

# 9 Ángulos y rectas

## ANTES DE COMENZAR LA UNIDAD...

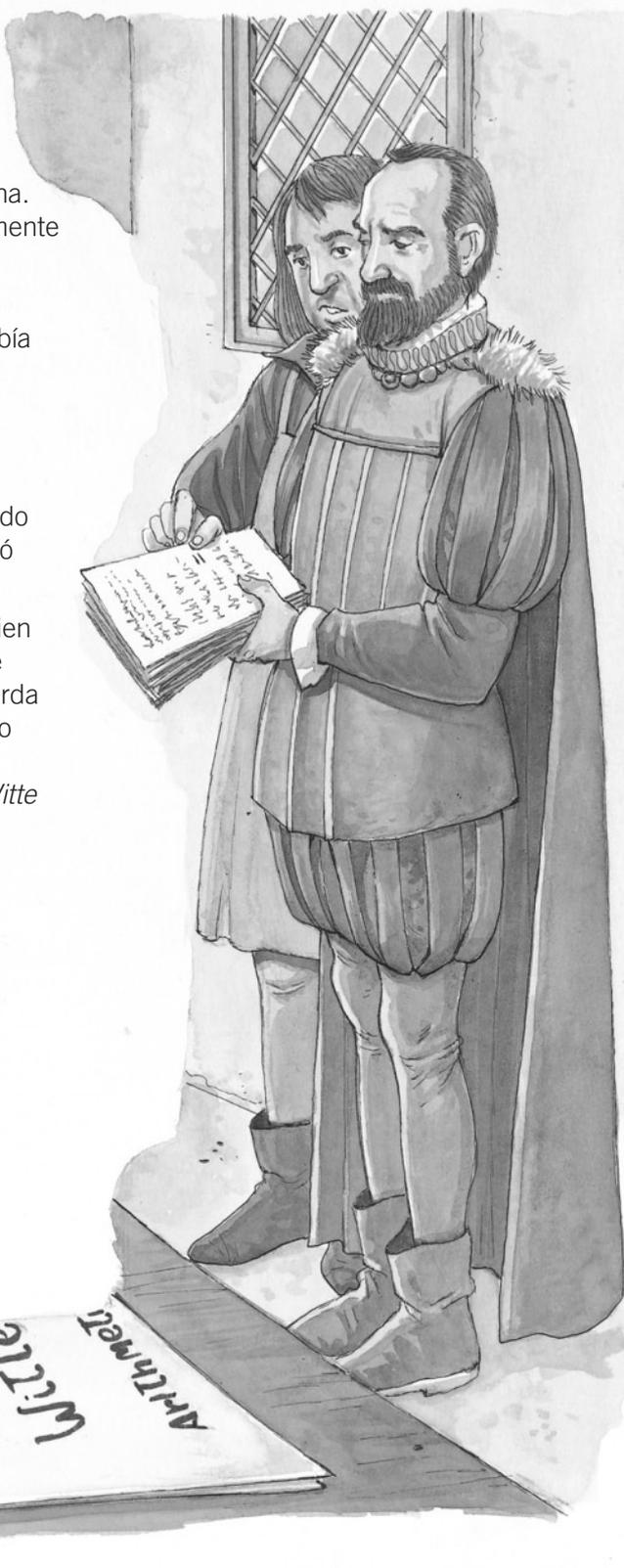
### El nacimiento de un signo

**Robert Recorde** nació en 1510 en Gales en el seno de una familia acomodada, lo que le permitió en 1525 acudir a la Universidad de Oxford y más tarde a la de Cambridge para estudiar Medicina. Fue médico personal del rey Eduardo VI y posteriormente de su hermanastra María Tudor.

Vivió en una época en la que Inglaterra se dividía por motivos religiosos (años antes Enrique VIII se había escindido de la Iglesia Católica de Roma) y políticos con los problemas sucesorios a partir de la muerte de Eduardo VI, único hijo varón de Enrique VIII.

Murió encarcelado en Londres en 1558, adonde fue enviado por una denuncia de un rival político, acusado de unas deudas generadas en Irlanda cuando trabajó como administrador de una mina.

