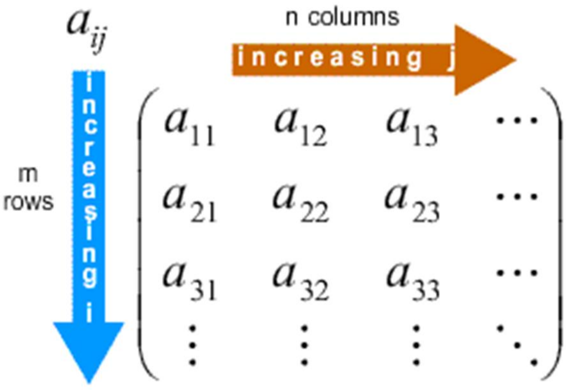
Departamento de Matemáticas
I.E. Juan Ramón Jiménez
Casablanca (Marruecos)

Tema 7

Matrices



Raúl González Medina
I.E. Juan Ramón Jiménez
Tema 7

7.0.- Introducción

La palabra álgebra proviene del libro **Al-jabr wa'l muqabalah**, del matemático árabe **Al-Jowarizmi** (siglo IX). Con dicho nombre se designó en occidente en posteriores siglos a la ciencia que aprendieron del citado libro. El principal objetivo del álgebra clásico fue la resolución de ecuaciones hasta prácticamente la Edad Media con la aparición del libro de Al-Jowarizmi.

El Álgebra se extendió hacia Europa a través de España se consagró durante los siglos XVI y XVII. Matemáticos como **Diofanto** (siglo III), **Cardano y Tartaglia** (siglo XVI), **Vieta y Descartes** (siglo XVII), **Gauss, Galois, Hamilton, Sylvester y Cauchy** (siglo XIX) son los principales impulsores del desarrollo y formalización del Álgebra durante la historia.

Con la unidad que comenzamos comienza un nuevo bloque del curso: **Álgebra Lineal**, que está bastante relacionado con el último que veremos a final de curso, el bloque de Geometría del espacio. A diferencia del bloque anterior, este es mucho más mecánico en cuanto a sus aplicaciones prácticas y constituye una potente herramienta de base para estudios posteriores. En la siguiente unidad nos enfrentamos a un nuevo concepto que va más allá del campo de los números reales. Se trata de las **matrices**, con numerosas aplicaciones en muchos campos de las ciencias.

6.1.- Matrices. Definición y primeros ejemplos

Se llama matriz real de ***dimensión mxn***, al conjunto de m·n números reales ordenados en m filas (horizontales) y n columnas (verticales). La forma más general de representar una matriz ***mxn*** es:

$$A_{mxn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde puede verse que cada número real ocupa una posición determinada por los dos subíndices (ij). El primer subíndice (i) indica el número de la fila, y el segundo (j) el de la columna. Así, el término a_{12} es el elemento que está en la 1ª fila y en la 2ª columna.

Las matrices se suelen representar por letras mayúsculas A, B….. ó por A_{mxn} si queremos indicar su dimensión.

Ejemplos:

$A_{2x3}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ Es una matriz de 2 filas y 3 columnas.

$C_{1x4}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Es una matriz de 1 fila y 4 columnas.

- Dos matrices son ***iguales*** si tienen la misma dimensión y coinciden término a término.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=B$$

7.2.- Tipos de Matrices

Entre las matrices existen algunas que reciben nombres especiales y a las cuales nos referiremos con frecuencia, las más importantes son:

✓ Se llama ***matriz fila***, a una matriz con una sola fila.

Así pues, una matriz fila de orden m es una matriz con 1 fila y m columnas:

$$A_{1xm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1m} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A_{1x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz columna***, a una matriz de una sola columna.

Así pues, una matriz columna de orden n es una matriz con n filas y 1 columna: $A_{nx1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{n1} \end{pmatrix}$

Ejemplo: $A_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz opuesta*** de A, y se simboliza por ***–A***, a la matriz en la que todos los elementos tienen el signo opuesto.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz nula***, a la matriz que tiene todos los elementos igual a cero.

Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz cuadrada***, a una matriz que tiene igual número de filas que de columnas.

