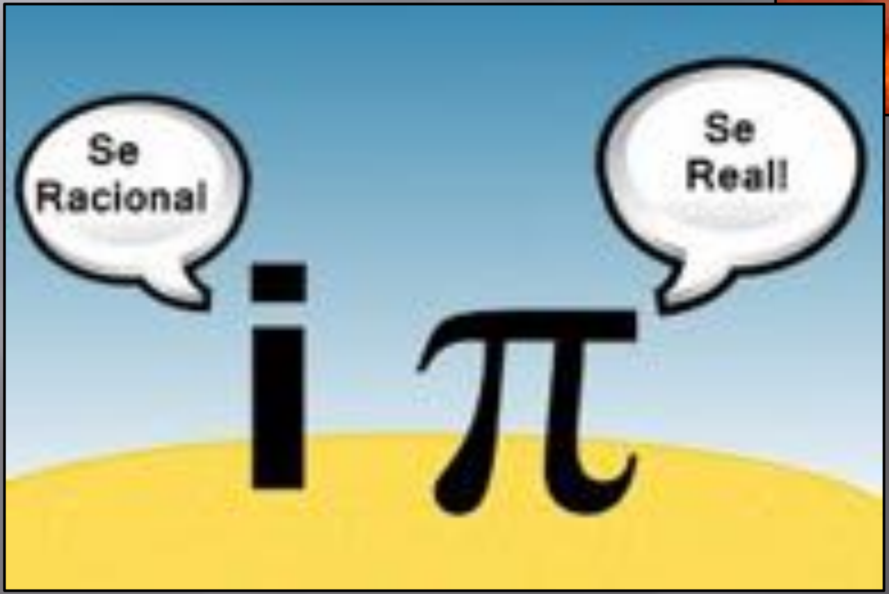
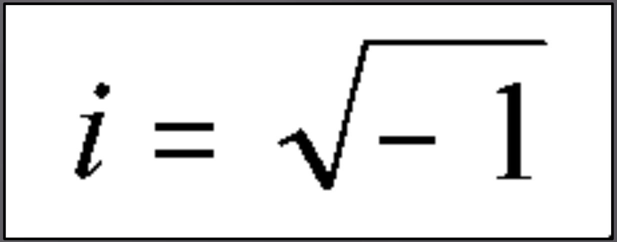
Números Complejos





Estándares - Examen
B2.C2.1. Entiende los nº complejos como ampliación de los nº reales. Sabe resolver ecuaciones de 2º grado sin solución real.
B2.C2.2. Operaciones con nº complejos y fórmula de De Moivre para potencias (Ex - MAT)
B2.C2.3. Representa gráficamente números complejos en forma binómica y polar

1. INTRODUCCIÓN

Los algebristas de los siglos XV y XVI, al resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 - 4x + 13 = 0$ y llegar a la expresión $x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$, decían: *No es posible* extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, la ecuación no tiene solución.

Pero en algún momento los algebristas se decidieron a operar con estas expresiones como si se tratara de números reales:

$$\frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\,\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1}$$

1. INTRODUCCIÓN

Leibnitz, en el siglo XVII, decía que $\sqrt{-1}$ es una especie de *anfibio entre el ser y la nada*.

Fue en el año 1777 cuando Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por *imaginario*).

A pesar de que los números complejos (del tipo $a + bi$, siendo a y b números reales) se podían manipular algebraicamente con toda solvencia, estos fueron menospreciados y no había expectativas de que pudieran echar raíces en el serio campo de las matemáticas.