Su aportación matemática no es muy conocida. Si bien se considera que fue el introductor del Álgebra entre los matemáticos británicos; sin embargo, se le recuerda porque es el primero en utilizar el signo  $=$ . Este signo aparece por primera vez en un libro de Álgebra que publicó en 1557 con el título de *The Whelstone of Witte* (*La piedra de afilar el ingenio*).



# CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

## Ángulos en el reloj



Los relojes tienen dos agujas: la horario, que indica las horas, y la minuter, que indica los minutos. Hay relojes que tienen otra manecilla que señala los segundos. La esfera de la mayoría de los relojes está dividida en doce partes iguales. Cada una de esas partes indica una hora.

En estos relojes, cada uno de esos arcos mide:  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ .

Durante una hora, la aguja horario recorre este arco de  $30^\circ$  (es decir, cada minuto avanza  $0,5^\circ$ ), y la aguja minuter recorre el círculo completo del reloj, es decir,  $360^\circ$ . Por tanto, en una hora, el recorrido del minuter es 12 veces mayor que el recorrido del horario ( $360^\circ : 30^\circ = 12$ ).

*¿Qué ángulo forman las agujas horario y minuter del reloj cuadrado?*

Ese ángulo es la suma del ángulo que forma la aguja minuter con el punto que señala las 12, y el ángulo formado con ese mismo punto por la aguja horario.

Observa que la aguja horario no está exactamente en las 2.

Desde que estaba señalando las 12 han pasado 110 minutos, es decir, ha avanzado  $55^\circ$ .

$$\text{Ángulo aguja minuter: } 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ.$$

$$\text{Ángulo aguja horario: } 110 \cdot 0,5^\circ = 55^\circ.$$

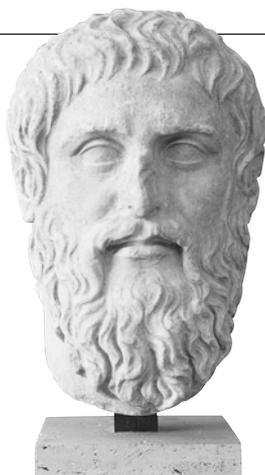
El ángulo que forman ambas es, por tanto, de  $60^\circ + 55^\circ = 115^\circ$ .

## Platón

Platón (420-348 a.C.) ejerció una gran influencia en el desarrollo de las ciencias exactas.

Fundó en Atenas la famosa Academia. En su entrada había un rótulo que decía: «Nadie entre aquí que no sepa Geometría».

Entre otras frases características de Platón, se encuentran: «Los números gobiernan el mundo» o «Cuando Dios ordenó el mundo, lo adornó de formas y números».



## El calendario

Los babilonios, hace cerca de 6.000 años, ya dividían el año en 360 días. Para ello dividieron una circunferencia en 360 partes iguales, obteniendo el grado sexagesimal.



# 9 Ángulos y rectas

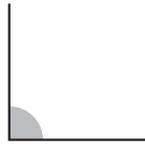
## CONTENIDOS PREVIOS

### CONVIENE QUE...

Recuerdes los **tipos de ángulos** que existen.

### PORQUE...

Te ayudará a comprender otras clasificaciones de ángulos.



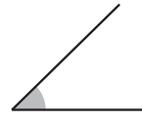
**Ángulo recto**

Sus lados son perpendiculares.



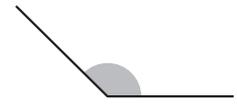
**Ángulo llano**

Sus lados están sobre la misma recta.



**Ángulo agudo**

Ángulo menor que el recto.



**Ángulo obtuso**

Ángulo mayor que el recto y menor que el llano.

### CONVIENE QUE...

Distingas entre **línea recta**, **semirrecta** y **segmento**.

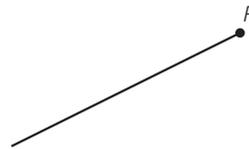
### PORQUE...

Lo necesitarás para comprender el concepto de ángulo y su trazado.



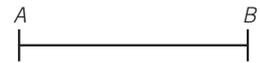
**Línea recta**

No tiene origen ni final.



**Semirrecta**

Tiene origen, el punto  $P$  (vértice de la semirrecta), pero no tiene final.



