 90° y 180°.



$sen\ \beta > 0$

$cos\ \beta < 0$

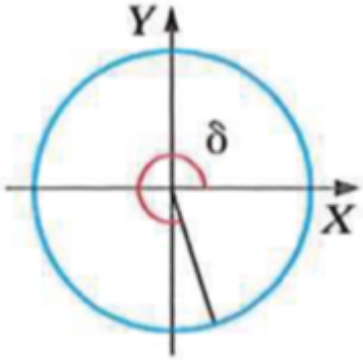
Los ángulos del 3.er cuadrante miden entre 180° y 270°.



$sen\ \gamma < 0$

$cos\ \gamma < 0$

Los ángulos del 4.º cuadrante miden entre 270° y 360°.



$sen\ \delta < 0$

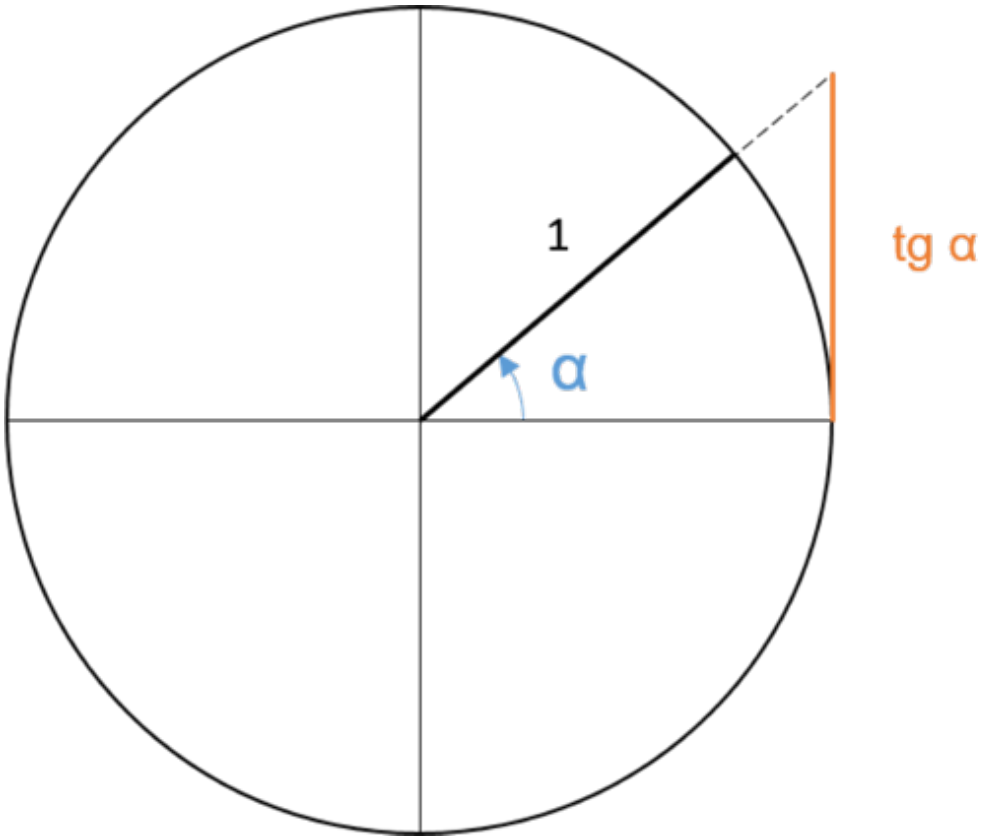
$cos\ \delta > 0$

2. Circunferencia Goniométrica (Radio = 1)

¿Pará que utilizamos la circunferencia goniométrica?

Usando la calculadora, obtén el valor de sin(x)=0,5. ¿Cuántas soluciones tiene?

La tangente en la circunferencia Goniométrica



¿Cuándo la tangente tiene dos valores iguales?.
Calcula las soluciones de tag(x)= -0,5

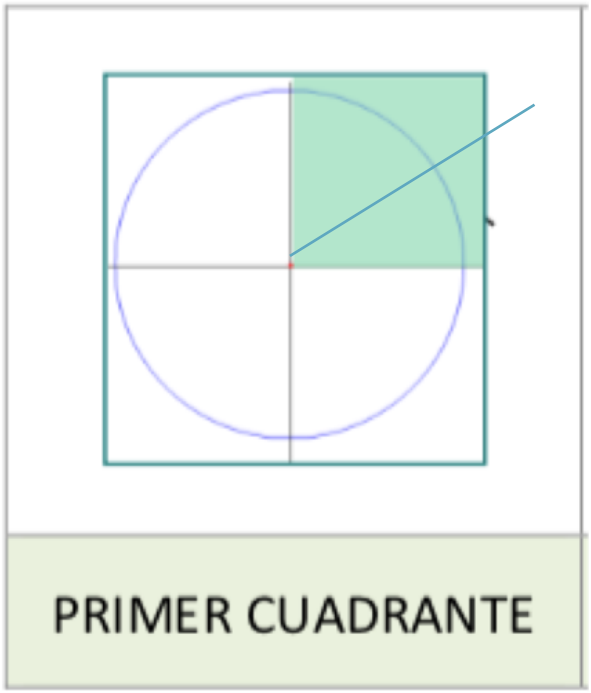
6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante y 2º Cuadrante (Ángulos suplementarios-suman 180º)

