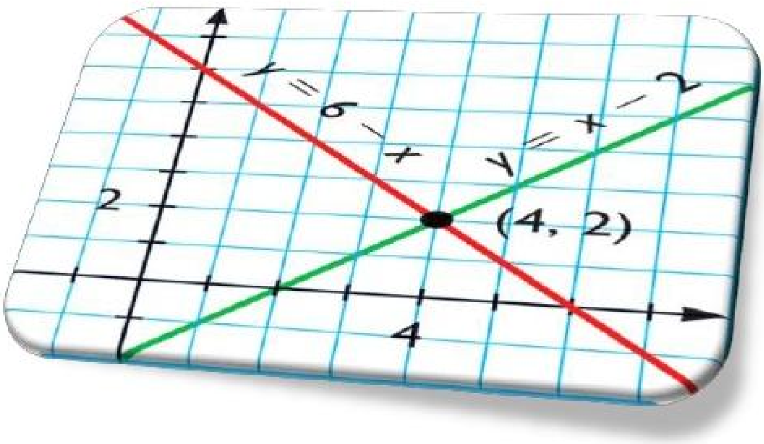
Departamento de Matemáticas
I.E. JUAN RAMÓN JIMÉNEZ
Casablanca (Marruecos)

Tema 9

Sistemas de Ecuaciones



Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 9

9.0.- Introducción

Uno de los principales objetivos del Álgebra clásica ha sido la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Desde este punto de vista, el Álgebra tendría más de 2000 años de antigüedad pero hasta la Edad Media no se desarrolla de mano de los árabes. Después, alcanza su madurez y esplendor en Europa, sobre todo en el renacimiento italiano.

9.1.- Sistemas de Ecuaciones lineales

Se llaman ***ecuaciones lineales*** a las ecuaciones en las que todas las incógnitas aparecen con grado 1; no están elevadas a ninguna potencia, ni bajo ningún radical, ni multiplicadas unas por otras.... como por ejemplo:

$$2x-4y=2 \quad ; \quad x-5y=7 \quad ; \quad 6x-3y+2z=0$$

Un *sistema de ecuaciones lineales* es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Donde ***m*** es el nº de ecuaciones lineales y ***n*** el nº de incógnitas, los a_{ij} son los *coeficientes del sistema* (números reales), los x_j son las *incógnitas* y los b_i son los *términos independientes* (también números reales).

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de los x_j para los que se cumplen todas las ecuaciones o concluir que el sistema no tiene solución.

En resumen podemos clasificar los sistemas de ecuaciones lineales del siguiente modo:

$$\text{Sistemas de ecuaciones lineales}\begin{cases} \text{Compatible}\begin{cases} \text{Determinado } (S.C.D.) - \text{Solución única} \\ \text{Indeterminado}: (S.C.I.) - \text{Muchas Soluciones} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible}: (S.I.) - \text{Sin solución} \end{cases}$$

Llamamos ***M*** a la ***matriz de coeficientes*** y ***M****** a la ***matriz ampliada*** con los términos independientes:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad M^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

9.1.1.- Algunos sistemas a conocer

Un sistema de ecuaciones lineales tiene *forma escalonada* cuando cada ecuación tiene una incógnita menos que el anterior, de forma que su matriz de coeficientes será una matriz triangular.

Dos Sistemas se llaman ***equivalentes*** cuando tienen las mismas soluciones a pesar de tener diferentes ecuaciones.

Un sistema lineal se llama ***homogéneo*** si todos los términos independientes son cero, en caso contrario se llama sistema heterogéneo.

Un ***sistema homogéneo nunca es incompatible***, pues siempre admite al menos la solución $x=y=z=0$. Llamada solución trivial.

