6 Iniciación al Álgebra

ANTES DE COMENZAR LA UNIDAD...

El escudo de armas

Nuestra historia versa sobre el nacimiento del Álgebra, que posiblemente es la parte más abstracta de las Matemáticas.

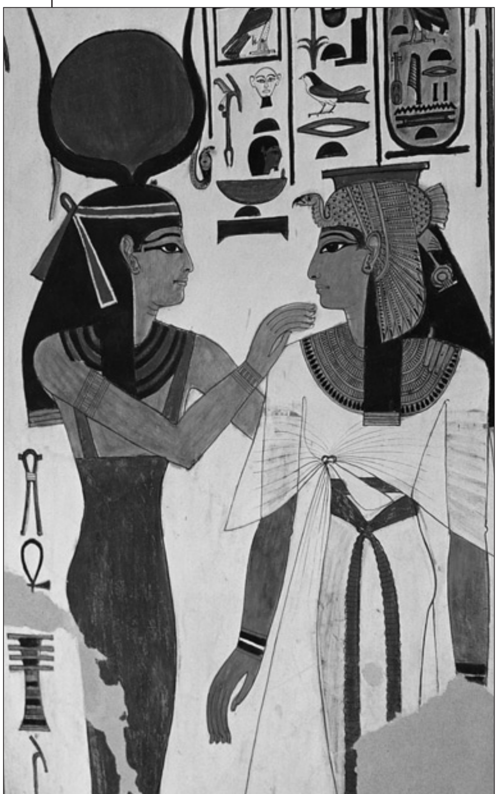
Está universalmente aceptado que el nacimiento del Álgebra, así como sus primeros tratados, se deben a los árabes; en particular, en la Casa de la Sabiduría, en Bagdad, trabajó el creador de esta área de las Matemáticas: el sabio árabe **Al-Khwarizmi**, autor del primer tratado conocido de Álgebra.

La Península Ibérica fue, sin duda, un punto de intercambio cultural muy importante; en Córdoba y Sevilla, por parte de los árabes, o en Toledo, por parte cristiana, hubo una verdadera revolución cultural debida en parte a la aceptación de distintos credos, conviviendo ejemplarmente cristianos, árabes y judíos.

Mostramos en la lectura un cierto paralelismo entre el Álgebra y la Heráldica, pues en ambos casos se trabaja con símbolos que representan a su vez diferentes realidades; además, las dos disciplinas se someten a reglas de formación y procesos que hacen que las dificultades al trabajar con ellas desaparezcan.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Ecuaciones en Egipto



Parte de los avances matemáticos en la civilización egipcia los conocemos gracias a los escritos encontrados en papiros, tales como el papiro de Rhind. Este papiro contiene 87 problemas. Para poder hallar la solución de algunos de ellos hay que resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

En el problema 21, en términos modernos, se pide encontrar un número x tal que $\frac{2}{3} + \frac{1}{15} + x = 1$. Para resolver la ecuación los egipcios la multiplicaron por 15 y obtuvieron la *ecuación auxiliar roja* $10 + 1 + 15x = 15$, llamada así porque el escribano la escribió con tinta roja.

La solución de la *ecuación roja* es $\frac{4}{15}$, por lo que la solución de la ecuación original es la misma, ya que ambas son equivalentes.

El problema 24 dice así: «Si a una cantidad le agrego el cuarto de esa cantidad obtengo 15. ¿Cuál es la cantidad?». En notación moderna, el problema consiste en resolver $x + \frac{x}{4} = 15$.

Para resolver esta ecuación utilizaban el *método de la falsa posición*, una especie de método de ensayo y error modificado.

Así, probaban con $x = 4$, ya que de esta forma se anula la fracción $\frac{x}{4}$, y obtenían $\frac{4}{4} = 1$. Pero para $x = 4$ la expresión $x + \frac{x}{4}$ se convierte en 5.

Por tanto, esta no es la respuesta correcta.

Sin embargo, como $15 = 3 \cdot 5$, tomaban tres veces $x = 4$, esto es: $x = 12$, que es la solución correcta. Compruébalo tú mismo.

Leibniz

Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán, comparte con Newton la gloria de ser uno de los creadores del cálculo diferencial. Fue uno de los primeros matemáticos en darse cuenta de la necesidad del tratamiento simbólico de los razonamientos. Pensaba que el lenguaje simbólico y científico debía derribar las barreras de las lenguas nacionales.

RECURSOS PARA EL AULA

COMPETENCIA LECTORA

6 Iniciación al Álgebra

CONTENIDOS PREVIOS

CONVIENE QUE...

Recuerdes la **propiedad distributiva del producto**.

PORQUE...