SEGUNDO CUADRANTE

$sen(180 - \propto)$

$\cos(180 - \propto)$



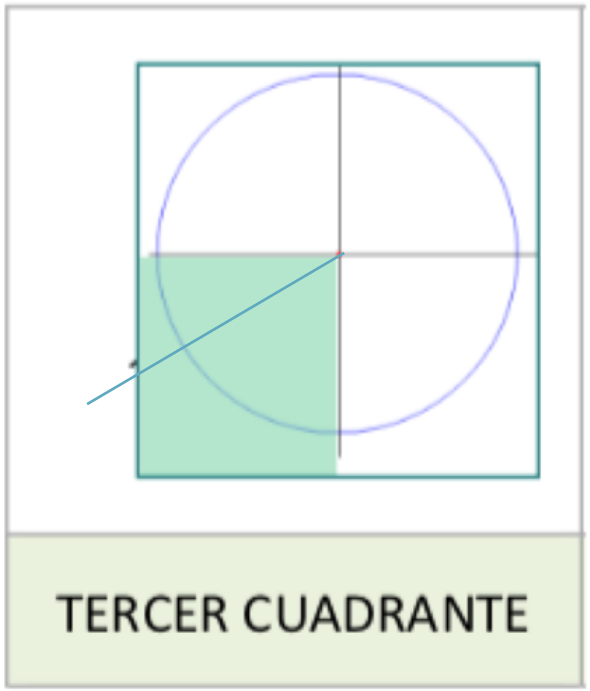
PRIMER CUADRANTE

$sen(\propto)$

$\cos(\propto)$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

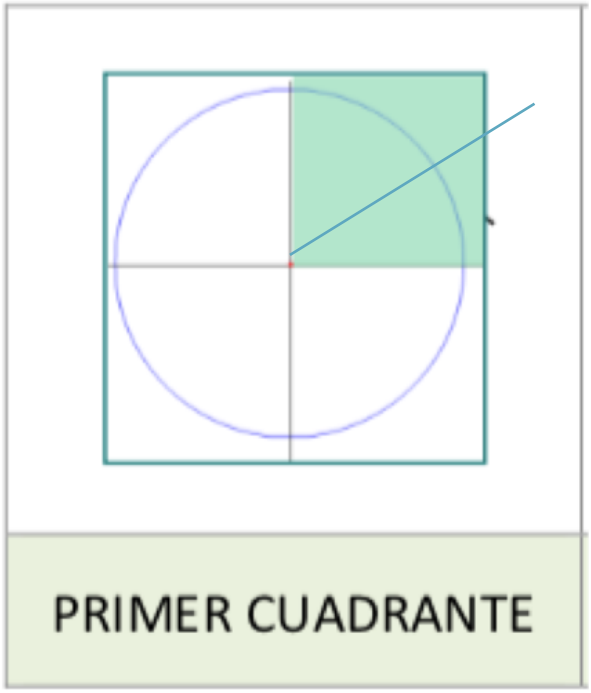
1º Cuadrante y 3º Cuadrante



TERCER CUADRANTE

$sen(180 + \propto)$

$\cos(180 + \propto)$



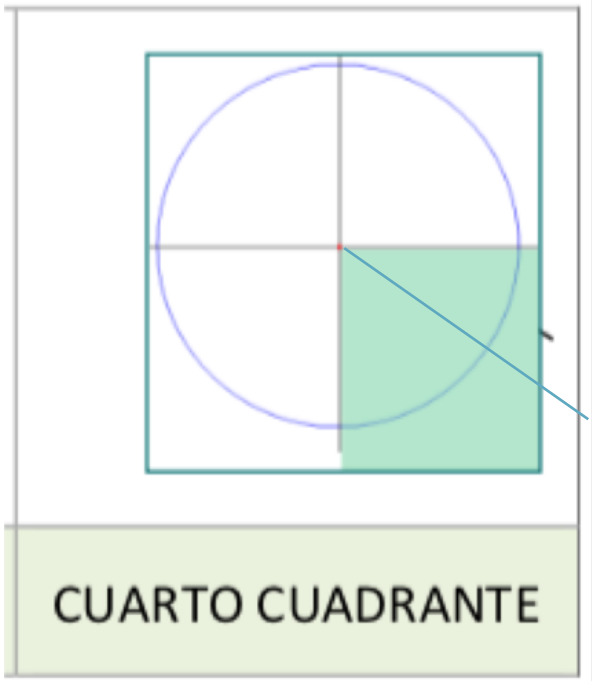
PRIMER CUADRANTE

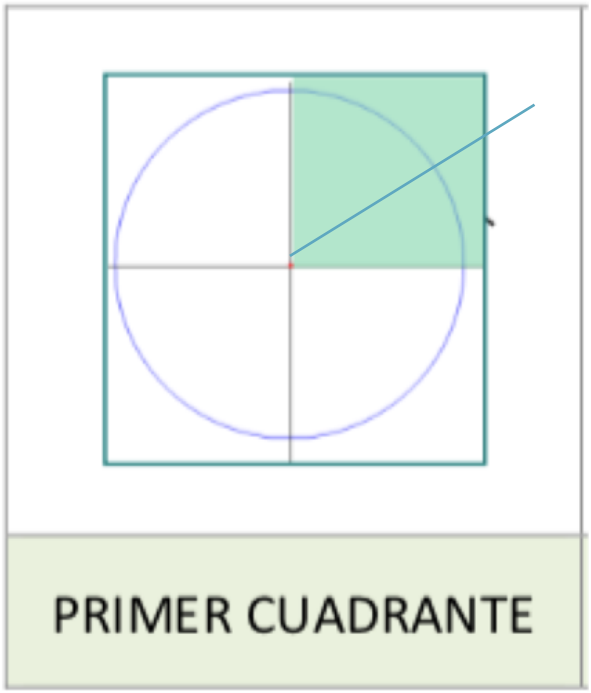
$sen(\propto)$

$\cos(\propto)$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante y 4º Cuadrante (Ángulos opuestos)





$sen(-\propto)$

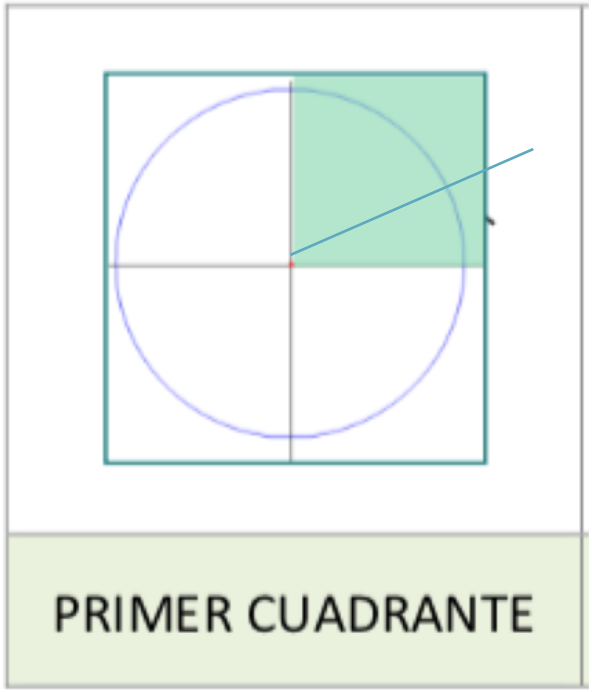
$\cos(-\propto)$

$sen(\propto)$

$\cos(\propto)$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

1º Cuadrante (Ángulos complementarios – Suman 90º)



$sen(\propto)$
$\cos(\propto)$

$sen(90 - \propto)$
$\cos(90 - \propto)$

6. Relaciones de razones trigonométricas de ciertos ángulos

Ángulos mayores de 360º

Escribe los siguientes ángulos en el intervalo [0,360)

a)375º

b) 470º

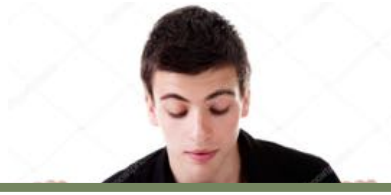
c) 715º

d)2920º

Ejercicios

3. Si sen 35º = 0,57 ; cos 35º = 0,82 ; tag 35º =0,70. Calcula las razones trigonométricas de 55º, 125º, 145º, 215º, 235º, 305º y 325º sin usar la calculadora.

Ejercicios



4. Si sec α = -2 y α no pertenece al tercer cuadrante calcular el resto de las razones trigonométricas.

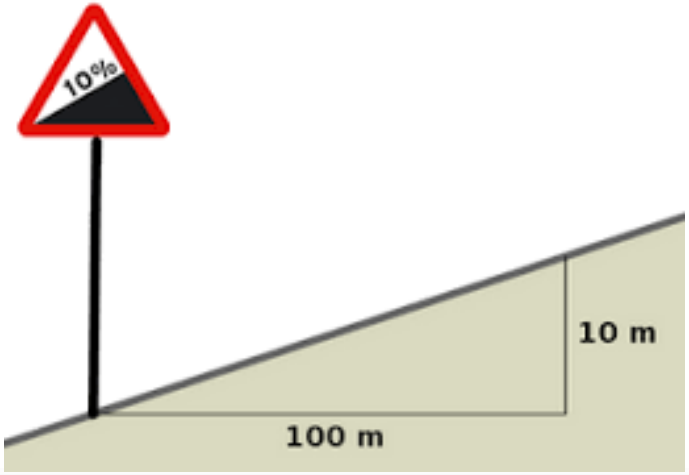
5. Dibuja un ángulo cuyo seno sea el doble que su coseno.

6. Si un ángulo está situado en el tercer cuadrante. ¿Qué signo tienen: la cotangente, la cosecante y la secante de ese ángulo?.

3. Resolución de Triángulos

- **TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS** - Razones Trigonométricas – T.Pitágoras
- **TODOS LOS TRIÁNGULOS** (Teorema del Seno - Teorema del Coseno)

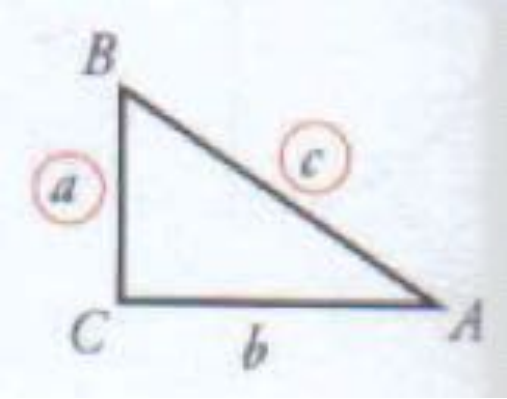
7. En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5 m en 100 m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100 m, ¿Cuánto hemos andado por la carretera?

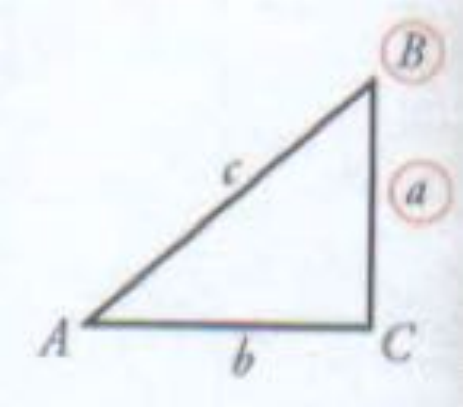


3. Resolución de Triángulos

8. a) En un triángulo rectángulo, un cateto a=11 cm y la hipotenusa c=20 cm . Halla los demás elementos.

b) En un triángulo rectángulo, un ángulo $\hat{B}$=50º y un cateto a=15 cm. Hallar los demás elementos.