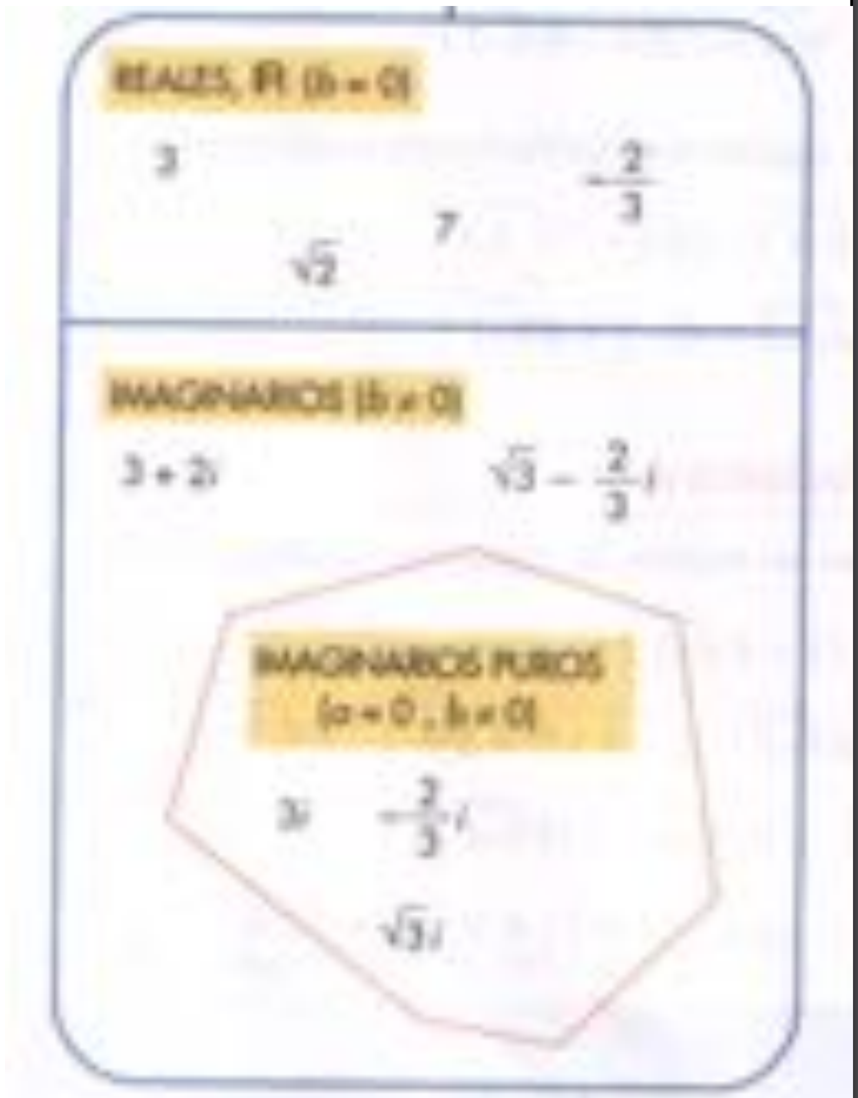
Todo cambió cuando, a comienzos del siglo XIX, **Gauss** concibió la manera de representarlos gráficamente y de interpretar geométricamente sus operaciones (•). A partir de entonces fueron aceptados sin reservas por todos.

1. INTRODUCCIÓN

- $i=\sqrt{-1}$
- **Nº Complejo:** a+bi con a parte real y b parte imaginaria
- Se llama nº imaginarios puros a los complejos que no tienen parte real
- **Complejo opuesto**