9.1.2.- Expresión matricial de un sistema

Dado un sistema de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Llamaremos ***expresión matricial*** de este sistema a la expresión:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Coeficientes}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de las Incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de los términos independeintes}}$$

Si M es la matriz de los coeficientes, X la matriz de las incógnitas y B es la matriz de los términos independientes, la expresión matricial de este sistema viene dada por:

$$M\cdot X = B$$

Para resolver un sistema como una ecuación matricial de este tipo, es necesario que exista M^{-1}, es decir que la matriz M sea una matriz regular (cuadrada y determinante no nulo), si esto ocurre, su solución vendrá dada por:

$$X = M^{-1}\cdot B$$

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x-2y-z=4 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$

Si lo escribimos en forma matricial llegamos a: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sean M, la matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculamos si es posible la inversa de M:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\cdot Adj(M^t) = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & -1/8 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/8 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

Por tanto para resolver el sistema solo nos queda:

$$X = M^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & -1/8 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/8 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema es compatible determinado y su solución es: **{x=2; y=-2; z=3}**

© Raúl González Medina 2016

9.2.- Método de Gauss

El ***método de Gauss***, estudiado el curso pasado y que repasaremos ahora, consiste consiste en convertir un sistema de igual número de ecuaciones que incógnitas (normalmente 3x3) en otro equivalente que presente una forma escalonada, y que por lo tanto, se pueda resolver con mucha facilidad.

- Para conseguirlo se efectúan, según convengan, cuatro transformaciones elementales.
    - Multiplicar una ecuación por un número distinto de 0.
    - Sumar a una ecuación una combinación lineal de las otras.
    - Intercambiar ecuaciones.
    - Cambiar el orden de las incógnitas.

Ejemplo: Resolver mediante Gauss el sistema: $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases}$

La primera ecuación (1) siempre se deja igual (procurando que esta sea la más sencilla), a la segunda (2) y a la tercera (3) tenemos que anularle el término que lleva *x*.

$$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ x-y-z=-10 \\ 2x-y+z=5 \end{cases} \xrightarrow[(3)-2\cdot(1)=(3)']{\substack{(1)=(1)' \\ (2)-(1)=(2)'}} \begin{cases} x & +2y & +z & = & 9 \\ & -3y & -2z & = & -19 \\ & -5y & -z & = & -13 \end{cases}$$

Una vez que hemos anulado los términos en *x* de la segunda y tercera ecuación, dejamos fija la 1ª y la 2ª ecuación y anulamos el término que lleva la *y* en la 3ª ecuación.

$$\begin{matrix} (1)'=(1)'' \\ (2)'=(2)'' \\ 3(3)'-5(2)'=(3)'' \end{matrix} \quad \begin{cases} x & +2y & +z & = & 9 \\ & -3y & -2z & = & -19 \\ & & 7z & = & 56 \end{cases}$$

Así obtenemos un sistema que presenta forma escalonada. De la última ecuación (3)´´ obtenemos *z=8*, sustituyendo en la (2)´´ resulta *y=1*, que a su vez sustituyendo ambas en (1)´´ obtenemos *x=-1*.

Por Tanto tenemos un **S.C.D.** {**x=-1, y=1, z=8**}

9.3.- Discusión de sistemas. Teorema de Rouché - Frobenius

Discutir o clasificar un sistema es decir de qué tipo es: compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible, como ya hemos visto con anterioridad. Antes de resolverlo podemos determinar de qué tipo es gracias al Teorema de Rouché – Frobenius.

El ***Teorema de Rouché – Frobenius*** permite conocer si un sistema de ecuaciones tiene solución a partir del estudio del rango de la matriz asociada al sistema (matriz de coeficientes M) y del rango de la matriz ampliada de éste (matriz M*).

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible: } Rang(M)=Rang(M^*) \begin{cases} \text{Determinado: } Rang(M)=Rang(M^*)=\text{nº de incógnitas} \\ \text{Indeterminado: } Rang(M)=Rang(M^*)<\text{nº de incógnitas} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatible: } Rang(M)\neq Rang(M^*) \end{cases}$$

Es importante tener en cuenta que Rang(M)≤Rang(M*), ya que la matriz M está contenida en M*. Este detalle, aunque muy simple, es de enorme utilidad ya que nos ahorra en muchas ocasiones, tener que determinar el rango de M*.
En muchas ocasiones los sistemas dependerán de uno o dos parámetros, cosa que complica sustancialmente la discusión. Por ello, tendremos que distinguir los diferentes casos en función de los rangos de M y de M*.

9.4.- Resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales. Regla de Cramer

Además de las dos formas de resolución ya conocidas, el de la matriz inversa y el del método de Gauss, existe otro llamado Regla de Cramer.