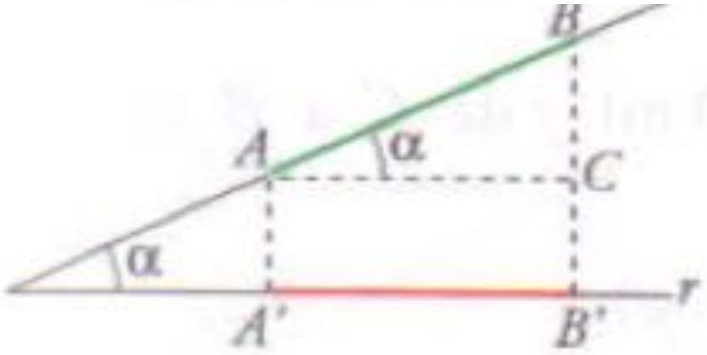




Algunos resultados en Triángulos Rectángulos

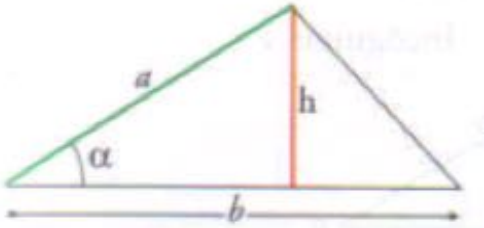
- **Proyección de un segmento**

En el triángulo ABC, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha \rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\alpha$



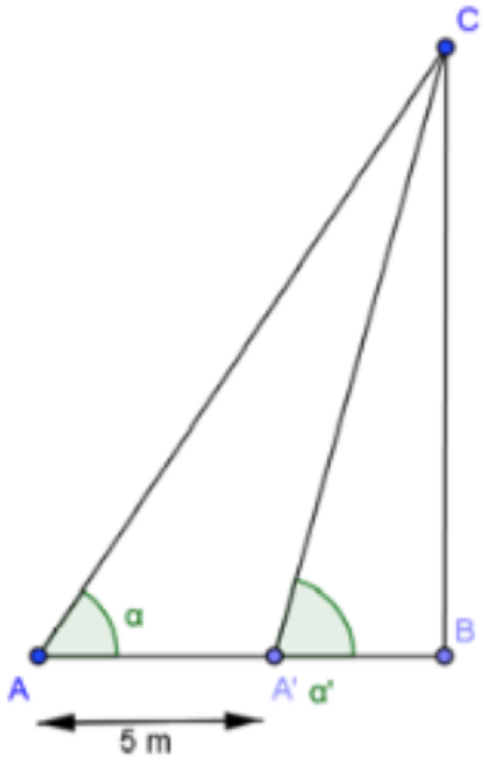
- **Altura de un triángulo**

En el triángulo de la izquierda, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\,\text{sen}\,\alpha$



Método de las tangentes

9. Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre.

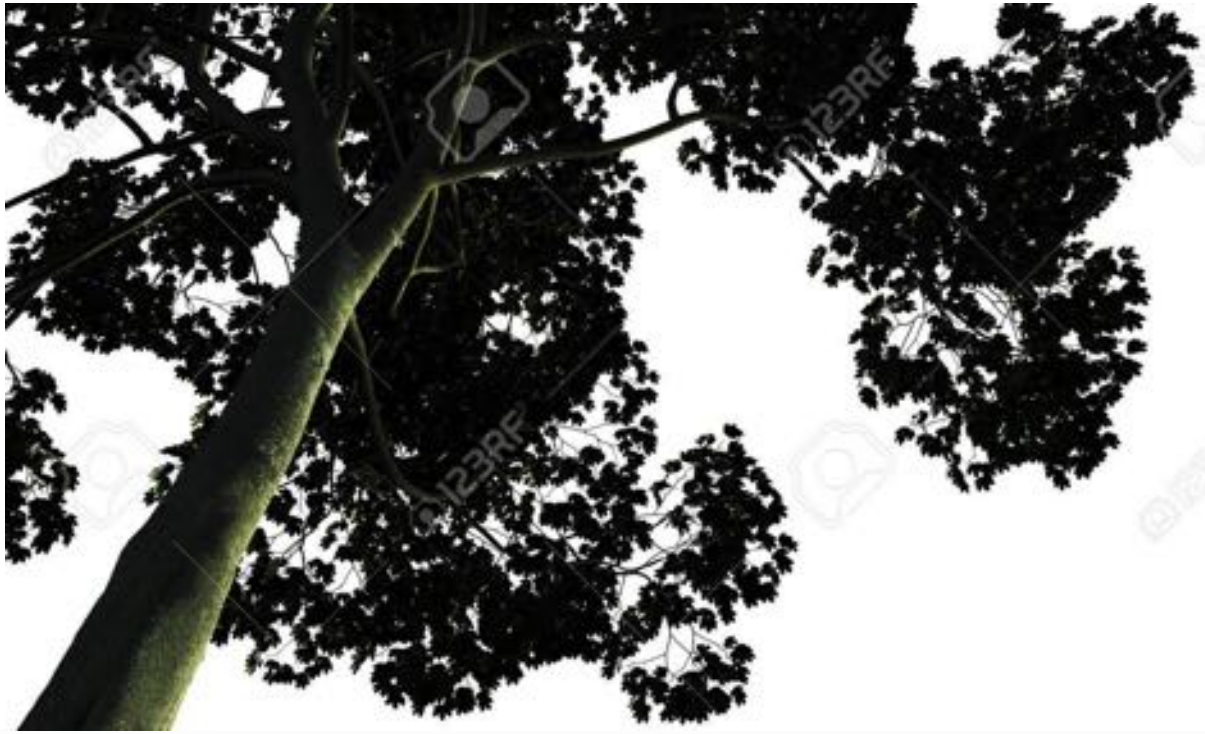


Método de las tangentes

10. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?

Método de las tangentes

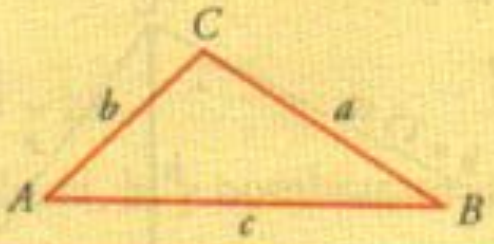
11. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42º ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de distancia?



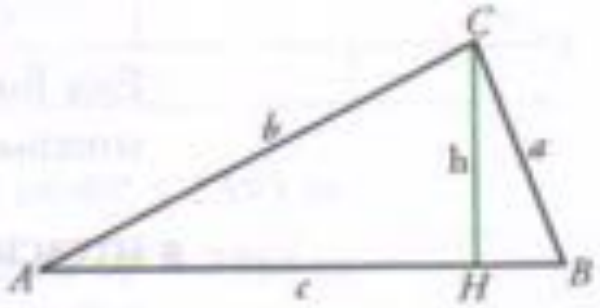
Teorema del Seno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c, y de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$



■ **Demostración**



$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\hat{A} &= \frac{h}{b} \rightarrow h = b\operatorname{sen}\hat{A} \\ \operatorname{sen}\hat{B} &= \frac{h}{a} \rightarrow h = a\operatorname{sen}\hat{B} \end{aligned}\right\} \; b\operatorname{sen}\hat{A} = a\operatorname{sen}\hat{B} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

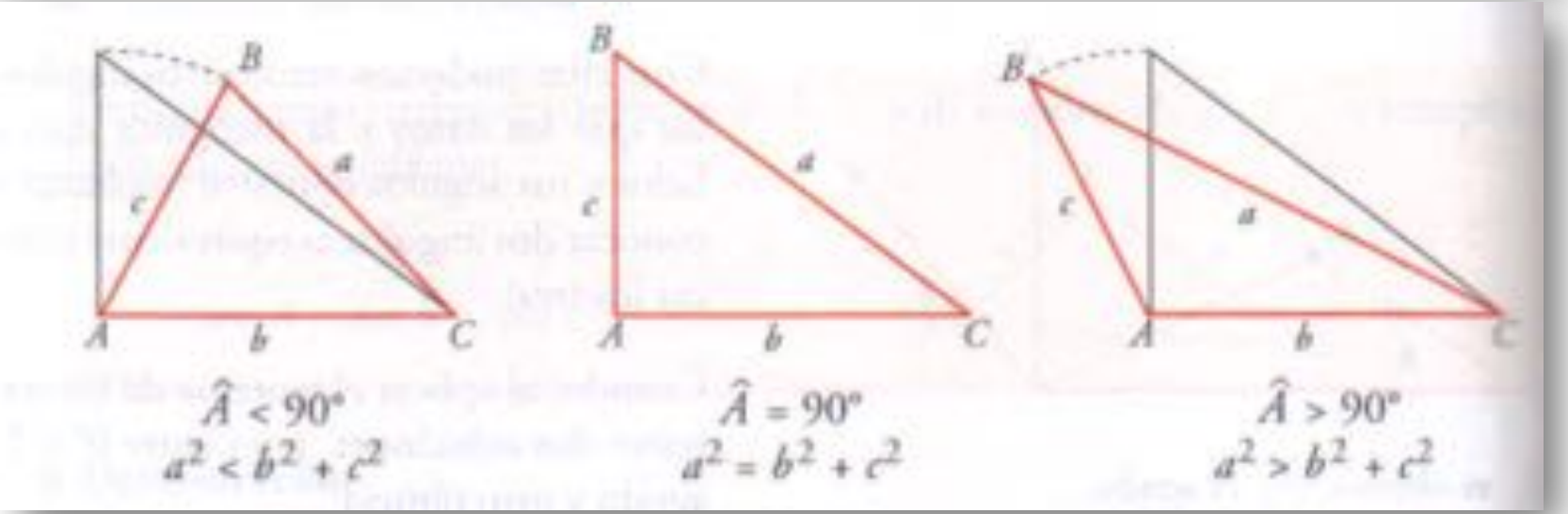
Teorema del Coseno o Teorema de Pitágoras Generalizado

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c, se cumple que:

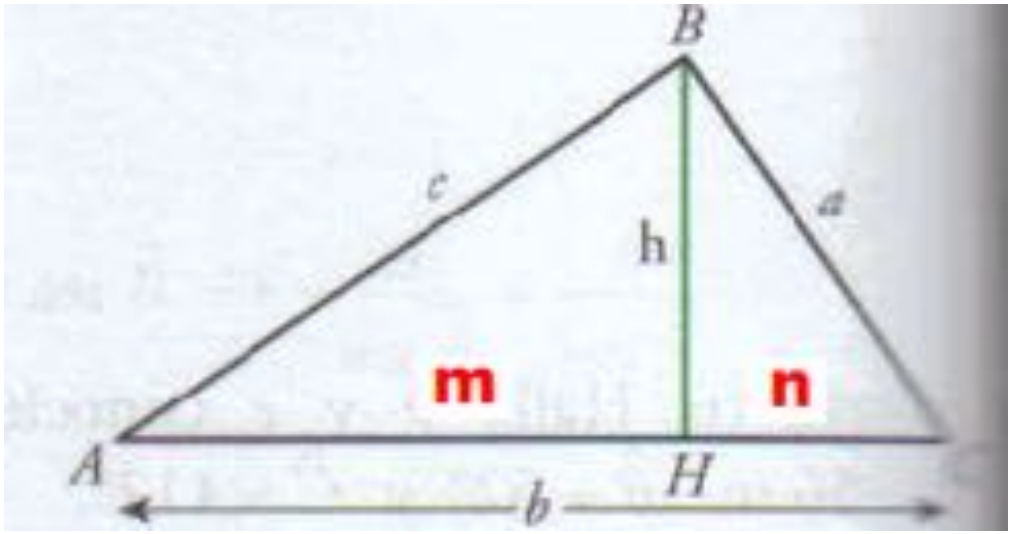
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



Demostración Teorema del Coseno



Trazamos la altura del triángulo h

cos A = m/c → m=c*cosA
n=b-m = b- c*cosA

Aplicamos el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC

$$a^2=h^2+n^2=h^2+(b-c^*\cos A)^2=h^2+b^2+c^2\cos^2 A-2bc\cos A$$

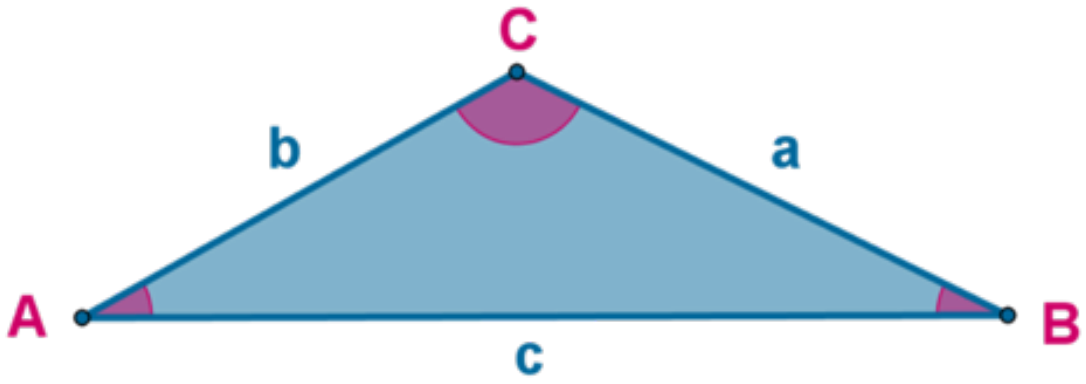
$$c^2=h^2+m^2=h^2+(c^*\cos A)^2=h^2+c^2\cos^2 A$$

Restándolos, obtenemos el Teorema del Coseno

3. Resolución de Triángulos

12. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: $A = 55º$, $C = 98º$, $a = 7'5$ cm. Resuélvelo.

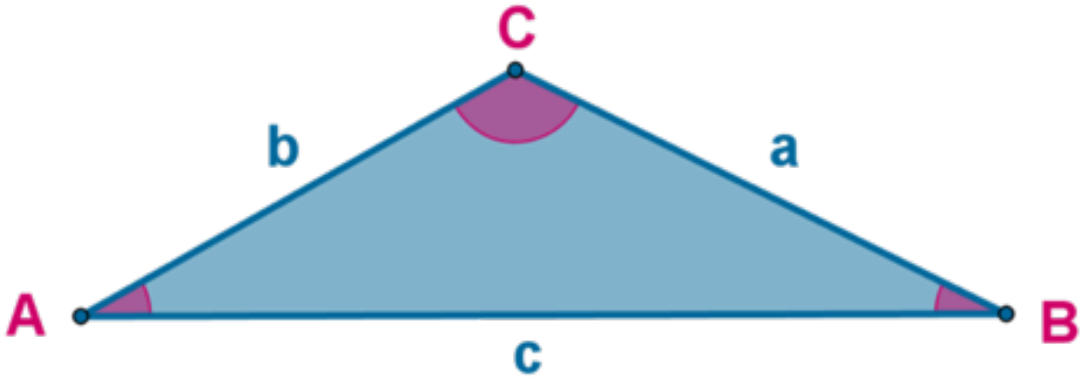
13. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.



3. Resolución de Triángulos

14. Dado el siguiente triángulo, calcula los elementos que faltan en cada caso:

a) A =45º, b=50 m, a=40 m
b) B =30º, a=5 cm, b=3 cm
c) A =45º, C=60º, b=20 m
d) C =45º , b=10m, c=6 m
e) C= 40º, a=7 m , b=22 m
f) a=5 cm, b=4 cm, c=4 cm



3. Resolución de Triángulos

15. Dos amigos están en una playa a 150 m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50º y el otro con un ángulo de 38º. ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?

3. Resolución de Triángulos

16. Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127º. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km. ¿Podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo=milla/hora;milla=1850m)

3. Resolución de Triángulos

17. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60o En la misma dirección pero formando un ángulo de 30 o vuela una perdiz a 100 m de altura. Si el buitre quiere comerse la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150 m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?.

Funciones y fórmulas Trigonométricas

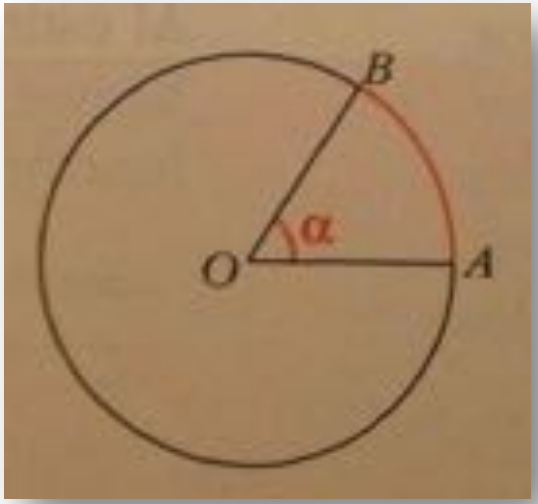
4. El radián, como nueva unidad de medida

5. Representación de Funciones Trigonométricas

6. Fórmulas Trigonométricas

7.Ecuaciones Trigonométricas

4. El radián, una nueva unidad de medida angular



Se llama **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

Longitud del arco AB = Segmento 0A =r

¿Qué longitud en grados mide un radián?

La longitud de una circunferencia es 2∏r, es decir, 2∏ veces el radio. Luego,

2∏ radianes ---------- 360º
1 radián ---------- x

¿Cuándo usar grados y cuándo radianes?

Los grados se usan generalmente para problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general.

Los radianes se utilizan más en la representación y estudio de las funciones trigonométricas

Ejercicios

18. Expresa en radianes las siguientes medidas: 60º, 120º, 225º, 330º.

19. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.

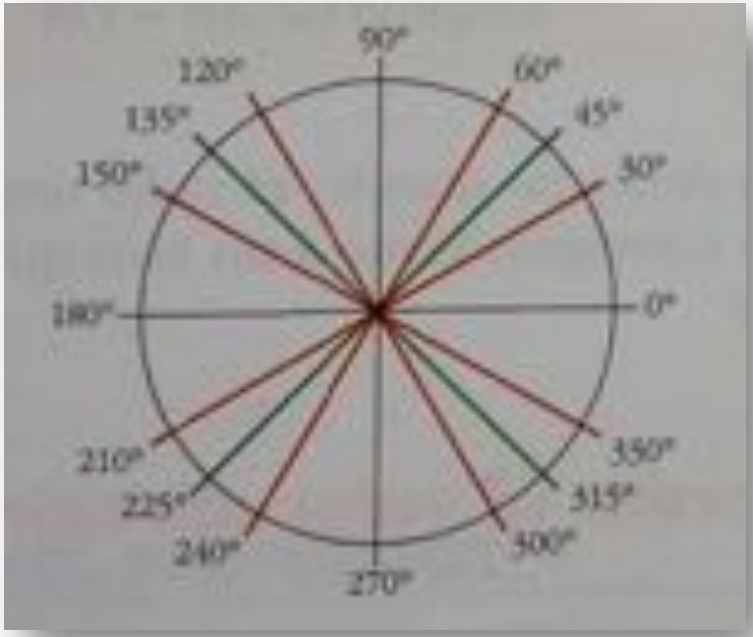
20. ¿Cuánto suman (en radianes) los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?

21. Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2 m. ¿cuánto espacio hemos recorrido? ¿y si tuviera radio 0’5 m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

5. Funciones Trigonométricas

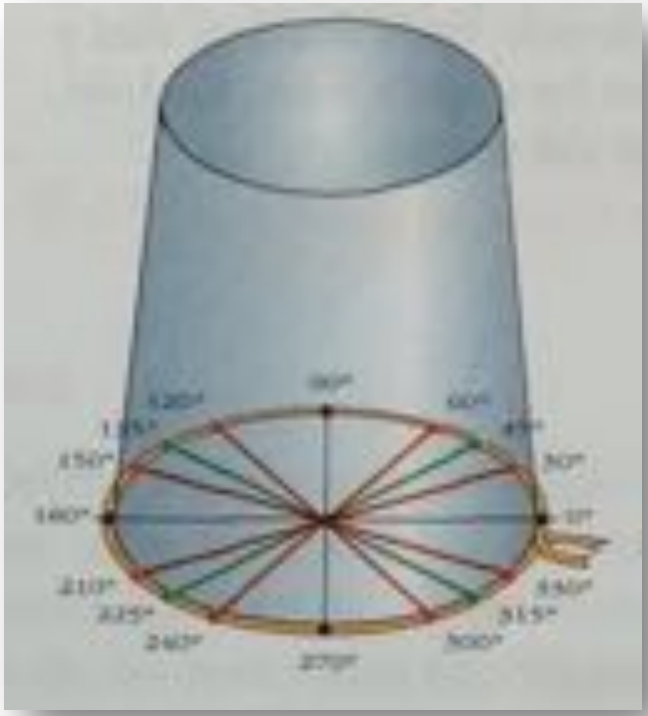
Vamos a representar la función y=sen(x)

Con un vaso pequeño, dibuja una circunferencia de unos 5 ó 6 cm de diámetro. Traza un sistema de ejes coordenados tomando como origen el centro de la circunferencia.

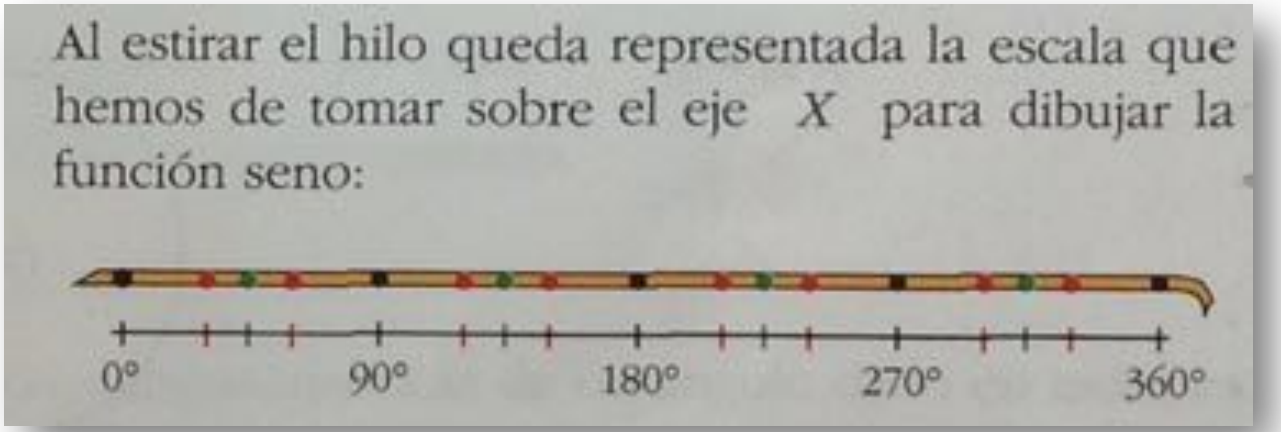


5. Funciones Trigonométricas

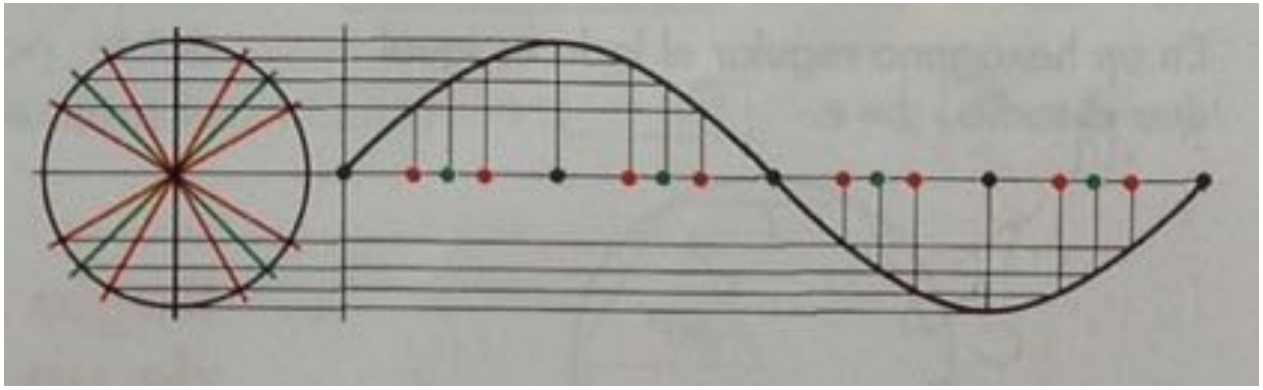
Vuelve a poner el vaso sobre la circunferencia. Enrolla a su alrededor, apoyado sobre el papel, un hilo de lana. Pinta sobre él los 16 puntos.



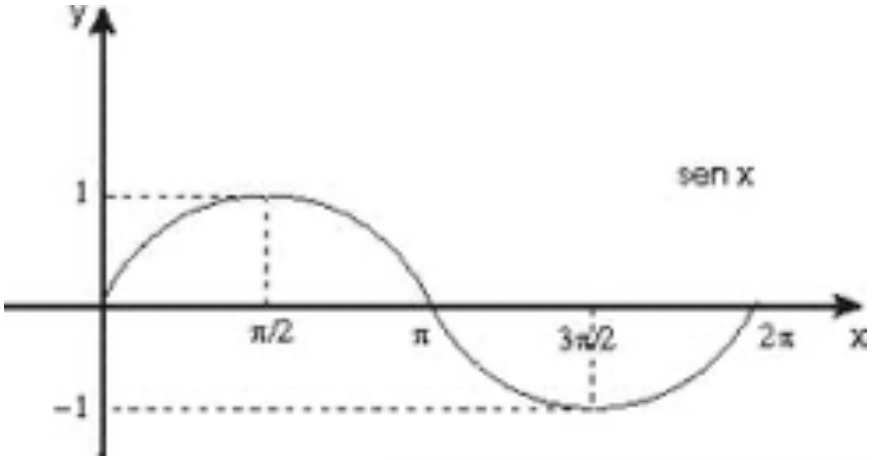
5. Funciones Trigonométricas

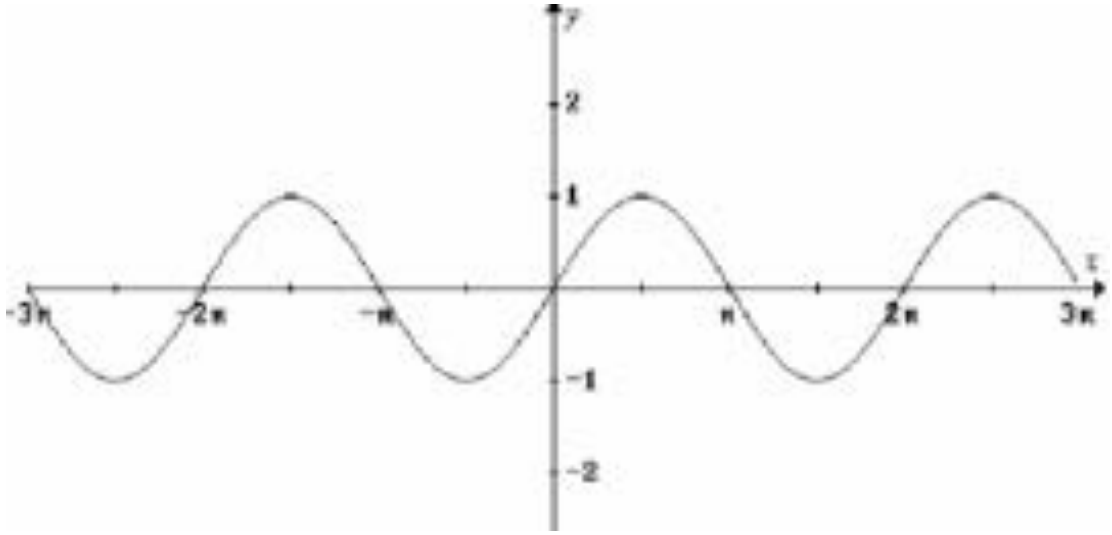


La construcción de la función y=sen(x) queda así:

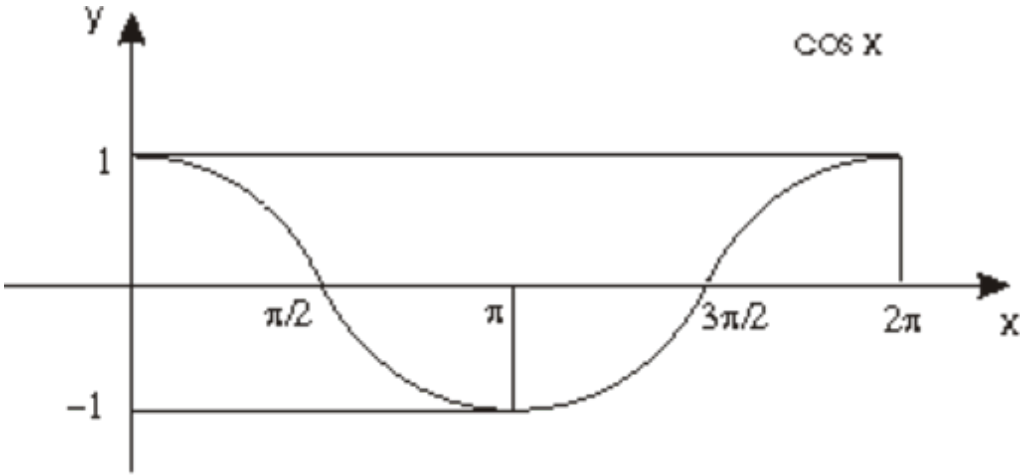


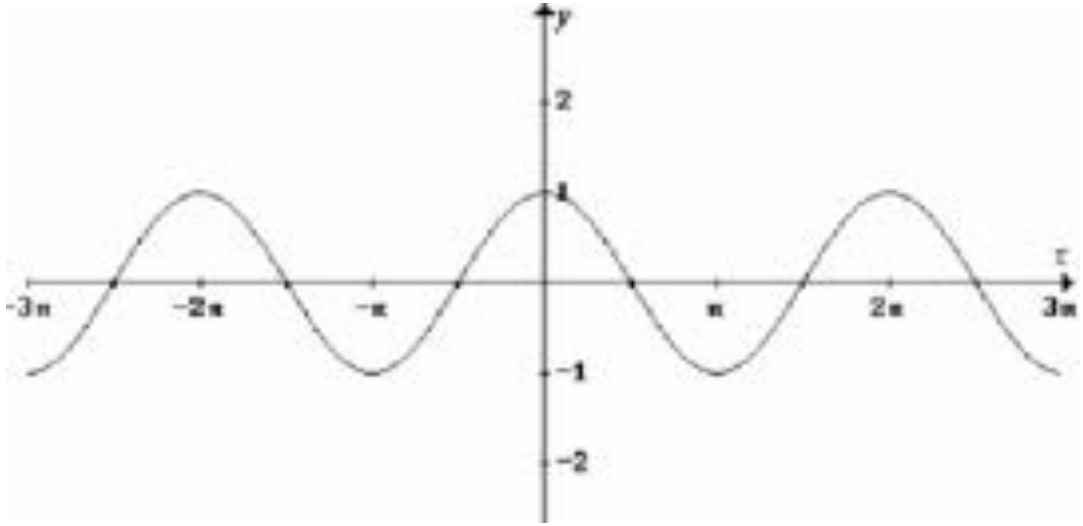
Función y=sen(x)



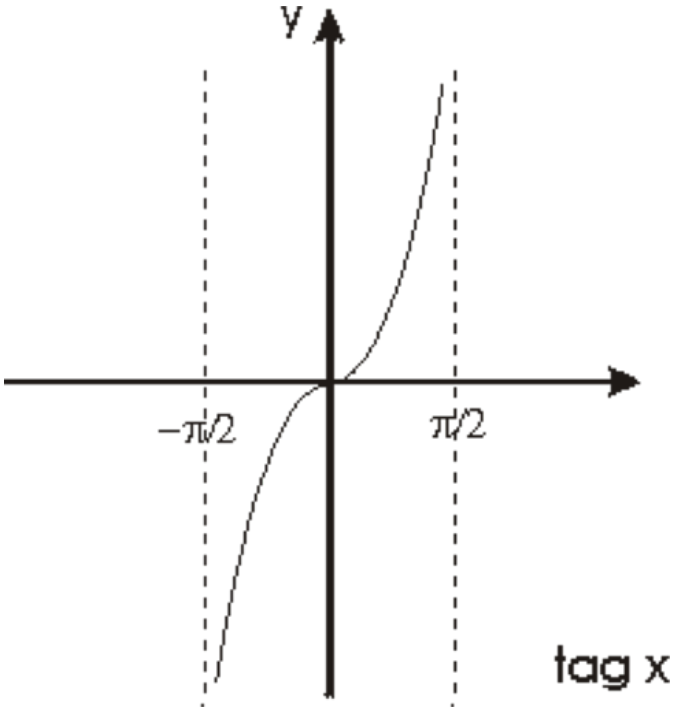


Función y=cos(x)

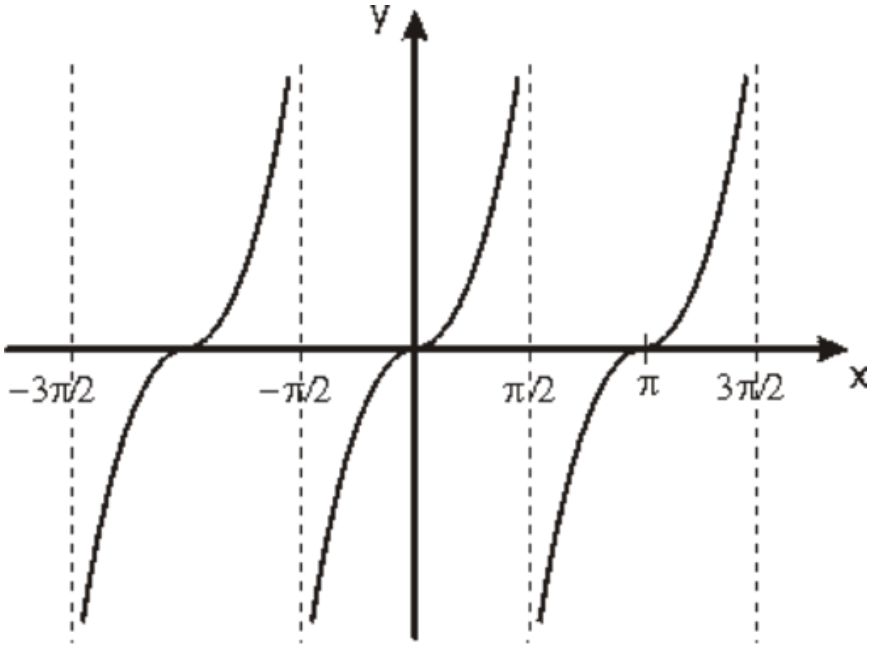




Función y=tag(x)