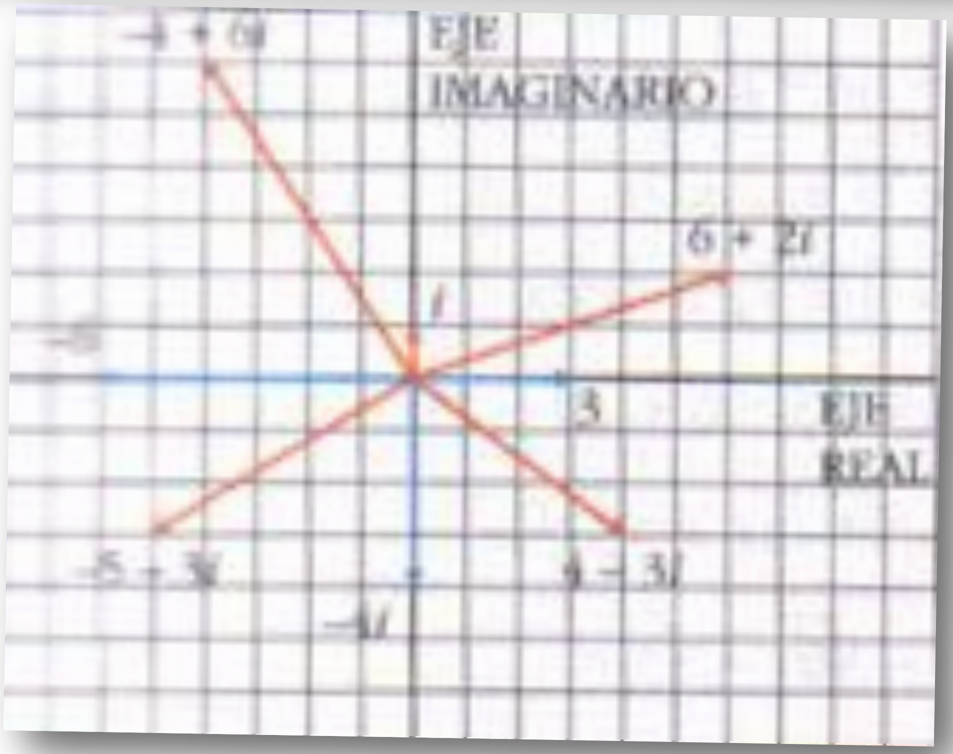
  –a-bi
- **Complejo conjugado**

  a-bi



1. INTRODUCCIÓN

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama **eje real**, y el Y, **eje imaginario**. El número complejo $a + bi$ se representa mediante el punto (a, b), que se llama su **afijo**, o mediante un vector (flecha) de origen $(0, 0)$ y extremo (a, b).



EJERCICIOS

1. Hallar x e y para que se cumpla que $2+xi=y-3i$.
2. Obtener las soluciones complejas de la ecuación $z^2-4z+13=0$.
3. Calcula i^2, i^3, i^4, i^5, i^6,… . ¿Ves que se repite algo cíclicamente?. Calcula i^{101}.

EJERCICIOS

4. Comprobar que $2+3i$ y $2-3i$ son soluciones de $z^2-4z+13=0$.

EJERCICIO PROPUESTO

Indica cuál de estas afirmaciones es verdadera o falsa, justificando tu respuesta:

a) El número 2 es un número real y no es complejo.

b) Cualquier número complejo de la forma a+bi no es real para $a,b \in R$.

c) Para que a+bi sea imaginario a tiene que ser 0.

d) Para a+bi sea real es necesario que b=0.

e) El número 3+3i es imaginario puro.

f) El número 3 no tiene conjugado.

g) Si un número complejo coincide con su conjugado, entonces es un nº real.

h) Si un número complejo coincide con su opuesto, entonces el número es 0.

i) Si el opuesto de un número complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Anécdota del Profesor Universitario de Sociología

Había una vez un chico que empezaba a estudiar en la Universidad y tenía un amigo con el que almorzaba todos los días. A las 11 de la mañana el amigo asistía a las clases de sociología, materia que él se negaba terminantemente a cursar, y a esa hora él asistía a la clase de análisis matemático, materia que el amigo se negaba categóricamente a cursar… así que se separaban a las once y se volvían a encontrar a las doce.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sucedía que el profesor de sociología era un erudito a quien le gustaba hacer las cosas a lo grande y seguir exponiendo cuando su hora ya se había terminado. Los estudiantes más devotos lo escuchaban exponer pomposamente durante otros quince minutos.

Un día, una vez terminada la clase de análisis el chico tuvo que entrar en el aula de sociología y esperar a que terminara su sesión. El profesor estaba anotando en el pizarrón su clasificación de la humanidad en dos grupos: los místicos y los realistas; y entre los místicos había incluido a los matemáticos junto con los poetas y los teólogos.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El profesor dijo “los matemáticos son místicos porque creen en números que no tienen realidad".

Normalmente, al no pertenecer al curso, yo me sentaba en un rincón y soportaba todo, entre aburrido y silencioso, pero al oír eso me paré convulsionado y dije: "¿Qué números?".

El profesor miró hacia donde yo estaba y dijo: "La raíz cuadrada de menos uno. No tiene existencia. Los matemáticos lo llaman imaginario. Pero de alguna manera mística creen que tiene alguna clase de existencia".

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

No hay nada de místico en ello", dijo el chico. "La raíz cuadrada de menos uno es tan real como cualquier otro número."

El profesor sonrió, creyendo encontrarse delante de un muchacho listo que le permitiría demostrar la superioridad de su intelecto y dijo "Aquí tenemos un joven matemático que desea demostrar la realidad de la raíz cuadrada de menos uno. Adelante, joven ¡alcánceme usted un trozo de tiza equivalente a la raíz cuadrada de menos uno!"

El chico se puso colorado: "Bueno, espere un momento..."