Estudiando un sistema de ecuaciones por el Teorema de Rouché-Frobenius, si resulta compatible, podemos hallar su solución mediante la regla de Cramer.

9.4.1.- Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si la matriz de coeficientes A, es regular. Por tanto, este tipo de sistemas son siempre S.C.D.

Para calcular las soluciones de un sistema utilizamos dos determinantes:

- Determinante de la matriz de coeficientes M. $|M|$
- Determinante $|\Delta_i|$ que se obtiene al sustituir, en la matriz M, la columna de la incógnita i (x, y ó z) por la columna de los términos independientes.

El valor de cada incógnita se obtiene de la siguiente forma:

$$x = \frac{|\Delta_x|}{|M|} \qquad y = \frac{|\Delta_y|}{|M|} \qquad z = \frac{|\Delta_z|}{|M|}$$

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x+3y-z=6 \\ x-5y+2z=-4 \\ 3x+2y-3z=-6 \end{cases}$

La matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calculamos ahora su determinante:

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=32\neq 0$ → A es regular → El sistema es de Cramer → Sus soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ -6 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{32}{32}=1 \ ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{96}{32}=3 \ ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{160}{32}=5$$

S.C.D.={x=1, y=3, z=5)

Utilizando un pequeño truco, podemos utilizar este método de resolución a sistemas compatibles indeterminados.

Si un sistema es compatible indeterminado es porque *Rang(A) = Rang(B) < nº de incógnitas*, si llamamos ***grado de libertad (g)*** a la diferencia entre el nº de incógnitas y el rango de las matrices.

Llamaremos menor principal de la matriz A al menor que nos da el rango de las matrices, este menor nos da un nuevo sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones como incógnitas llamado sistema principal. Este sistema es equivalente al principal y se puede resolver con la regla de Cramer, teniendo en cuenta que las soluciones quedarán en función de tantos parámetros como indique g.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

Escribimos las matrices M y M*.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(1+3)-(2+2)=0 \text{ = Rang(A) < 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1 \Rightarrow \text{Rang(A)=2}$$

Para la matriz M* ocurre exactamente igual porque tiene una columna nula ➔ Rang(B) = 2 = Rang(A) < nº de incógnitas.

Tenemos que el sistema es S.C.I. y como A no es regular, no podemos utilizar la regla de Cramer.

Como para obtener Rang(A) = 2 hemos utilizado las dos primeras ecuaciones, entonces la tercera la podemos eliminar y el sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Si llamamos $z=\lambda$, tenemos: $\begin{cases} x+2y+\lambda=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ y si pasamos los términos con λ a la derecha de las igualdades, nos queda:

$\begin{cases} x+2y=-\lambda \\ x+y=0 \end{cases}$ Si aquí volvemos a escribir las matrices A y B: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como podemos observar, ahora A si es una matriz regular, porque es cuadrada y su determinante es distinto de cero. ➔ Podemos utilizar la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-\lambda}{-1}=\lambda \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\lambda}{-1}=-\lambda \qquad z=\lambda$$

Por tanto las soluciones del sistema son $S=\{\lambda,-\lambda,\lambda\}$

9.5.- Sistemas con parámetros

Se llama discutir un sistema de ecuaciones en función de uno o varios parámetros al hecho de *clasificarlo según los valores que puedan tomar dichos parámetros*.

Como norma general de discusión podemos seguir el siguiente proceso:

- Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes (A) en función del parámetro o parámetros, lo igualamos a cero y resolvemos la ecuación.
- Calculamos los rangos de las matrices A y B y utilizamos el teorema de Rouché-Frobenius para clasificarlo.
- Si es compatible (determinado o indeterminado), lo resolvemos por alguno de los métodos anteriores.

Ejemplo: Discutir el sistema: $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y-2z=1 \\ 3x+y-az=b \end{cases}$

Las matrices de coeficientes y ampliada son respectivamente: $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -a \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -a & b \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de M: $|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -a \end{vmatrix}=-a-2 \quad \rightarrow \quad |M|=0 \quad \leftrightarrow \quad a=-2$

- Si $a \neq -2$ ➔ M es regular y el sistema es de Cramer ➔ S.C.D.
- Si $a = -2$ ➔ Rang(M) = 2 porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Si sustituimos $a = -2$ en M* ➔ $M^*=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & b \end{pmatrix}$ y ahora calculamos el rango de M* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & b \end{vmatrix}=b-1$

- ✓ Si $b=1$ ➔ Rango(M*) = 2 = Rang(M) < 3 , $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, entonces el sistema es S.C.I.
- ✓ Si $b\neq 1$ ➔ Rang(M) = 2 ≠ 3 = Rang(M*) ➔ el sistema es S.I.