Ejemplo: $A_{3x3} = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Se llama ***diagonal principal*** de una matriz cuadrada, a la formada por los elementos a_{ij} con i=j. En el ejemplo anterior la diagonal está formada por los elementos $a_{11}=1$, $a_{22}=1$, $a_{33}=0$.

- A la otra diagonal, se le llama ***diagonal secundaria***.

✓ Se llama ***matriz diagonal***, a la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos excepto los de la diagonal principal.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

✓ Se llama ***matriz escalar***, a aquella matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- ✓ Se llama ***matriz identidad*** de orden n, y se denota por I_n, a la matriz escalar del mismo orden cuyos elementos de la diagonal principal son todos igual a la unidad.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 2 $\quad$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz identidad de orden 3

- ✓ Se llama ***matriz triangular***, a la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal (triangular superior) o por debajo de ella (triangular inferior).

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Triangular superior, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Triangular inferior.

- ✓ Se llama ***matriz transpuesta de A***, y se representa A^t, a la matriz que resulta de intercambiar sus filas por columnas:

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. Vemos que la dimensión de A es 2x3 mientras que la de A^t es 3x2.

- ✓ Se llama ***matriz simétrica***, a la matriz que coincide con su transpuesta, es decir que $a_{ij}=a_{ji}$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que $A=A^t$

- ✓ Se llama ***matriz antisimétrica***, a la matriz cuya transpuesta es igual a su opuesta. $A^t=-A$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vemos que $A^t=-A$

7.3.- Operaciones con Matrices

7.3.1.- Suma de Matrices

Para que dos matrices A y B se puedan sumar es necesario que tengan el ***mismo número de filas y de columnas***, es decir la misma dimensión. La matriz resultante se obtiene sumando los elementos de A y de B que estén en la misma posición (ij).

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ entonces $A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 0+9 \\ 4+8 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de Matrices:

- Asociativa:
  (A+B)+C=A+(B+C)
- Elemento Neutro:
  A+0=0+A=A
- Conmutativa: A+B = B+A
- Elemento opuesto: A+(-A)=0

7.3.2.- Producto por un escalar

El producto de una matriz A por un escalar k (número real), es una matriz de igual dimensión kA, que se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz A por k.

Ejemplo: Sea $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ y k=2 entonces $kA=2\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$

Propiedades del producto de números por matrices:

Sean A y B matrices, y sean a y b escalares
- A·(b·A)=(a·b)·A
- (a+b)·A=a·A+b·A
- a·(A+B)=a·A+a·B
- 1·A=A
- Elemento Neutro: A+0=0+A=A
- Elemento opuesto: A+(-A)=0

7.3.3.- Producto de dos matrices

Dos matrices A y B ***solo son multiplicables si el número de columnas de A es igual al número de filas de B***. El producto es otra matriz C, que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, y cuyos elementos se obtienen del siguiente modo:

$$C_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots\ldots\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Ejemplo 7.1: Sean $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\2&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&5\end{pmatrix}$. Calcular A·B y B·A.

Como ya sabemos, para multiplicar matrices tiene que ocurrir que el número de columnas de A ha de ser igual al numero de filas de B. Vemos que el número de columnas de A es 2, y que el número de filas de B es 2, por tanto ambas matrices se pueden multiplicar y la matriz resultante tiene 3 filas y 2 columnas.

- Para multiplicar hacemos: Fila de A · Columna de B

$$A_{3x2}\cdot B_{2x2}=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot(-1)+1\cdot5\\3\cdot2+(-1)\cdot1 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot5\\2\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot(-1)+0\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3\\5&-8\\4&-2\end{pmatrix}=C_{3x2}$$

Veamos ahora el caso de B·A; como el número de columnas de B es 3 y el de filas de A es 2, entonces no podemos calcular B·A.

$$B_{2x2}\cdot A_{3x2}=?$$

Propiedades del producto de Matrices:

- Asociativa: (A·B)·C=A·(B·C)
- No Conmutativa: A·B ≠ B·A
- Elemento Neutro: A·I=A (Siempre y cuando se puedan multiplicar)
- Distrubituva con respecto a la suma:
  A·(B+C)=A·B+A·C
  (B+C)·D=B·D+C·D

En general, el producto de matrices no es conmutativo, pero existen algunos casos en los que sí lo es, en estos casos, se dice que las matrices son ***permutables***.