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El chico dijo: “Vale, yo le daré un pedazo de tiza equivalente a la raíz cuadrada de menos uno si usted primero me da un pedazo de tiza que valga un medio".

El profesor sonrió de nuevo y dijo "muy bien", partió un trozo de tiza nueva en dos partes y me alcanzó una de ellas. "Ahora le toca cumplir su parte".

"Ah no, espere", dijo el chico "usted no ha cumplido su parte. Esto que me dio es un trozo de tiza, y no medio trozo". Lo sostuvo bien alto para que los otros lo vieran.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Aunque yo aceptara su definición arbitraria de medio trozo, ¿está usted dispuesto a sostener que este trozo de tiza equivale a un medio y no a 0,48 o a 0,52? ¿Y se cree usted realmente calificado para discutir la raíz cuadrada de menos uno, cuando no tiene muy claro el significado de un medio?“

En muchas mediciones habituales intervienen "magnitudes escalares", las que sólo difieren en módulo: un volumen, un peso, una deuda, … Para todas estas mediciones son suficientes los números reales, ya sean positivos o negativos.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Pero también existen las "magnitudes vectoriales" que poseen módulo y dirección, por ejemplo, velocidad, aceleraciones, fuerzas, … Para trabajar matemáticamente con estas magnitudes vectoriales son necesarios los números complejos, porque estos números poseen módulo y dirección.

Ahora bien, cuando usted me pidió "la raíz cuadrada de menos uno en trozos de tiza", se refería a que representara un fenómeno vectorial mediante un fenómeno escalar para cuya descripción son suficientes los números reales.

2. APLICACIÓNES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Si usted me hubiera preguntado cómo llegar desde su aula hasta un punto cualquiera de la Universidad es muy probable que se habría enojado si yo le hubiese dicho: "Camine doscientos metros". Me habría preguntado con aspereza: "¿En qué dirección?". Como podrá ver, se trata de una magnitud vectorial para cuya descripción los números reales son insuficientes.

Pero a esa altura el profesor ya había perdido por completo su ecuanimidad y su argumento final fue incontestable. Dijo: "¡Váyase inmediatamente de aquí!"
El chico se fue riendo y a partir de entonces esperó a su amigo en el pasillo.

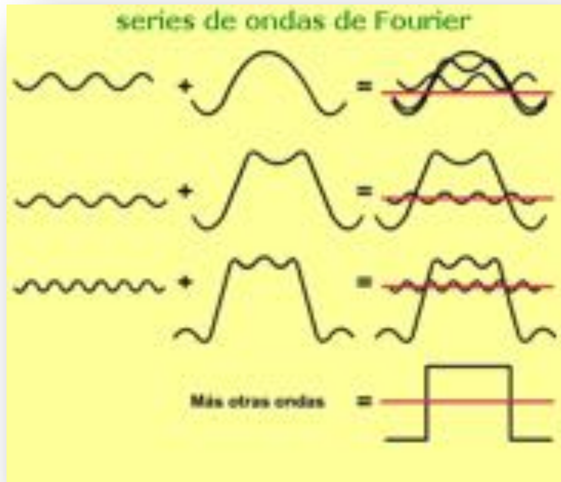
CHISTE MATEMÁTICO

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Ingeniería Electrónica

Series de Fourier

$z = r\, e^{i\varphi}$



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_o \cdot t) + b_n \cdot sen(n \cdot \omega_o \cdot t)\right]$$

$$\cos(n \cdot \omega_o \cdot t) = \frac{e^{j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t}}{2} \quad \& \quad sen(n \cdot \omega_o \cdot t) = \frac{e^{j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t} - e^{-j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t}}{2 \cdot j}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \frac{e^{j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t} + e^{-j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t} - e^{-j \cdot n \cdot \omega_o \cdot t}}{2 \cdot j}\right]$$