**Segmento**

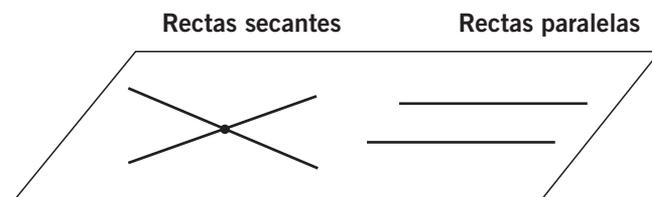
Tiene origen y final en los puntos  $A$  y  $B$ , extremos del segmento.

### CONVIENE QUE...

Conozcas las **posiciones relativas de dos rectas en el plano**.

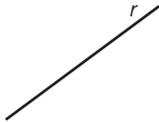
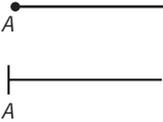
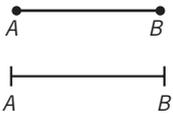
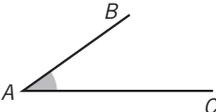
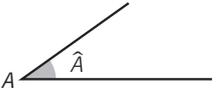
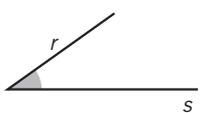
### PORQUE...

Es útil para comparar los ángulos que se forman al cortarse varias rectas.



Si dos rectas secantes al cortarse determinan cuatro ángulos iguales, se llaman rectas perpendiculares.

# NOTACIÓN MATEMÁTICA

<p><b>¿QUÉ SIGNIFICA?</b> -----&gt;</p> <p>Representa un <b>punto</b>. Aunque un punto no tiene dimensiones, se suele representar gráficamente mediante un punto lo suficientemente grueso como para que sea visible.</p> <p><math>P</math></p>	<p><b>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</b></p> <p>Mediante una letra mayúscula. Se suelen utilizar las letras <math>A, B, C, \dots</math>, aunque se puede tomar cualquier letra del abecedario.</p>
<p><b>¿QUÉ SIGNIFICA?</b> -----&gt;</p>  <p>Representa una <b>recta</b>.</p>	<p><b>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</b></p> <p>Mediante letras minúsculas. Se suelen utilizar las letras <math>r, s, t, \dots</math>, aunque se puede tomar cualquier letra del abecedario.</p>
<p><b>¿QUÉ SIGNIFICA?</b> -----&gt;</p>  <p>Representan una <b>semirrecta de origen el punto A</b>.</p>	<p><b>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</b></p> <p>Mediante letras minúsculas. Las más usadas son <math>r, s, t, \dots</math>. En general, se puede utilizar cualquier letra del abecedario.</p>
<p><b>¿QUÉ SIGNIFICA?</b> -----&gt;</p>  <p>Representan un <b>segmento de extremos los puntos A y B</b>.</p>	<p><b>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</b></p> <p>Utilizando los nombres de sus extremos, el segmento se nombra <math>AB</math>, o bien <math>\overline{AB}</math>.</p>
<p><b>¿QUÉ SIGNIFICA?</b> -----&gt;</p>    <p>Representan un <b>ángulo</b>.</p>	<p><b>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</b></p> <p>Un ángulo se expresa:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Con el símbolo <math>\wedge</math> sobre las tres letras que determinan el ángulo, <math>\widehat{BAC}</math>, o bien <math>\widehat{CAB}</math>, de manera que quede en el centro la letra del vértice.</li> <li>– Con el símbolo <math>\wedge</math> sobre la letra del vértice: <math>\hat{A}</math>.</li> <li>– Con el símbolo <math>\wedge</math> sobre las letras que designan las rectas que lo forman, <math>\widehat{rs}</math>.</li> </ul>

# 9 Ángulos y rectas

## EN LA VIDA COTIDIANA... Ángulos en aeronaves

### En este proyecto pretendemos que aprendas a:

- Reconocer diferentes tipos de ángulos y líneas en los primeros modelos de aeronaves.
- Resolver problemas sobre ángulos en relación con los autogiros y los aviones.