Tendrás que aplicarla en la resolución de algunas ecuaciones.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$
$$\boldsymbol{a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c}$$

$$7 \cdot (5 + 2) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 35 + 14 = 49$$
$$8 \cdot (4 - 3) = 8 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 32 - 24 = 8$$

CONVIENE QUE...

Conozcas cómo realizar el **producto y cociente de potencias de la misma base**.

PORQUE...

Lo necesitarás para operar con monomios.

Para **MULTIPLICAR POTENCIAS DE LA MISMA BASE** se mantiene la base y se suman los exponentes.

Para **DIVIDIR POTENCIAS DE LA MISMA BASE** se mantiene la base y se restan los exponentes. El exponente del dividendo tiene que ser mayor que el del divisor.

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$
$$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

$$7^3 \cdot 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$$
$$4^6 : 4^2 = 4^{6-2} = 4^4$$

CONVIENE QUE...

Sepas cómo llevar a cabo la **simplificación de fracciones**.

PORQUE...

Te servirá para realizar divisiones de monomios y para simplificar la resolución de una ecuación.

SIMPLIFICAR una fracción consiste en hallar otra fracción equivalente que no tenga factores comunes en el numerador y el denominador.

$$\frac{120}{180} = \frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a^3 \cdot b^2 \cdot c}{a^2 \cdot c \cdot d} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \cancel{c}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{c} \cdot d} = \frac{a \cdot b^2}{d}$$

NOTACIÓN MATEMÁTICA

¿QUÉ SIGNIFICA? ----------→ **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$x + y - z$ Indica una **expresión algebraica con tres incógnitas**.

Las incógnitas de una expresión algebraica se representan con letras minúsculas. Las más usuales son *x*, *y*, *z*, *t*, *u*, *v*…

¿QUÉ SIGNIFICA? ----------→ **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$-5 \cdot a \cdot b^3$
$-5ab^3$
Indican el **mismo monomio**.

$7 \cdot (3x - 2)$
$7(3x - 2)$
Indican la **misma operación**.

El signo de multiplicación entre un número y una incógnita, o entre dos incógnitas, se puede omitir.

El signo de multiplicación anterior a un paréntesis también se puede omitir.

¿QUÉ SIGNIFICA? ----------→ **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

ax^n Es la **expresión general de un monomio**.

En la expresión general de un monomio se distinguen diferentes partes.

$$\overbrace{a}^{\text{Coeficiente}}\underbrace{x^n}_{\text{Parte literal}}$$

¿QUÉ SIGNIFICA? ----------→ **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$\frac{3}{4}x$

$3/4 \cdot x$

$(3/4)x$

$\frac{3x}{4}$

Todas estas expresiones representan **el mismo monomio**.

Un coeficiente fraccionario se puede expresar mediante cualquiera de sus representaciones.

¿QUÉ SIGNIFICA? ----------→ **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$3 + 4 \neq 9$ Indica que **los miembros son distintos**.

El símbolo $\neq$ expresa que el primer miembro no es igual al segundo.

6 Iniciación al Álgebra

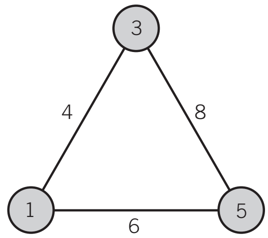
EN LA VIDA COTIDIANA... Ecuaciones, triángulos y tablas

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Usar letras como números generalizados. • Observar regularidades. • Utilizar el Álgebra como herramienta para resolver situaciones. • Generalizar situaciones numéricas.

1 Ecuaciones en triángulos

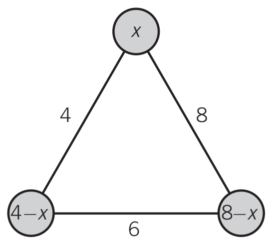
Observa el siguiente triángulo. En los lados está la suma de los números de los vértices.



Imagina que no conocieses los números de los vértices, pero sí las sumas. ¿Cómo hallarías los vértices?

Si llamamos x al número de uno de los vértices, los otros vértices serán $8 - x$ y $4 - x$. Sabemos que 6 es la suma de esos dos vértices, luego:

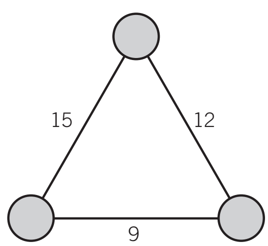
$$(8 - x) + (4 - x) = 6$$



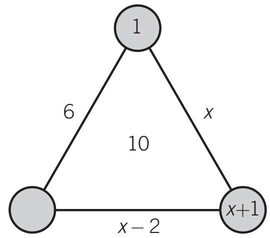
Resolvemos la ecuación: $12 - 2x = 6$, $12 - 6 = 2x$, $6 = 2x$, $x = 3$. Los números son 3, 1 y 5.