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

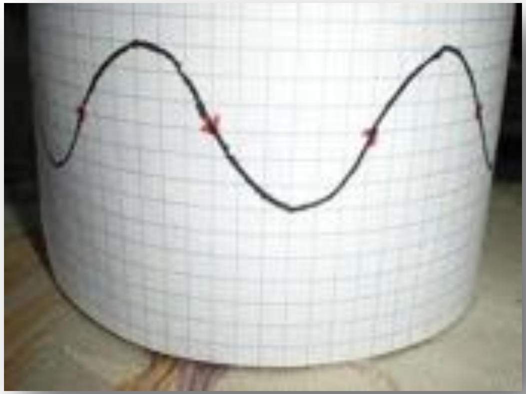
Redes Eléctricas

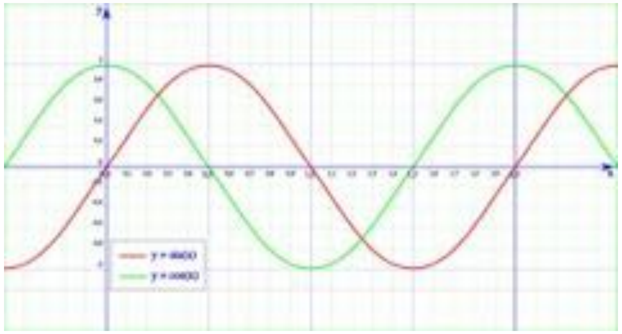
Los números complejos nos dan la fase y la amplitud e intervienen en el tratamiento de fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Los números complejos se relacionan con las funciones seno y coseno (a+bi= rcosα+rsenα i)

Por tanto, los números complejos intervienen en relaciones de la vida real donde hay periodicidad.





¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Vibraciones mecánicas

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

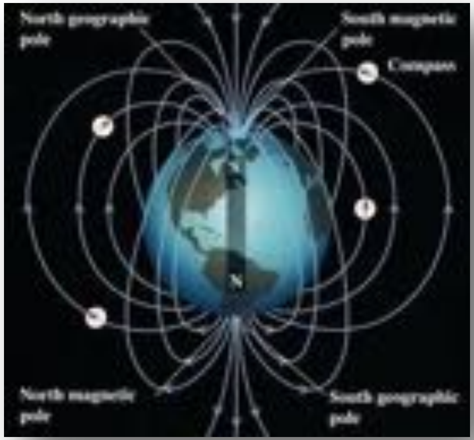
Vibraciones acústicas

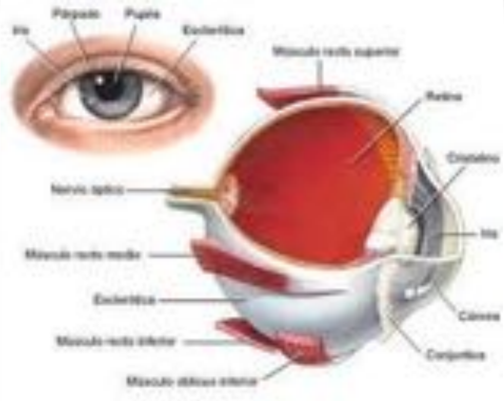
¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Vibraciones terremotos

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Vibraciones electromagnéticas





¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Formula de Euler

$$e^{i\pi}+1=0$$

¡Los números complejos despiertan pasiones!

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Formula de Euler

$$e^{i\pi}+1=0$$

"Esta identidad se puede utilizar para obtener coordenadas con unos cálculos ridículos y una precisión asombrosa sin necesidad de calcular senos y cosenos… fue el primer paso (o uno de los primeros) para los sistemas GPS y GPRS que utilizan las coordenadas polares para determinar la posición del dispositivo y permitir su comunicación."

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Formula de Euler

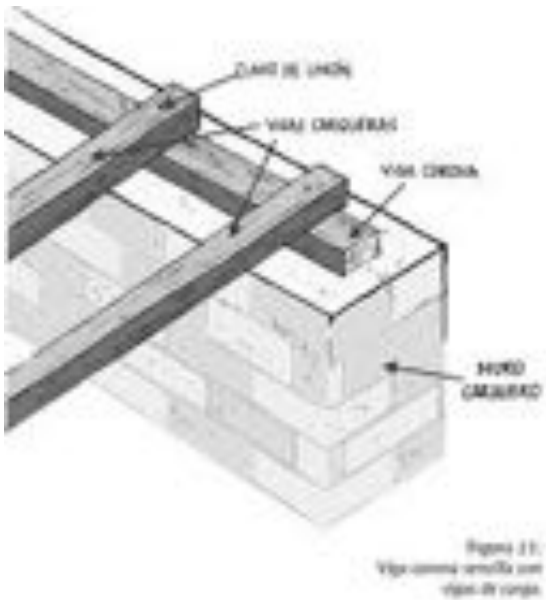
"Se utiliza en el teléfono celular, meteorología, aviones, barcos, sistemas anti robo y todo lo que use el sistema de posicionamiento global."