### 1 Identificación de distintos tipos de líneas en aeronaves

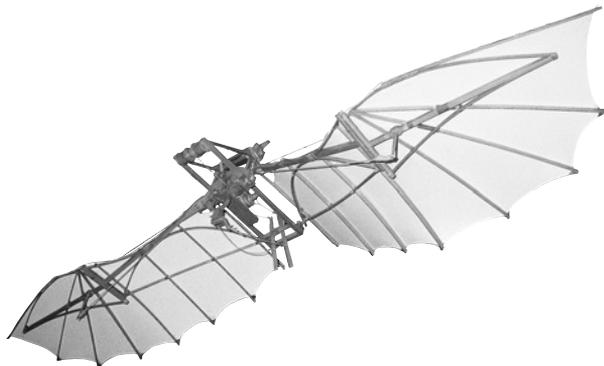
El primer vuelo con éxito fue precedido de siglos de sueños, estudio, especulación y experimentación. Muchos sabios de la antigüedad creían que para volar sería necesario imitar el movimiento de las alas de los pájaros. Finalmente, la Física y las Matemáticas fueron los pilares en los que se apoyaron los progresos de la aviación.

**Siglo v.** Se diseña el primer aparato volador: la cometa o papalote.



**Siglo XIII.** El monje inglés Roger Bacon, tras años de estudio, llegó a la conclusión de que el aire podría soportar un ingenio volador de la misma manera que el agua soporta un barco.

**Siglo xv.** El famoso científico e inventor italiano Leonardo da Vinci analizó el vuelo de los pájaros, e ideó unas alas con las que creía que el hombre podría volar. La experiencia demostró que eso no era posible.



**Siglo XVIII.** Los hermanos Montgolfier construyeron un globo que, al llenarlo de aire caliente, se elevaba soportando una cesta con los pasajeros.

**Siglo XIX.** Los globos se perfeccionan y evolucionan en los dirigibles.

**Siglo XX.** El día 17 de diciembre de 1903, cerca de Kitty Hawk, en el estado de Carolina del Norte, los hermanos estadounidenses Wilbur y Orville Wright realizaron el primer vuelo pilotado de una aeronave más pesada que el aire y propulsada por motor.



### REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

- Observa la fotografía de la cometa. Si consideras los lados del cuerpo de la cometa como rectas, ¿qué posiciones tienen esas rectas entre sí? ¿Cómo son los ángulos que forman?
- Las rectas formadas por los dos palos que se entrecruzan en medio de la cometa, ¿cómo son? ¿Qué tipo de ángulos forman al cortarse?
- Observa la fotografía de la máquina voladora de Leonardo y considera las varillas como rectas. ¿Qué posiciones de rectas ves en ella? ¿Cómo son los ángulos que forman algunas de esas rectas?
- Observa el aeroplano de los hermanos Wright. ¿Qué posición tienen las rectas formadas por las varillas respecto a los planos de las alas? ¿Cómo son esas rectas entre sí?

## 2 Cálculo de ángulos en autogiros y aviones

En 1920 el español Juan de la Cierva inventó el autogiro. El autogiro es un tipo de avión con una hélice arriba y que despega verticalmente. Es el antecedente de los helicópteros.

Los helicópteros son utilizados en gran cantidad de situaciones por su facultad de poder permanecer suspendidos sobre un determinado punto. Tienen múltiples diseños, variando el número de aspas de sus hélices.



### RESPONDE A ESTAS PREGUNTAS.

- ¿Cuántas aspas tiene cada uno de los helicópteros de las fotografías anteriores?
- ¿En cuántas partes dividen esas aspas al círculo que forman al girar? ¿Cómo son esas partes?
- ¿Qué ángulo forma el par de aspas en cada uno de ellos?

Otro contexto donde aparecen los ángulos en los aviones es el ángulo de ataque, la inclinación del ala con respecto a la corriente del aire.

Al aumentar el ángulo de ataque aumenta la sustentación del avión, es decir, este se sujeta mejor en el aire. Este efecto de sustentación es el mismo que se produce al sacar la mano por la ventanilla de un coche e inclinarla. Sin embargo, la cantidad de sustentación que puede ser generada en los aviones de esta forma tiene un límite.