7.3.4.- Potencia de una matriz cuadrada

Se define la potencia de una matriz cuadrada (si no es cuadrada no tiene sentido calcular la potencia), al producto matricial de n matrices iguales, esto es:

$$A^n = A\cdot A\cdot A\cdot A\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot A$$

Ejemplo 7.2: Sea la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar A^3.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^3 = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -9 \\ 27 & -10 \end{pmatrix}$$

Algunas veces nos piden calcular potencias de una matriz de exponente muy elevado. En estos casos, podemos encontrar una fórmula de inducción, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3: Calcular A^{100} Siendo A la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo primero es calcular A^2: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Después calculamos A^3: $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Parece ser que las sucesivas potencias conservan la primera fila igual, la segunda cambia en primer término y lo mismo ocurre con la tercera.

Cabe suponer entonces que la potencia n-ésima será: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Veamos si lo hace para n+1: $A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto queda demostrado ***por inducción*** que la igualdad supuesta $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es cierta.

Y otras veces la potencia es cíclica, es decir, conforme se va elevando el exponente encontramos que para un cierto exponente el resultado es la misma matriz o la matriz identidad:

Ejemplo 7.4: Calcular A^{2000} y A^{2001} siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lo primero es calcular A^2: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Después A^3: $A^3 = A^2\cdot A = I\cdot A = A$

Vemos que para potencias pares (2n) la matriz es I y para las impares (2n-1) la matriz es A

Por tanto: $A^{2000} = \left(A^2\right)^{1000} = (I)^{1000} = I$ Y $A^{2001} = A^{2000}\cdot A = I\cdot A = A$

7.4.- Ejercicios Resueltos

1.- Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ***calcular:***

a) A+B y B+A
b) A·B y B·A
c) ¿es A·B=B·A?

a) $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ $\qquad B+A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 13\end{pmatrix}$

c) No. El producto de matrices no es conmutativo.

2.- Dadas las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Hallar:

a) A·(B+C)

$$A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 6 & 6 & 5\\ 6 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}51 & 50 & 64\\ 45 & 28 & 48\\ 24 & 37 & 60\end{pmatrix}$$

b) A·B^t^

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 24 & 31\\ 7 & 26 & 25\\ -4 & 23 & 40\end{pmatrix}$$

c) A·(3B-2C)=

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 9 & 3 & 15\\ 18 & 3 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 12 & 14\\ 6 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11 & -12 & -8\\ 3 & -7 & 15\\ 18 & 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & -65 & 67\\ 70 & -21 & 69\\ -48 & -69 & -40\end{pmatrix}$$

d) A²

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 4\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 30 & 28\\ 30 & 14 & 18\\ 24 & 30 & 13\end{pmatrix}$$

3.- Calcular A·B y B·A siendo A y B las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 6 & -3\\1 & 3 & 2 & -1\\-2 & -6 & -4 & 2\\2 & 6 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

4. –Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}, I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ***; calcular A^2-3A-I***

A^2-3A-I=

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 9\\3 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 9\\3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & 9\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

5.- Probar que $A^n=2^{n-1}\cdot A$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

Lo primero que hacemos es calcular A^2:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=2A$$

Ahora A^3 : $A^3=A^2\cdot A=2\cdot A\cdot A=2A^2=2\cdot 2\cdot A=4A=2^2A$

Para A^4: $A^4=A^3\cdot A=2^2\cdot A\cdot A=2^2A^2=2^2\cdot 2\cdot A=2^3A$

Vemos que se cumple que $A^n=2^{n-1}\cdot A$

Supongamos que se cumple que $A^n=2^{n-1}\cdot A$, entonces por inducción:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=2^{n-1}\cdot A\cdot A=2^{n-1}\cdot A^2=2^{n-1}\cdot 2\cdot A=2^n\cdot A$$

Por tanto $A^n=2^{n-1}\cdot A$

6.- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$ ***y sea n un número natural cualquiera. Encontrar el valor de A^n para cada n y hallar A^{350} - A^{250}***

Lo primero es calcular A^2: $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot 2 & 1\end{pmatrix}$