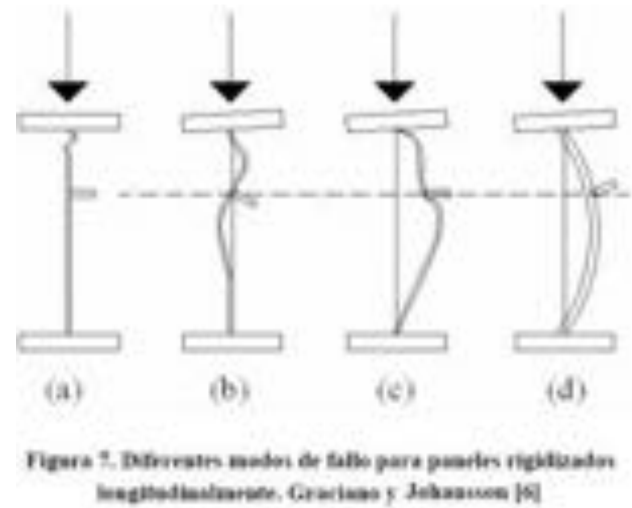
¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Aerodinámica

¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Estudio de cargas





¿Dónde aparecen los números complejos en la vida real?

Conclusión:

"Los números complejos existen y aunque son imaginarios si los buscáis los encontraréis entre nosotros…"

Vídeo Números Complejos (Canal Derivando)

EJERCICIOS

5. Obtén un polinomio cuyas soluciones sean 3i y -3i.

EJERCICIOS

6. Obtén las soluciones reales y complejas de la ecuación $x^3=-8$.

2. OPERACIONES CON Nº COMPLEJOS

Suma: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

Resta: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

Multiplicación: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

El producto de un número complejo, $c+di$, por su conjugado, $c-di$, es siempre un número real:

$$(c+di)\cdot(c-di)=c^2-cdi+cdi+d^2=c^2+d^2$$

División: $$\frac{a+bi}{c+di}\overset{(*)}{=}\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

EJERCICIOS

7. Calcula:

a) (6-3i)-(3-i)-3(4-2i) b) (2-4i)·(3-5i) c) $\frac{2+3i}{3-5i}$

8. Comprueba que $\frac{5+10i}{3-4i}+\frac{2-i}{i}=-2$

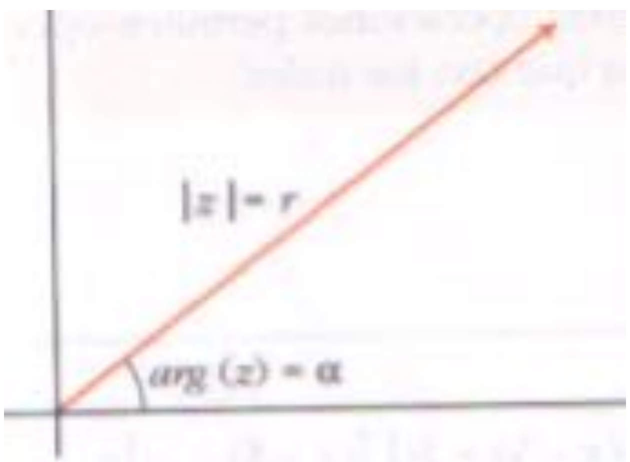
9. Representa gráficamente $z_1=3+2i$, $z_2=2+5i$ y z_1+z_2 . Comprueba que z_1+z_2 es la diagonal de un paralelogramo de lados z_1 y z_2 .