En resumen: $\begin{cases} \bullet\ Si\ a\neq -2 & \rightarrow \quad S.C.D. \\ \bullet\ Si\ a=2 & \rightarrow \begin{cases} \bullet\ Si\ b=1 & \rightarrow\ S.C.I \\ \bullet\ Si\ b\neq 1 & \rightarrow\ S.I. \end{cases} \end{cases}$

9.6.- Resolución de sistemas homogéneos

Sabemos que un sistema es ***homogéneo*** si todos los términos independientes son cero, y que además, estos sistemas son siempre compatibles. Aplicando el Teorema de Rouché Frobenius:

- Si Rang(M)= nº de incógnitas ➔ S.C.D. Solución trivial. (0,0,0).
- Si Rang(M) < nº de incógnitas ➔ S.C.I. Infinitas soluciones, entre ellas la (0,0,0).

9.7.- Ejercicios Resueltos

1.- Comprobar que los sistemas de ecuaciones siguientes uno es determinado, otro indeterminado y otro incompatible:

$$a)\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y+0z=1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ -6x+8y+0z=-10 \\ 2x-5y-z=4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y+0z=5 \\ 7x-y-3z=8 \end{cases}$$

a) Sea el sistema, $\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y+0z=1 \end{cases}$ lo primero que hacemos es escribir su matriz A (matriz de coeficientes) y su matriz B Ampliada (Coeficientes + términos independientes)

$$A=\begin{pmatrix}8&1&4\\5&-2&4\\1&1&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}8&1&4&9\\5&-2&4&6\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el rango de cada una de ellas.

$$|A|=\begin{vmatrix}8&1&4\\5&-2&4\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&1&4\\-3&-3&0\\1&1&0\end{vmatrix}_{(2^a\text{ Fila - }1^a\text{ Fila})}=0$$

Calculamos ahora un menor de orden 2 $\begin{vmatrix}8&1\\5&-2\end{vmatrix}=-21\neq 0$

Por tanto Rang(A)=2

$B=\begin{pmatrix}8&1&4&9\\5&-2&4&6\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ Cojo de ella un menor de orden 3, $\begin{vmatrix}1&4&9\\-2&4&6\\1&0&1\end{vmatrix}=0$, tendríamos que calcular todos los menores de orden 3 que se puedan obtener de esta matriz. Pero no es necesario porque si:

$B=\begin{pmatrix}8&1&4&9\\5&-2&4&6\\1&1&0&1\end{pmatrix}$ Si a la segunda fila le quito la primera, obtengo $\begin{pmatrix}-3&-3&0&-3\end{pmatrix}$ que es igual que la 3ª fila multiplicada por 3.

Por tanto todos los menores de orden 3 de esta matriz son nulos porque la 3ª fila es combinación lineal de 2ª y la 1ª, así que calculo un menor de orden 2:

$\begin{vmatrix}8&1\\5&-2\end{vmatrix}=-21\neq 0$. Por tanto Rang(B)=2

Y como Rang(A)=Rang(B)=2<3(Nº de incógnitas), entonces el sistema es S.C.I.

Aunque el ejercicio no lo pide *vamos a calcular sus soluciones*. Como la 3ª fila es combinación lineal de la 1ª y la 2ª, la eliminamos.
Hacemos $z=\lambda$ y reescribimos el sistema:

$\begin{cases}8x+y=9-4\lambda\\5x-2y=6-4\lambda\end{cases}$, Por tanto ahora tenemos: $A=\begin{pmatrix}8&1\\5&-2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}8&1&9-4\lambda\\5&-2&6-4\lambda\end{pmatrix}$