RESUELVE AHORA ESTAS ACTIVIDADES UTILIZANDO ECUACIONES.

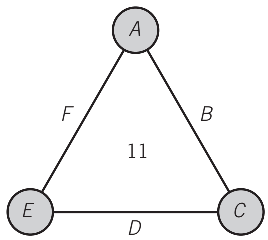
a) *Averigua los números de vértices del triángulo.*



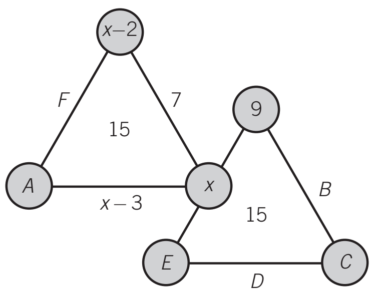
b) *Completa el siguiente triángulo con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, de manera que la suma de los tres números de los lados sea siempre la indicada en el centro del triángulo.*



c) *Busca el valor de* A, B, C, D, E *y* F *en el triángulo, sabiendo que la suma de los lados es la indicada en el centro del triángulo y que el valor de* A *es 2, el valor de* B *es una unidad mayor que* A *y el valor de* E *es el doble de* A.



d) *Observa esta pareja de triángulos que comparten un punto. Averigua los valores que faltan sabiendo que sus lados siempre suman 15, que* A *es tres unidades mayor que* x *y* B *es la quinta parte de* x.



2 Regularidades en tablas

Esta tabla contiene los números del 1 al 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tomamos un cuadrado de 2×2, por ejemplo:

7	8
17	18

Observa que: $7 + 18 = 8 + 17$.

Elegimos otros cuadrados y comprobamos:

11	12
21	22

Observa que: $11 + 22 = 12 + 21$.

66	67
76	77

Observa que: $66 + 77 = 67 + 76$.

HAZ LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Toma un número cualquiera* x *y expresa en función de él los números del cuadrado 2×2 que lo incluye. ¿Se cumple la propiedad anterior?*

b) *¿Es válida esta propiedad para todos los cuadrados 2×2? ¿Por qué?*

Considera ahora la tabla de sumar.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tomamos un cuadrado 2×2, por ejemplo:

4	5
5	6

Observa que: $4 + 6 = 5 + 5$.

Considerando otro cuadrado 2×2:

11	12
12	13

Observa que: $11 + 13 = 12 + 12$.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Toma un número cualquiera* x *y expresa en función de él los números del cuadrado 2×2 que lo incluye. ¿Se cumple la propiedad anterior?*

b) *¿Es válida esta propiedad para todos los cuadrados 2×2? ¿Por qué?*

Esta es la tabla de la suma de los primeros números pares.

+	2	4	6	8	10
2	4	6	8	10	12
4	6	8	10	12	14
6	8	10	12	14	16
8	10	12	14	16	18
10	12	14	16	18	20

Tomamos cuadrados 2×2:

2	4
4	6

Observa que: $2 \cdot 6 \neq 4 \cdot 4$. Pero sí se cumple que: $2 \cdot 6 + 4 = 4 \cdot 4$.

12	14
14	16

Observa que: $12 \cdot 16 + 4 = 14 \cdot 14$.

RESUELVE LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Toma un número cualquiera* x *y expresa en función de él los números del cuadrado 2×2 que lo incluye. Para ello expresa los valores* a *y* b *en función de* x *en el siguiente cuadrado.*

x	a
a	b

b) *Expresa en función de* x *la propiedad:*

$$x \cdot b + 4 = a \cdot a$$

c) *La expresión que se obtiene en b), ¿es una identidad o una ecuación?*

d) *¿Es válida la anterior propiedad para los cuadrados 2×2?*

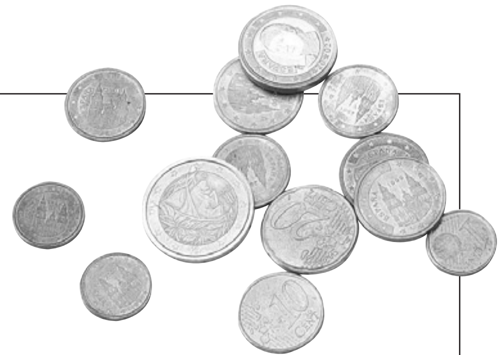
6 Iniciación al Álgebra

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Fases de resolución de un problema

Estrategia En la resolución de un problema mediante ecuaciones conviene seguir los cuatro pasos indicados: comprender el enunciado, plantear el problema mediante una ecuación, resolver la ecuación y comprobar que la solución cumple las condiciones del problema.