A partir de los 14 grados de ángulo de ataque, la fuerza de sustentación disminuye rápidamente, hasta que se pierde por la formación de remolinos alrededor de las alas. Se dice entonces que el avión ha entrado en pérdida y cae rápidamente.

### RESUELVE LAS SIGUIENTES CUESTIONES.

- Indica, para cada uno de estos ángulos de ataque, si el avión entraría en pérdida o no.
 

a) $800''$	c) $800' 2.500''$
b) $50.000''$	d) $13^\circ 57' 200''$
- Expresa en minutos y en segundos el ángulo de ataque máximo.

# 9 Ángulos y rectas

## ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### Hacer un dibujo

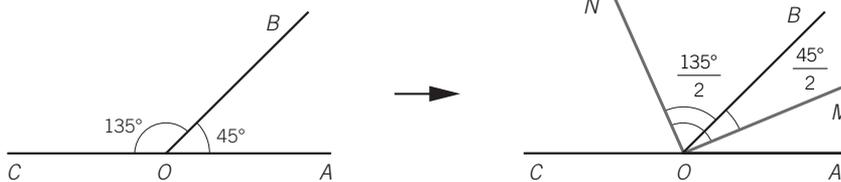
**Estrategia** La estrategia consistente en hacer un dibujo para reflejar las condiciones del enunciado ayuda a resolver algunos problemas. Esta estrategia es especialmente útil en los problemas geométricos, ya que las relaciones y el razonamiento geométrico se entienden mejor cuando se trabaja sobre figuras construidas de acuerdo con el enunciado del problema.

### PROBLEMA RESUELTO

Dibuja un ángulo  $\widehat{AOB}$  de  $45^\circ$ . Después, traza el ángulo  $\widehat{BOC}$  adyacente al ángulo  $\widehat{AOB}$ . Traza mediante plegado las bisectrices de los ángulos anteriores. ¿Qué ángulo forman las bisectrices?

#### Planteamiento y resolución

Hacemos el dibujo siguiendo las indicaciones del enunciado.



El ángulo  $\widehat{BOC}$  mide:  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ , y el ángulo  $\widehat{MON}$  que forman las bisectrices mide:  $\frac{45^\circ}{2} + \frac{135^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ .

Comprueba que las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera,  $\alpha$  y  $180^\circ - \alpha$ , son perpendiculares.

Para comprobar que las bisectrices de los ángulos  $\alpha$  y  $180^\circ - \alpha$  son perpendiculares, haz un dibujo análogo al anterior y procede como se ha hecho con los ángulos de  $45^\circ$  y  $135^\circ$ .

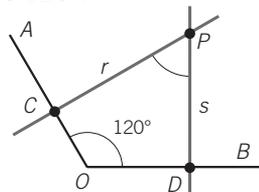
### PROBLEMAS PROPUESTOS

**1** Dibuja un ángulo  $\widehat{AOB}$  de  $120^\circ$ .

1.º Señala un punto  $C$  en el lado  $OA$  y un punto  $D$  en el lado  $OB$ . Traza la recta  $r$  perpendicular al lado  $OA$  por el punto  $C$ , y la recta  $s$  perpendicular al lado  $OB$  por el punto  $D$ .

2.º Las rectas  $r$  y  $s$  se cortan en el punto  $P$ .

Averigua el valor del ángulo  $\widehat{CPD}$ .



**2** Dibuja un ángulo  $\widehat{AOB}$  de  $60^\circ$ .

1.º Traza mediante plegado la bisectriz  $OD$  del ángulo  $\widehat{AOB}$ . Señala un punto  $C$  en la bisectriz y traza por este punto la recta  $r$  perpendicular a la bisectriz. La recta  $r$  corta al lado  $OB$  en un punto  $S$  y al lado  $OA$  en el punto  $R$ .

2.º Traza por el punto  $R$  la recta perpendicular al lado  $OB$ . Esta recta corta al lado  $OB$  en el punto  $P$ .

Haz el dibujo y averigua el valor del ángulo  $\widehat{PRS}$ .

# MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR



© 2001-2005 Cabrilog CabriGéomètre es una marca registrada de Cabrilog

## Presentación



Ventana de CABRI



Cabecera del programa

## PRÁCTICA CABRI

El programa CABRI-GÉOMÈTRE II es un programa para aprender Geometría. En el margen puedes identificar su página de presentación y la ventana de trabajo que aparece después de unos segundos al ejecutar el programa. Observa que salen unas barras con iconos en su parte superior e inferior.

### LAS BARRAS DE CABRI

La **primera barra**, de fondo azul, contiene el nombre del programa y el nombre de la figura o archivo que está abierto en este momento [Figura 1].



En esta barra siempre estará indicado el nombre de la figura con la que estés trabajando.

### LA BARRA DE MENÚS:



Permite hacer operaciones con archivos (abrir, cerrar, etc.), ejecutar actividades de edición (copiar, seleccionar, etc.), diferentes opciones del programa (preferencias iniciales, idioma, etc.), posiciones de las ventanas abiertas, y consultar la ayuda.

### LA BARRA DE HERRAMIENTAS:



Permite la realización de construcciones geométricas a partir de los diferentes elementos y de su manipulación. Son 11 grupos que contienen una serie de herramientas que hacen que los iconos de la barra varíen en función de la opción seleccionada.

La herramienta seleccionada se presenta con fondo blanco mientras que el resto tienen un fondo gris.

Los 11 grupos de herramientas son, de izquierda a derecha:

- |                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| 1. APUNTADOR                  | 7. MACROS                   |
| 2. PUNTOS                     | 8. CONSULTAS DE PROPIEDADES |
| 3. RECTAS                     | 9. CÁLCULOS GEOMÉTRICOS     |
| 4. CURVAS                     | 10. PRESENTACIÓN DE OBJETOS |
| 5. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS | 11. OCULTAR / MOSTRAR       |
| 6. TRANSFORMACIONES           |                             |

## EJERCICIOS

**1** Con el botón de la izquierda del ratón, pulsa cada una de las herramientas de la barra y observa cómo se despliega un menú vertical con las diferentes herramientas o aplicaciones de cada grupo y su nombre. Haz un esquema de cada grupo y sus diferentes aplicaciones.

**2** Pulsa la tecla **F1** y verás la descripción y funcionamiento de cada herramienta. Haz los cambios necesarios para obtener la barra:



Escribe en tu cuaderno la función de las herramientas que se muestran.

# 9 Ángulos y rectas

## MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

### PRÁCTICA CABRI

Para comenzar:

#### PRÁCTICA: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS SIMPLES

##### 1. Construcción de puntos:

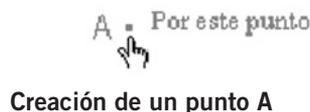
- Activa la herramienta Punto  del grupo **PUNTOS**. Observa que el cursor toma la forma de un lápiz: .
- Pulsa en algún punto de la ventana, y aparecerá un punto de color rojo. Si antes de hacer otra acción pulsas una tecla (por ejemplo, A), saldrá una etiqueta con esta letra al lado del punto (las etiquetas sirven para nombrar objetos).

##### 2. Construcción de rectas (para hacer una recta son necesarios dos puntos o un punto y una dirección).

- Activa la herramienta Rectas  del grupo **RECTAS**.
- Acércate con el ratón a este punto y observa que el cursor se transforma en una mano y aparece el rótulo: **Por este punto**. Pulsa el botón de la izquierda del ratón y verás que se dibuja una recta que pasa por A y que va cambiando de dirección en función del movimiento que hagas con el ratón.
- Pulsa en un punto cualquiera de la ventana y obtendrás la recta tal como se ve en la figura; puedes etiquetarla como **r**.

##### 3. Construcción de una circunferencia (se necesita un punto que hará de centro y un radio).

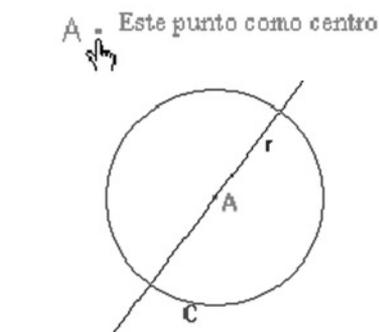
- Activa la herramienta **Círculo**  del grupo **CURVAS**.
- Con el lápiz, acércate al punto A y, cuando aparezcan la mano y el rótulo: **Este punto como centro**, pulsa el botón del ratón y observa que la mano va dibujando una circunferencia en la ventana.
- Pulsa en un punto cualquiera de la ventana: tendrás la circunferencia, tal como se ve en la figura; puedes etiquetarla como **C**.