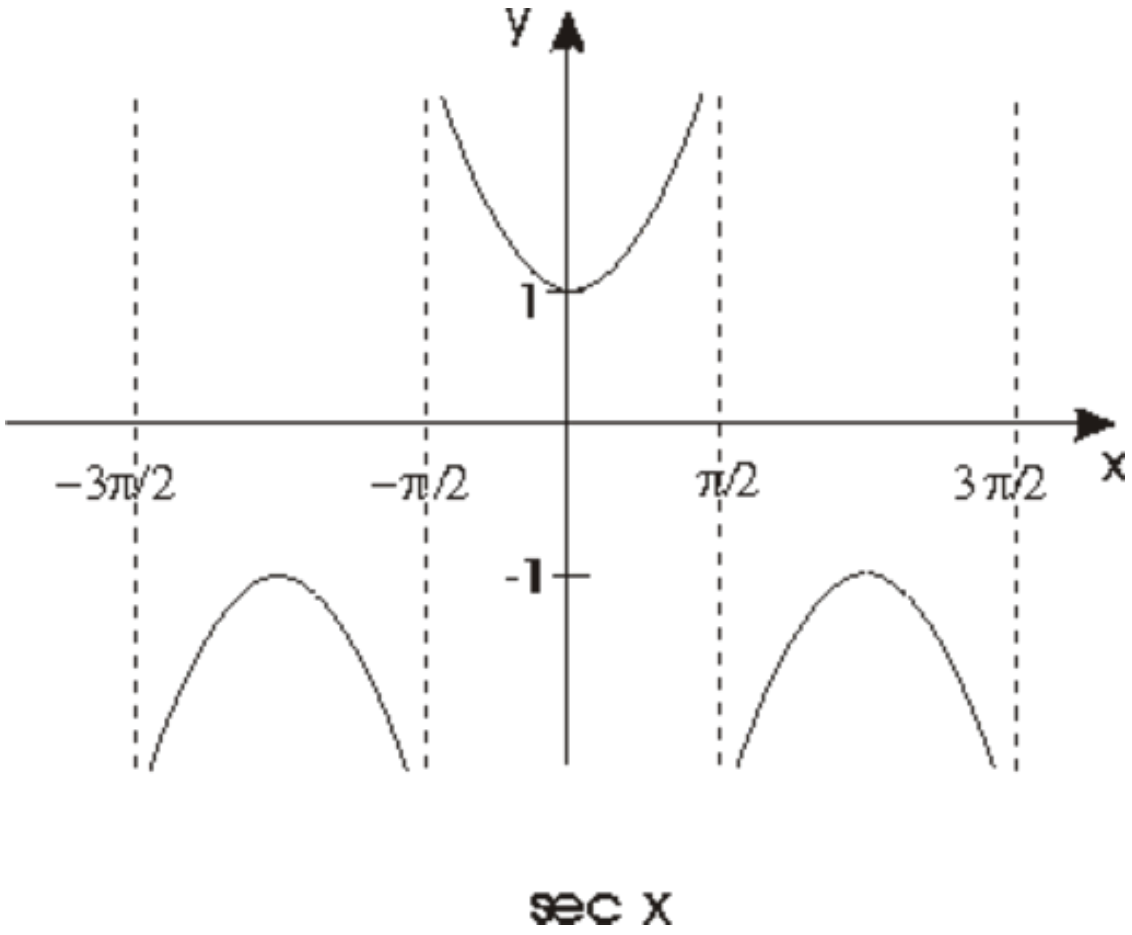


tag x



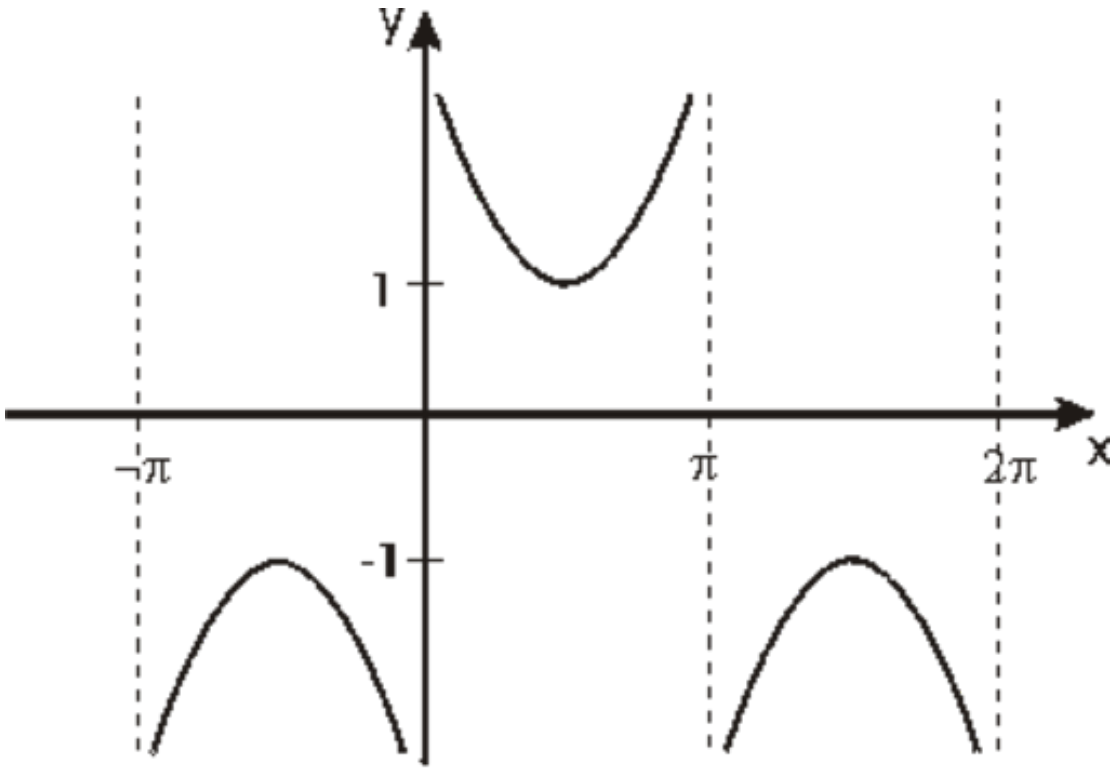
tag x

Función y=sec(x)=1/cos(x)

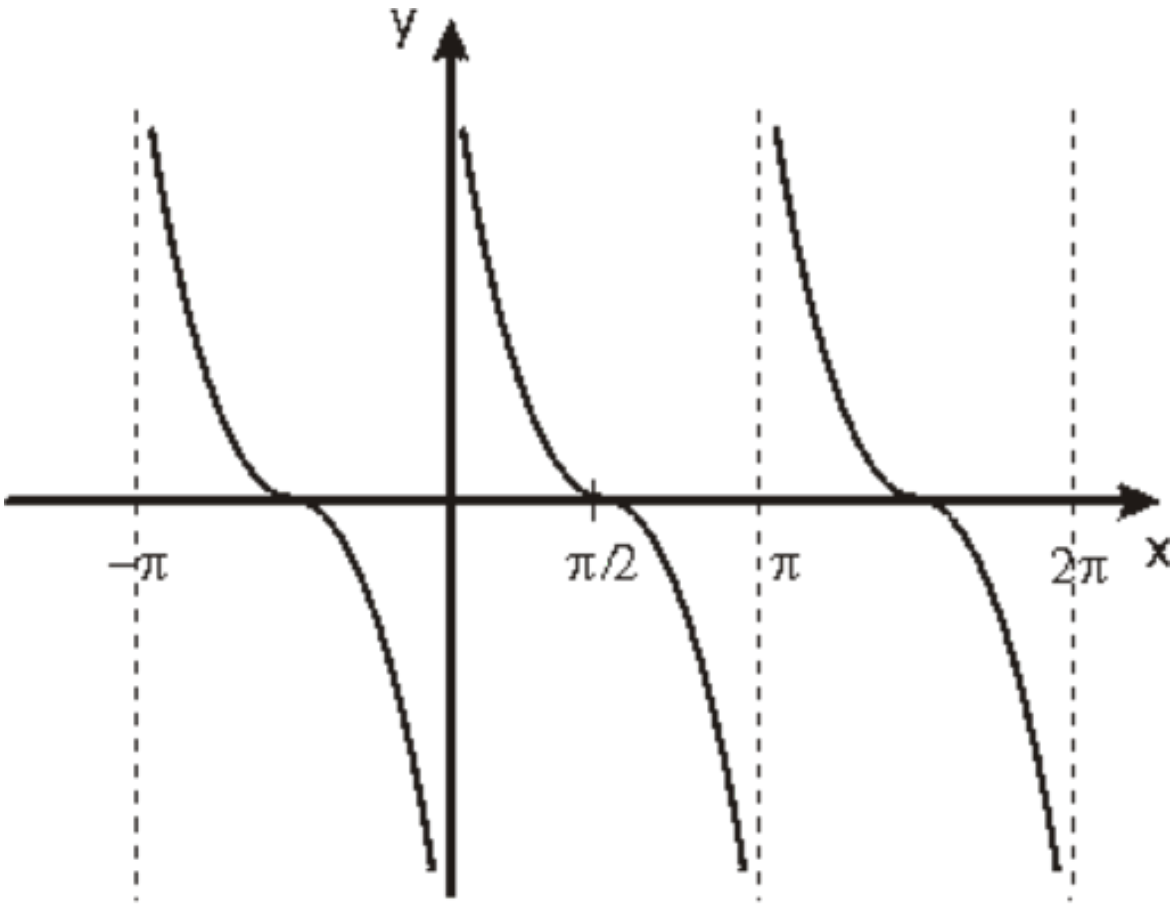


sec x

Función y=cosec(x)=1/sen(x)



Función y=cotag(x)=1/tag(x)



cotag x

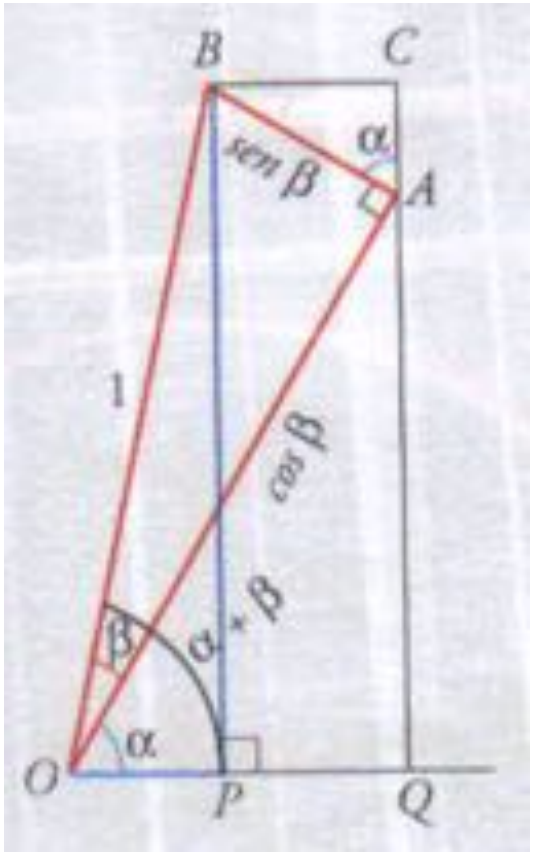
Representar las siguientes funciones:

$y = \text{sen}(2x)$	$y = \text{sen}(x/2)$
$y = \cos(2x)$	$y = \cos(x/2)$
$y = \text{tag}(2x)$	$y = \text{tag}(x/2)$