Ahora calculamos A^3: $A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\9 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3\cdot 3 & 1\end{pmatrix}$

Vemos que se cumple que $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\3n & 1\end{pmatrix}$

Supongamos que esto es cierto, entonces por inducción: $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\3(n+1) & 1\end{pmatrix}$

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\3n&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3n+3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3(n+1)&1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\3n&1\end{pmatrix}$

7.- Se consideran las matrices $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}$

a) Determinar x e y para que M·N=N·M
b) Calcular M^{2001} y M^{2002}

a)

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&0&0\\x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$N\cdot M=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&y\end{pmatrix}$$

Para que N·M=M·N tiene que ocurrir que ***x=0, y=1***

b) Primero calculamos M^2 $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

Ahora calculamos M^3: $M^3=M^2\cdot M=I\cdot M=M$

Vemos que las potencias pares (2n) resultan la matriz identidad, y las impares (2n-1) resultan M.

Por tanto: $M^{2001}=M^{2000}\cdot M=\left(M^2\right)^{1000}\cdot M=(I)^{1000}\cdot M=I\cdot M=M$
y $M^{2002}=M^{2001}\cdot M=M\cdot M=M^2=I$

8.- Sea la matriz $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ ***calcular B^n***

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=3\cdot B$$

$$B^3=B^2\cdot B=3\cdot B\cdot B=3\cdot B^2=3\cdot 3\cdot B=3^2\cdot B$$

$$B^4=B^3\cdot B=3^2\cdot B\cdot B=3^2\cdot B^2=3^2\cdot 3\cdot B=3^3\cdot B$$

Por tanto cabe suponer que $B^n=3^{n-1}\cdot B$

Supongamos que esto es cierto, entonces por inducción $B^{n+1}=3^n\cdot B$

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = 3^{n-1} \cdot B \cdot B = 3^{n-1} \cdot B^2 = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot B = 3^n \cdot B$$

Por tanto $B^n = 3^{n-1} \cdot B$

9.- Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3 comprueba que $A^3+I=0$
b) Calcula la matriz A^{10}

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$ **Por tanto $A^3+I=0$**

$$A^{10} = A^9 \cdot A = \left(A^3\right)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

10.- Resolver la siguiente ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Haciendo la multiplicación, obtenemos :

$\left.\begin{array}{l} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\}$ De donde resolviendo el sistema $x = \dfrac{-5}{4}, y = \dfrac{-7}{4}$

11.- Encuentra dos matrices A y B, cuadradas 3x3, con coeficientes reales tales que satisfagan las dos igualdades siguientes:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ Entonces:

$\left.\begin{array}{l} a_{11} - b_{11} = 1 \\ 3a_{11} + 2b_{11} = 3 \end{array}\right\}$ de donde $a_{11}=1$ y $b_{11}=0$

$\left.\begin{array}{l} a_{12} - b_{12} = 1 \\ 3a_{12} + 2b_{12} = 8 \end{array}\right\}$ de donde $a_{12}=2$ y $b_{12}=1$

$\left.\begin{array}{l} a_{13} - b_{13} = -1 \\ 3a_{13} + 2b_{13} = -3 \end{array}\right\}$ de donde $a_{13}=-1$ y $b_{13}=0$

Reiterando este proceso para los demás a_{ij} obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otra forma sería, multiplicar A-B por 2 y sumar con 3A+2B, de esta forma obtendríamos

$5A=\begin{pmatrix}5 & 10 & -5\\ 0 & 10 & 5\\ 5 & 0 & 0\end{pmatrix}$ de donde despejaríamos A, y B lo calculamos despejando en la otra ecuación.