Calculamos el rango de ambas: Rang(A)=Rang(B)=2(Nº de incógnitas), por tanto convertimos el sistema en un sistema de Cramer (A es regular). Y lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9-4\lambda&1\\6-4\lambda&-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}8&1\\5&-2\end{vmatrix}}=\frac{-18+8\lambda-6+4\lambda}{-21}=\frac{12\lambda-24}{-21}=\frac{4\lambda-8}{-7}=\frac{8-4\lambda}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}8&9-4\lambda\\5&6-4\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}8&1\\5&-2\end{vmatrix}}=\frac{48-32\lambda-45+20\lambda}{-21}=\frac{-12\lambda+3}{-21}=\frac{-4\lambda+1}{-7}=\frac{4\lambda-1}{7}$$

$$z=\lambda$$

Por tanto, multiplicando todas las soluciones por 7 tenemos:

S.C.I. $\{x = 8 - 4\lambda, y = 4\lambda - 1, z = 7\lambda\}$

b) $\begin{cases} 6x - y + 3z = 6 \\ -6x + 8y + 0z = -10 \\ 2x - 5y - z = 4 \end{cases}$

Lo primero es escribir A y B; $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 & 6 \\ -6 & 8 & 0 & -10 \\ 2 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculamos el rango de ambas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -6 & 8 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 42 - 42 = 0;\ \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 54 \neq 0,$$

Por tanto Rang(A)=2

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -10 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & 0 & 18 \\ 8 & 0 & -10 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -16 & 18 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -1(160 - 144) \neq 0$$

Por tanto Rang(B)=3.

Como Rang(A)≠Rang(B), entonces el sistema es Incompatible (No tiene solución)

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 4y = 5 \\ 7x - y - 3z = 8 \end{cases}$ Como siempre, escribimos las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Y calculamos sus rangos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 46 \neq 0$$ ➔ Rang(A)=3

Si para calcular el rango de B cogemos esta misma matriz, entonces Rang(B)=3

Y como Rang(A)=Rang(B)=3(Nº de incógnitas), entonces el sistema es S.C.D.

En este caso tampoco nos lo piden, pero vamos a calcular las soluciones del sistema.

Como la matriz A es cuadrada y su determinante es no nulo, entonces podemos aplicar la Regla de Cramer; por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{54}{46} = \frac{27}{23}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-17}{46}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{46}$$

Resumiendo: S.C.D. $S=\left\{x=\frac{27}{23}, y=-\frac{17}{46}, z=\frac{9}{46}\right\}$

2.- Discutir el siguiente sistema según los valores de k. $\begin{cases} kx-y=1 \\ x-ky=2k-1 \end{cases}$

Lo primero, como siempre, es escribir las matrices A y B.

$$A=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -k & 2k-1 \end{pmatrix}$$

Y después ver el rango de ellas.

$|A|=\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix}=-k^2+1$ Igualamos a cero y calculamos los valores de k.

Si $k=\pm 1$ el rango de A es 1, y si $k \neq \pm 1$ el rango de A es 2.

Para la matriz B, tenemos que $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -k & 2k-1 \end{vmatrix}=1-2k+k=1-k$, y este determinante es nulo si k=1.

Por tanto si K=1, Rang(B)=1, y si K≠1 Rang(B)=2.

Resumiendo:

- ***Si k=1: Rang(A)=Rang(B)=1<2 ➔ S.C.I.***
- ***Si k=-1: Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.***
- ***Si $k \neq \pm 1$ Rang(A)=Rang(B)=2=Nº incógnitas ➔ S.C.D.***

2.- Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} kx+y+(k+1)z=0 \\ ky+(k+1)z=0 \\ x+2z=1 \end{cases}$

Escribimos las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} k & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k & k+1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos sus rangos:

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=k^2+1 \text{ ➔ Rang(A)=3}$$

$$\begin{vmatrix} k & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 1 & 1-k \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 1-k \\ k & k+1 \end{vmatrix}=k^2+1 \neq 0 \forall k \quad \text{➔ Rang(B)=3}$$

Como Rang(A)=Rang(B)=3, entonces el sistema es S.C.D.

$$X=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & k+1 \\ 0 & k & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{k^2+1}=\frac{1-k^2}{k^2+1}=\frac{1-k^2}{k^2+1} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} k & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{k^2+1}=\frac{-(k^2+k)}{k^2+1} \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{k^2+1}=\frac{k^2}{k^2+1}$$

El sistema es S.C.D. para todo k número Real.