7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo suma a+b

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\text{sen}(b)$$



Demostración: Para demostrarlo nos apoyamos en la figura de la imagen

(1) sen(α+β) = PB/1 =PB= QA+AC

(2) Triángulo OQA, sen(α)=QA/cos(β)
Por tanto, QA= sen(α)*cos(β)

(3) Triángulo ABC, cos(α)=AC/sen(β)
Por tanto, AC=sen(β)*cos(α)

https://www.youtube.com/watch?v=9eT2d0cdYyY

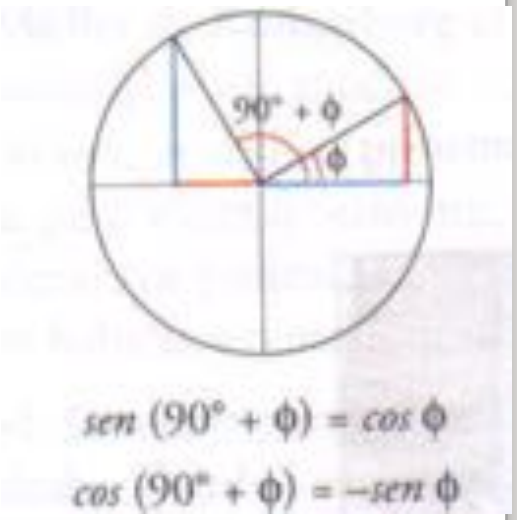
7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo suma a+b

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)$$

Demostración: Usamos que
cos(x)=sen(90+x)

Luego cos(α+β)=sen(90+ α+β)



$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}[90^\circ + (\alpha+\beta)] = \operatorname{sen}[(90^\circ+\alpha)+\beta] \overset{(*)}{=} \\ &= \operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ+\alpha)\operatorname{sen}\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + (-\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo suma a+b

$$\text{tag}(a+b)=\frac{tag(a)+tag(b)}{1-tag(a)tag(b)}$$

Demostración:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta}\overset{(**)}{=}$$

(**) Dividimos numerador y denominador por $cos\,\alpha\,cos\,\beta$.

$$=\frac{\frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}+\frac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}{\frac{cos\,\alpha\,cos\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}-\frac{sen\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta}}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo suma a+b

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\text{sen}(b)$$

$$\cos\,(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - \text{sen}(a)\cdot\text{sen}(b)$$

$$\text{tag}(a+b)=\frac{tag(a)+tag(b)}{1-tag(a)tag(b)}$$

Razones Trigonométricas del ángulo diferencia a-b

$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot\text{sen}(b)$$

$$\cos\,(a-b) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \text{sen}(a)\cdot\text{sen}(b)$$

$$\text{tag}(a-b)=\frac{tag(a)-tag(b)}{1+tag(a)tag(b)}$$

7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo doble

$\text{sen}\,(2a) = 2 \cdot \text{sen}(a) \cdot \cos(b)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$

$\text{tag}(2a) = \frac{2tg(a)}{1 - tg^2(a)}$

7. Fórmulas Trigonométricas

Razones Trigonométricas del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \qquad tg\,\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

Demostración:

$$\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

De esta forma:

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\\ 1=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}$$ (Esta es la igualdad fundamental.)

Sumando y restando ambas igualdades se obtiene, respectivamente:

$$\begin{cases}1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\ 1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}$$

7. Fórmulas Trigonométricas

Sumas y diferencias de senos y cosenos

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

Ejercicios

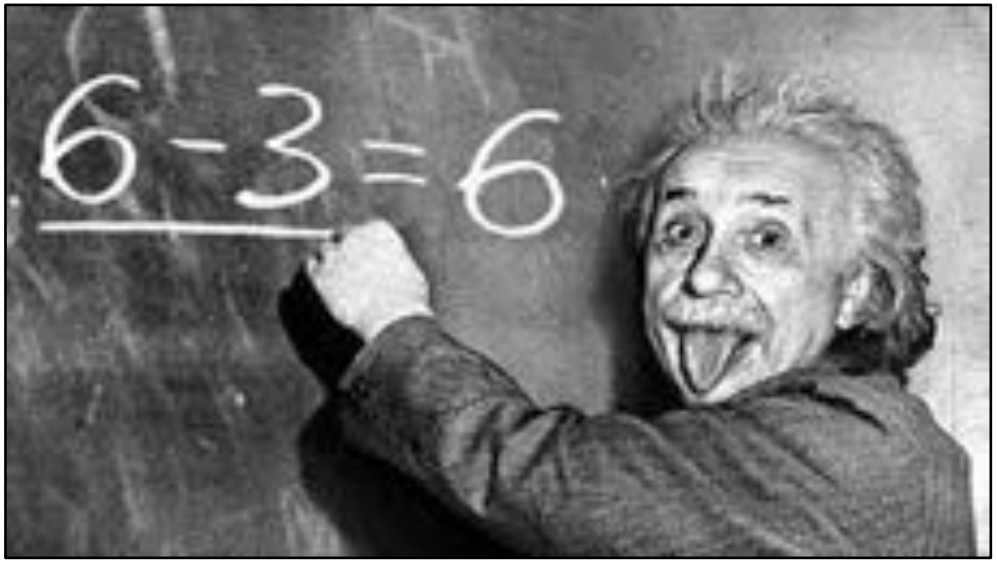
22. Calcula las razones trigonométricas de 75º, 120º, 150º, 105º y 135º sin usar la calculadora, utilizando las formulas de seno y coseno de una suma, a partir de las razones de 30º, 45º, 60º y 90º que ya conoces.

Ejercicios

23. Demuestra que:

a) $1+tg^2(a) = sec^2(a)$

b) $1+cotg^2(a) = cosec^2(a)$



Ejercicios

24. Demuestra que $\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)} = \frac{1}{tg(a)}$

25. Demuestra que $\frac{2\text{sen(a)}-\text{sen(2a)}}{2sen(a)+sen(2a)} = \frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}$

Ejercicios

26. Demuestra que $2tg(a)\cdot sen^2(a/2) + sen\,(a) = tg(a)$
27. Demuestra que
$(sen(a)+cos(a))^2 - (sen(a)-cos(a))^2 = 4\,sen(a)cos(a)$
28. Demuestra que $cos(a+60º) - cos(a+120º) = cos(a)$
29. Demuestra que $sen(a)\cdot cos^2(a) + sen^3(a) = sen(a)$

Ejercicios

30. Demuestra que

$$tg(a + 45º) - tg(a - 45º) = \frac{2 + 2tg^2(a)}{1 - tg^2(a)}$$

31. Demuestra que

$$\frac{sen(x)}{1 + \cos(x)} + \frac{sen(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{2}{sen(x)}$$

Ejercicios

32. Demuestra que

$$\frac{\cos(a)+sen(a)}{\cos(a)-sen(a)} \cdot \cos(2a) = 1 + sen(2a)$$

33. Demuestra que

sen(3a) = 3 sen(a)- 4 sen^4(a)

8. Algunas ideas para resolver Ecuaciones Trigonométricas

(i) Resolver $\text{sen}^2(x)-\text{sen}(x)+2=0$

8. Algunas ideas para resolver Ecuaciones Trigonométricas

(ii) Resolver $\cos^2(x)+\text{sen}(x)=1/2$

8. Algunas ideas para resolver Ecuaciones Trigonométricas

(iii) Resolver $\cos^2(x)-3\text{sen}^2(x)=0$

8. Algunas ideas para resolver Ecuaciones Trigonométricas

(iv) Resolver $2\cos(x)=3\text{tag}(x)$

8. Algunas ideas para resolver Ecuaciones Trigonométricas

(v) Resolver $\operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(x)=1$

8. Ecuaciones Trigonométricas

34. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\text{sen}(2x)=1/2$

b) $\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$

c) $2\text{sen}(x)=\cos(x)$

d) $\text{sen}(2x) = \text{tg}(x)$

8. Ecuaciones Trigonométricas

35. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $tg(x) = -\sqrt{3}$

b) $\cos^2(x) = 1$

c) $tg^2(x)-tg(x)=0$

d) $2sen^2(x)+3cos(x)=3$

8. Ecuaciones Trigonométricas

36. Resuelve la ecuación

$$\cos(x+30º) = \text{sen}(x)$$

37. Resuelve la ecuación

$$\cos(3x)+\cos(x)=0$$

(Pista: Usar la fórmula $\cos(A)+\cos(B)=2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$)

38. Resuelve la ecuación

$$\text{sen}(5x)-\text{sen}(3x)=0.$$

Utiliza la fórmula de transformar resta de senos en producto.

8. Ecuaciones Trigonométricas

39. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2tg(x)-3cotg(x)-1=0$

b) $\cos^2(x) - 3\text{sen}^2(x) = 0$

c) $\text{sen}(2x+60º)+\text{sen}(x+30º)=0$

d) $\text{sen}^2(x)-\cos^2(x) = 1/2$

8. Ecuaciones Trigonométricas

40. Resuelve $4\cos(2a)+3\cos(a)=1$.

41. Resuelve

$\text{sen}(180º-a) = \cos(270º-a) + \cos(180º)$

42. Resuelve $\text{sen}(45º-a) + \sqrt{2}\,sen(a) = 0$