12.- Comprueba que (A+B)^t = A^t + B^t, y que $\left(A^t\right)^t=A$, a partir de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} y \ \mathrm{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 4 & 8 & 4\end{pmatrix} \quad (A+B)^t=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y} \ A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix} \ B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix} \ A^t+B^t=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

13.- Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7 & 1 & -1\\ 48 & -10 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 5\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}$

Calcula 2A-3B+C-2D

$$2A-3B+C-2D=\begin{pmatrix}18 & -1 & -10\\ 56 & -15 & -11\end{pmatrix}$$

14.- Dadas las siguientes matrices,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 0 & 0\\ -2 & -5 & 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

efectúa los posibles productos entre ellas. (Hay 6 posibles multiplicaciones)

Las posibles multiplicaciones son: A·C, A·D, C·B, B·A, D·C, D·D

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}8 & -2 & 4 & 5\\ 24 & -4 & -1 & -10\end{pmatrix} \quad A\cdot D=\begin{pmatrix}7 & 18 & -4\\ 0 & 30 & 5\end{pmatrix} \quad C\cdot B=\begin{pmatrix}22 & 28\\ 39 & 3\\ -9 & -4\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 14 & 21\\ -3 & 3 & -2\\ -2 & 5 & 1\\ -5 & 26 & 13\end{pmatrix} \quad D\cdot C=\begin{pmatrix}-6 & -1 & 2 & 5\\ 26 & 5 & 2 & 0\\ 28 & 38 & -1 & 10\end{pmatrix} \quad D\cdot D=\begin{pmatrix}3 & -3 & -4\\ 4 & 31 & 4\\ -4 & 4 & 17\end{pmatrix}$$

15.- Para las siguientes matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ***comprueba las siguientes igualdades:***

- ***a) A·(B·C)=(A·B)·C***
- ***b) A·(B+C)=A·B + A·C***
- ***c) (A+B)·C=A·C + B·C***

16.- Encuentra las potencia n-ésimas de las siguientes matrices:

$$B=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}; C^n=\begin{pmatrix}a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{pmatrix}; D^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n^2+n}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

17.- Hallar las matrices A y B cuadradas de segundo orden que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \;;\; 2A+3B=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 7 & 9\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

18.- Sea $A=\begin{pmatrix}6 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}$***. Encontrar una matriz cuadrada triangular B tal que A=B·B^t. ¿existe una sola?***

Sea $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix}a & o\\ b & c\end{pmatrix}$ entonces: $B\cdot B^t=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & b\cdot c\\ c\cdot b & c^2\end{pmatrix}$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=6\\ b\cdot c=-6\\ c^2=10\end{array}\right\} \text{ Si resolvemos este sistema obtenemos : } \left.\begin{array}{l} c=\pm\sqrt{10}\\ b=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}\\ a=\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}\end{array}\right\}$$

La matriz B es de la forma: $B=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{15}}{5} & \frac{3\sqrt{10}}{5}\\ 0 & \sqrt{10}\end{pmatrix}$

La solución no es única, hay varias matrices, según cojamos el signo de a, b y c. Además si la matriz B es de la forma $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}$ obtenemos otros resultados.

19.- Sean 3 matrices cuadradas A, B, C con $B=\begin{pmatrix}3&2&7\\1&2&4\\5&1&9\end{pmatrix}$ ***y*** A·B=C.

¿Cómo ha de ser la primera fila de A para que la primera fila de B y la primera fila de C sean iguales?
Tiene que ocurrir que:

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\ & & \\ & & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&7\\1&2&4\\5&1&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&7\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}3a+b+5c=3\\2a+2b+c=2\\7a+4b+9c=7\end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema a=1, b=0, c=1 la primera fila es $\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$

¿Cómo ha de ser la segunda fila de A para que la segunda de C sea igual a la segunda de B multiplicada por 4?
Tiene que ocurrir que:

$$\begin{pmatrix} & & \\a&b&c\\ & & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&7\\1&2&4\\5&1&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\4&8&16\\ & & \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}3a+b+5c=4\\2a+2b+c=8\\7a+4b+9c=16\end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema a=0, b=4, c=0 la segunda fila es $\begin{pmatrix}0&4&0\end{pmatrix}$

Si queremos que la primera fila de B quede multiplicada por 3, la segunda por 4 y la tercera por -2, ¿Cómo ha de ser A?

A de ser de la forma: $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

¿Y si queremos multiplicar las tres filas por 1? En este caso dejamos a B igual. Esta última matriz A se la llama matriz unidad y se denomina I.

20.- Sean las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\\2&3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$$

Calcula todos los posibles productos entre ellas.

B·A, A·C, D·C, A·D, B·B, D·D, C·B, C·A