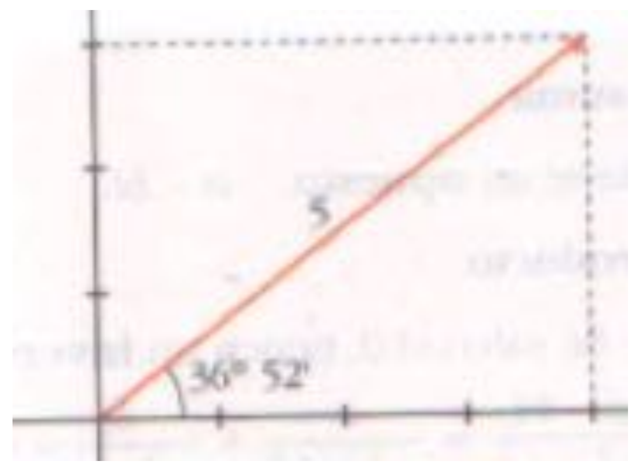
EJERCICIOS

10. ¿Cuánto debe valer “x” para que (4-xi)2 sea imaginario puro.
11. Calcula a y b de forma que $(a+bi)^2=6+8i$
12. Calcula el valor de “a” para que $(2a-3i)^2$ sea imaginario puro.
13. Calcula el valor de “x” para que (2-4i)(5+xi) sea un número real.
14. Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y la suma de sus módulos es 10.

3. Nº COMPLEJOS EN FORMA POLAR

- **Módulo** de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por $|z|$.
- **Argumento** de un complejo z, $z \neq 0$, es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por $arg\,(z)$.
- Si $|z| = r$ y $arg\,(z) = \alpha$, el número complejo se puede designar así: $z = r_\alpha$





3. Nº COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Paso de forma binómica a forma polar

Si conocemos un número complejo $z = a + bi$ en forma binómica, las siguientes relaciones, que son muy claras, permiten pasarlo a la forma polar, r_α:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad tg\, \alpha = \frac{b}{a}$$

3. Nº COMPLEJOS EN FORMA POLAR

15. Pasar a forma polar los números complejos $z_1=-2+2\sqrt{3}i$, $z_2=-2$, $z_3= 2i$.

3. Nº COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Paso de la forma polar a la forma binómica

Si conocemos un número complejo $z = r_{\alpha}$ en forma polar, las siguientes relaciones permiten pasarlo a forma binómica:

$$a = r\cos\alpha \qquad\qquad b = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Según estas igualdades, el número complejo puede ponerse así:

$$z = r\cos\alpha + (r\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,i = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

Esta expresión, $z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, se llama **forma trigonométrica** y sirve para pasar de forma polar a forma binómica.

3. Nº COMPLEJOS EN FORMA POLAR

16. Pasar a forma binómica los números complejos:

$$z_1=5_{225º}\ ,\ z_2=4_{0º}$$

EJERCICIOS

17. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) 5-12i , b) $\sqrt{3}$ + i , c) 1 – i , d) 3+4i , e) -4i

18. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $2_{120º}$, b) $3_{30º}$, c) $4_{180º}$, d) $5_{90º}$, e) $6_{240º}$

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

PRODUCTO:

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot r'_\beta &= r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot r'(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta) = \\ &= r\cdot r'[(\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta) + i(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta)] = \\ &= r\cdot r'[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)] = (r\cdot r')_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

POTENCIAS

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

COCIENTE:

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

Fórmula de Moivre

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Demostración

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = (1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Dados los complejos

$z_1 = 4_{60^\circ}$ *y* $z_2 = 3_{210^\circ}$,

hallar:

$z_1 \cdot z_2;\ z_1^5;\ z_2^4$ *y* $\dfrac{z_2}{z_1}$

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

19. Dados los complejos $z_1=4_{60º}$ y $z_2=3_{140º}$

Calcula: a) $z_1 \cdot z_2$, b) z_1^5 , c) z_2^4 , d) z_1/z_2

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

20. Comprueba que $(1+i)^{16}=256$

21. Calcula $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{30}$

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

RAIZ N-ÉSIMA DE UN Nº COMPLEJO

La **raíz *n*-ésima** de un número complejo R_β tiene un módulo $r = \sqrt[n]{R}$ y un argumento $\alpha = \dfrac{\beta}{n}$.

Un número complejo, R_β, tiene n raíces n-ésimas. Todas ellas tienen el mismo módulo $r = \sqrt[n]{R}$. Sus argumentos son:

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{n},\ \alpha_2 = \frac{\beta}{n} + \frac{360^\circ}{n},\ \alpha_3 = \frac{\beta}{n} + \frac{360^\circ}{n}\cdot 2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \alpha_n = \frac{\beta}{n} + \frac{360^\circ}{n}\cdot(n-1)$$

Para $n > 2$, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen.

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

22. Representa las raíces cúbicas de 4i.

23. Resuelve $z^4 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} i\right) = 0$