3.- *Estudiar según los valores del parámetro m el sistema:* $\begin{cases} 4x+12y+4z=0 \\ 2x-13y+2z=0 \\ (m+2)x-12y+12z=0 \end{cases}$

Escribimos las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & 0 \\ 2 & -13 & 2 & 0 \\ m+2 & -12 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

Este sistema es un sistema homogéneo, por tanto es un sistema compatible.

Vamos a ver si es determinado o indeterminado.

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ m+2 & -12 & 12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 2 & -13 & 0 \\ m+2 & -12 & 10-m \end{vmatrix}=(10-m)\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix}=(10-m)\cdot(-76)=76(m-10)=0 \leftrightarrow m=10$$

Si m=10 ➔ $|A|\neq 0$ ➔ Rang(A) =3 ➔ S.C.D. La solución es la solución trivial $S=\{x=0, y=0, z=0\}$

Si m≠10 ➔ $|A|=0$ ➔ $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -13 \end{vmatrix}=-76\neq 0$ ➔ Rang(A) =2 < 3 = nº de incógnitas ➔ S.C.I.

4.- *Se considera el sistema de ecuaciones lineales:* $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{cases}$

- ***a) Encontrar un valor de a para que el sistema sea incompatible.***
- ***b) Discutir si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.***
- ***c) Resolver el sistema para a=0.***

Escribimos las matrices de coeficientes A y B

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2+a & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Para que sea incompatible, ha de ocurrir que Rang(A)≠Rang(B)

Veamos cuanto vale Rang(A).

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2-a & 0 \\ 1 & a & 3 \\ 2 & 2+a & 6 \end{vmatrix}=-(2-a)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=0 \quad \text{Por tanto Rang(A)<3}$$

Veamos para orden 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a-2$

Por tanto si a=2 ➔ Rang(A)=1 y si a≠2 ➔ Rang(A)=2

Vamos ahora a estudiar la matriz B.

$$|B'| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a & 3 & 2 \\ 2+a & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ a-2 & 0 & 1 \\ a-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \,; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 2+a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto todos los menores de orden 3 obtenidos de la matriz B son nulos.

Pasamos a menores de orden 2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ ➔ Por tanto Rang(B)=2

Entonces para que el sistema sea incompatible, como hemos dicho antes, ha de ocurrir que Rang(A)≠Rang(B), y esto ocurre si a=2.

Si a=2 ➔ Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.

b) Para que el sistema sea S.C.D. tiene que ocurrir que Rang(A)=Rang(B)=3, y esto no ocurre nunca, por tanto no existe ningún valor de a para que el sistema sea compatible determinado.

c) Si a=0, el sistema queda de la siguiente forma: $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3z=2 \\ 2x+2y+6z=3 \end{cases}$ y A y B ahora son:

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Como vimos en el caso a), si a≠2 el Rang(A)=2. Pues como a=0, entonces Rang(A)=2.

Veamos el rango de B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Como observamos a primera vista, tenemos que la 1º fila + 2º fila =3º fila, por tanto, el Rang(B) =2.

Así que si Rang(A)=Rang(B)=2<3 nº incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. (S.C.I.)

Para resolverlo hacemos, como siempre, $z = \lambda$, por tanto el sistema queda de la forma:

$\begin{cases} x+2y=1-3\lambda \\ x=2-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ y resolvemos por el método más rápido posible, en este caso, sustituyendo obtenemos el valor de y, $2y = 1-3\lambda-2+3\lambda = -1$ ➔ $y = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto: Tenemos un S.C.I. con $S = \{4-6\lambda, -1, 2\lambda\}$

5.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ \beta \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina el valor de α ***para que el sistema*** $AX = C_1$ ***sea incompatible.***

b) Determina los valores de β ***para los cuales el sistema*** $AX=C_2$ ***es compatible, y para uno de estos valores resuelve dicho sistema.***
c) Para $\alpha=3$ ***y*** $\beta=-13$ ***estudia el sistema*** $AX=C_1+C_2$

Sea $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&1\\2&3&-9\end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y $B=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&1&1&2\\2&3&-9&\alpha\end{pmatrix}$ la matriz ampliada. Para que el sistema $AX=C_1$ sea incompatible tiene que ocurrir que los rangos de A y B sean diferentes: Rang(A)≠Rang(B).