Creación de un punto A



Creación de una recta



Construcción de una circunferencia

### EJERCICIOS

- Activa la herramienta **Apuntador** : el cursor se convierte en una cruz que permite, acercándose a un objeto, seleccionarlo (se convierte en ) y modificarlo o moverlo (sale una mano ) por la ventana.

Después, selecciona la circunferencia construida y hazla más grande. Escribe las modificaciones que hace el cursor.

- En el grupo **RECTAS**, activa las diferentes herramientas y haz construcciones de los elementos que puedas en la ventana que tienes abierta.

- 3 Crea una carpeta con tu nombre en el disco duro del ordenador o en un disquete, y guarda la figura creada mediante las órdenes:

 →  **Ctrl+S** con el nombre Unidad00\_Ejercicio\_01.

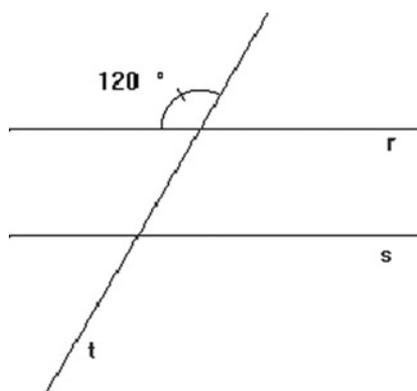
# MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

## PRÁCTICA CABRI

Abre el programa CABRI.

### PRÁCTICA 1 (ejercicio 83, pág. 185)

- Dibuja una recta horizontal.
  - Activa la herramienta  del grupo **RECTAS**.
  - Cuando salga el lápiz en la ventana en blanco, pulsa con el botón izquierdo del ratón en un punto cualquiera de la hoja.
  - Pulsa la tecla Shift:  y, al mismo tiempo, el botón izquierdo del ratón: se dibujará una recta horizontal. Escribe la etiqueta **r** a su lado.
- Dibuja una recta paralela a la anterior.
  - Activa la herramienta **Recta paralela a una dada** , del grupo **CONSTRUCCIONES**.
  - Acércate a la recta dibujada y, cuando salga la mano y veas el rótulo de **Paralela a esta recta** (obsérvalo en el margen), pulsa el botón izquierdo del ratón.
  - Sale el lápiz. Pulsa en otro punto cualquiera de la ventana, con la etiqueta: **Por este punto** y observa que aparece otra recta horizontal; etiquétala como **s**.
- Dibuja la recta **t** de forma que corte a las dos rectas anteriores.
- Para calcular el valor del ángulo superior izquierdo, activa la herramienta **Medida de ángulo** , del grupo **CÁLCULOS**; te dará el valor del ángulo determinado por tres puntos:
  - Un punto cualquiera de la recta **t**. Acércate a **t** y pulsa el botón cuando salga la mano con el rótulo: **Sobre esta recta**.
  - El punto de intersección de las dos rectas.
  - Un punto cualquiera de la recta **r**.
- Observa que ha salido un número al lado del punto de intersección: es el valor del ángulo. Si no sale  $120^\circ$ , tendrás que mover con el puntero  la recta **t** hasta que consigas este valor.
- De manera análoga, calcula los ángulos del ejercicio.
- FINAL:** Guarda la figura creada con **Archivo** → **Guardar como...** en tu carpeta o directorio con el nombre `Unidad9_Ejercicio_83`.



## EJERCICIOS

- 1 APLICA:** Con **Archivo** → **Nuevo** **Ctrl+N** haz de forma gráfica el ejercicio 85 de la página 185. Cuando acabes, guárdalo con el nombre `Unidad9_Ejercicio85` en tu carpeta personal.
- 2** De manera análoga, haz el ejercicio 87 de la página 185. Tendrás que utilizar las herramientas **Mediatriz**  y **Distancia** . Guarda el archivo con el nombre correspondiente.