PROBLEMA RESUELTO



Ana tiene 2 € más que Berta, Berta tiene 2 € más que Eva y Eva 2 € más que Luisa. Entre las cuatro amigas tienen 48 €. ¿Cuántos euros tiene cada una de ellas?

Planteamiento y resolución

Comprender el enunciado

Se debe leer el problema las veces que sean necesarias para distinguir los datos conocidos y el dato desconocido que se quiere hallar, es decir, la incógnita. En este problema conocemos: la suma del dinero (en euros) de las cuatro amigas y que, colocadas por el orden alfabético de las iniciales de su nombre, cada una tiene 2 € más que la siguiente.

Plantear y resolver la ecuación

Elegimos como incógnita x la cantidad de euros que tiene Luisa.

Cantidad de euros que tiene Luisa $\rightarrow$ x

Las cantidades de las otras amigas se escriben en función de x:

Cantidad que tiene Eva $\longrightarrow$ $x + 2$

Cantidad que tiene Berta $\rightarrow$ $(x + 2) + 2 = x + 4$

Cantidad que tiene Ana $\longrightarrow$ $(x + 4) + 2 = x + 6$

Finalmente, escribimos la condición de que la suma de las cantidades es 48:

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 48$$

$$4x + (2 + 4 + 6) = 48 \rightarrow 4x + 12 = 48$$

$$4x = 48 - 12 \rightarrow 4x = 36$$

$x = \dfrac{36}{4} = 9$. Luisa tiene 9 €.

Eva tiene $9 + 2 = 11$ €, Berta tiene 13 € y Ana 15 €.

Comprobación

Se debe comprobar que se cumplen las condiciones del problema.

1.º Las cantidades de dinero que tienen: 9, 11, 13 y 15 €, respectivamente. Eva tiene 2 € más que Luisa, Berta 2 € más que Eva, etc.

2.º La suma de las cantidades es 48 €: $9 + 11 + 13 + 15 = 48$.

MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

PRÁCTICA EXCEL

PRÁCTICA 1 (ejercicio 44 a), pág. 124)

	A	B	C	D	E
1	**Valores numéricos de expresiones algebráicas**				
2	Valores de x	3x-1	x^2+1		
3					
4					
5					
6					

Contenido

Abre el libro **NUMEROS_1** e inserta la hoja **Unidad06_1a**.

1. Escribe las etiquetas en las celdas A1 y de A2 a C2.
2. Introduce los valores del ejercicio: 1, 2, -1 y 0 en las celdas A3 a A6.
3. En la celda B3 introduce la fórmula: fx =3*A3-4 . Observa el resultado: $3 \cdot 1 - 4 = -1$.
4. En la celda C3 introduce la fórmula: fx =A3^2+1. Observa el resultado: $1^2 + 1 = 2$.
5. Copia las fórmulas de las celdas B3 y C3 en las celdas inferiores de la misma columna.
   a) Selecciona las dos celdas y pulsa CTRL + C o .
   b) En la celda B4 pulsa CTRL + V o .

PRÁCTICA 2 (ejercicio 44 b), pág. 124)

	A	B	C	D	E
1	**Valores numéricos de expresiones algebráicas**				
2	a	b	5a+2b	$(a+b)^2$	
3					
4					

Contenido

Inserta la hoja **Unidad06_2a**.

1. Escribe las etiquetas en las celdas A1 y de A2 a D2.
2. Introduce los datos del ejercicio en las celdas de las columnas A y B desde la fila 3 en adelante (para dar valores a las variables a y b): $\{a = 0, b = 1\}$, $\{a = 0, b = 2\}$...
3. Introduce en la celda C3 la fórmula: fx =5*A3-2*B3 . Observa el resultado: $5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$.
4. Introduce en la celda D3 la fórmula: fx =(A3+B3)^2 . Observa el resultado: $(0 + 1)^2 = 1^2 = 1$.
5. Copia las fórmulas de las celdas C3 y D3 en las celdas correspondientes de las filas posteriores.
6. Escribe los resultados en tu cuaderno.

a	b	5a-2b	$(a+b)^2$
0	1	-2	1
0	2		

Resultados

EJERCICIOS

1 **APLICA:** Inserta la hoja Unidad06_3a y comprueba las expresiones numéricas del ejercicio 57 de la página 126. Ten en cuenta que necesitarás una expresión diferente para cada apartado: por ejemplo, para el apartado a) la fórmula será fx =4*A3-7 . Puedes añadir otra columna que te permita comparar el resultado que salga con ***2*** e indicar si es cierto o no.

2 **PRACTICA:** De forma análoga a como lo has hecho en el ejercicio anterior, inserta la hoja Unidad06_4a y resuelve el ejercicio 59 de la página 126.

Guarda el libro con Archivo → Guardar.