Veamos el rango de A. $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&1&1\\2&3&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2\\0&-1&5\\0&1&-5\end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, por tanto Rang(A) =2.

Vamos al ver el de B. $|B'|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&1&2\\3&-9&\alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&3&1\\0&-3&\alpha-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1\\-3&\alpha-3\end{vmatrix}=3\alpha-6$

Por tanto si $\alpha\neq 2$ ➔ Rang(B) =3 y

2=Rang(A)≠Rang(B)=3 y el sistema sería incompatible.

Para que el sistema sea Incompatible tiene que ocurrir que $\alpha\neq 2$

e) Para este caso, las matrices A y B son de la forma: $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&1\\2&3&-9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&-2&-6\\2&1&1&-11\\2&3&-9&\beta\end{pmatrix}$. Del apartado

a) tenemos que Rang(A)=2. Veamos Rang(B).

$|B'|=\begin{vmatrix}1&-2&-6\\1&1&-11\\3&-9&\beta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&-6\\0&3&-5\\0&-3&\beta+18\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-5\\-3&\beta+18\end{vmatrix}=3\beta+39$ ➔ Igualamos a 0, y obtenemos $\beta=-13$

Por tanto, si $\beta=-13$ ➔ S.C.I. porque Rang(A)=Rang(B)=2<3.

Para resolverlo hacemos $z=\lambda$, y de esta forma convertimos al sistema en un sistema de Cramer, teniendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&-6+2\lambda\\2&1&-11-\lambda\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix}-6+2\lambda&1\\-11-\lambda&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}}=-1(-6+2\lambda+11+\lambda)=-5-3\lambda$$

Por tanto S.I. con $S=\{-5-3\lambda,5\lambda-1,\lambda\}$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix}1&-6+2\lambda\\2&-11-\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}}=-1(-11-\lambda+12-4\lambda)=5\lambda-1$$

f) En este caso tenemos: $\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&1\\2&3&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-9\\-10\end{pmatrix}$,

Aquí $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -9\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -5\\ 2 & 1 & 1 & -9\\ 2 & 3 & -9 & -10\end{pmatrix}$. Como ya hemos visto Rang(A)=2, falta ver el rango de la matriz B.

$$|B'|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -5\\ 1 & 1 & -9\\ 3 & -9 & -10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -5\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=15+12=27 \text{ , } \Rightarrow \text{Rang(B)=3.}$$

Como Rang(A)≠Rang(B) ➔ S.I.

6.- Discutir el siguiente sistema: $\begin{cases}2x-y+3z=1\\ x+2y-z=-b\\ x+ay-6z=10\end{cases}$

Escribimos las matrices A y B.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & a & -6\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -b\\ 1 & a & -6 & 10\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & a & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 2-a & 5\\ 1 & a & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1-2a & 15\\ 0 & 2-a & 5\\ 1 & a & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-2a & 15\\ 2-a & 5\end{vmatrix}=5a-35$$

Por tanto:

- Si a=7 ➔ $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\neq 0$ ➔ Rang(A)=2
- Si a≠7 ➔ Rang(A)=3

Vamos a estudiar ahora el rango de la matriz $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -b\\ 1 & 7 & -6 & 10\end{pmatrix}$

$$|B_1|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -b\\ 1 & -6 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -b\\ -5 & -6 & 10\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}-1 & -b\\ -6 & 10\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & -b\end{vmatrix}=-50-30b+15b-5=-15b-55$$

Y si igualamos a cero, obtenemos $b=\frac{-55}{15}=\frac{-11}{3}$

Por tanto:

- Si $b=\frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=2
- Si $b\neq\frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=3

Resumiendo:

- Si a ≠ 7 ➔ El Sistema es de Cramer ➔ Sistema Compatible Determinado. (S.C.D.)
- Si a = 7 ➔ Rang(A) =2
    - Si $b=\frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=2 ➔ Rang(A)=Rang(B)=2 ➔ S. Compatible Indeterminado
    - Si $b\neq\frac{-11}{3}$ ➔ Rang(B)=3 ➔ Rang(A)≠Rang(B) ➔ Sistema Incompatible.