Teoría Tema 1. Números Reales. Límites de Sucesiones

B2.C1.1. Reconoce los distintos tipos de números y opera y resuelve problemas con ellos.

1. Tipos de números

- **Naturales** (N): 0, 1, 2, …
- **Enteros** (Z): 0, 1, 2, … y -1,-2, -3, …
- **Racionales** (Q): Fracciones ($\frac{a}{b}$ $con\ a, b\epsilon R$)
- **Irracionales** (I): No se pueden poner como fracción ($\pi, e, \sqrt{p}\ con\ p\ primo, 0´12345\ldots, 0´102030\ldots$)
- **Reales** (R): Racionales (Q) e irracionales (I)

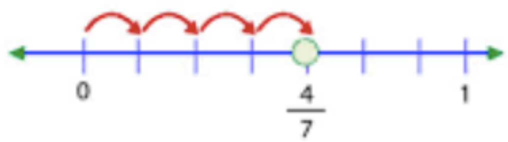
2. Tipos de decimales

- **Decimales exactos (Q):** $1´23$, $2´7$, $3{,}845$
- **Periódicos Puros (Q):** $1´666\ldots=1´\hat{6}$, $0´2323\ldots=0´\widehat{23}$
- **Periódicos Mixtos (Q):** $1´366\ldots=1´3\hat{6}$
- **Ni exactos ni periódicos (I -** Irracionales**)** $0´12345\ldots, 0´102030\ldots$

3. Representación de fracciones y decimales en la recta. (https://www.youtube.com/watch?v=UiJZwbqT06U)

__Fracciones:__ El denominador indica el nº de partes iguales en que dividir la unidad y el numerador las que coger.

Ej: 4/7



__Nº decimales:__ Pasarlos a fracción y representar

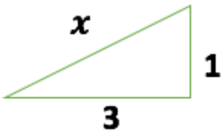
- D.Exacto $1´2 = \frac{12}{10}$, $1´23 = \frac{123}{100}$
- P.Puro $1´\hat{6} = \frac{16-1}{9}$, $1´\widehat{23} = \frac{123-1}{99}$
- P.Mixto $1´2\hat{6} = \frac{126-12}{90}$, $1´6\widehat{23} = \frac{1623-16}{990}$

__Nota:__ En la representación de fracciones, para dividir un segmento en partes iguales de forma exacta habría que usar el método de Thales. (**Vídeo:** https://www.youtube.com/watch?v=dqWRtHWI0-c)

4. Representación de __Irracionales del tipo $\sqrt{p}$__ en la recta. Si conseguimos expresar p como suma de dos cuadrados enteros, $p = a^2 + b^2$, entonces por el Teorema de Pitágoras, podremos usar un triángulo rectángulo de lados a y b para representar $\sqrt{p}$. **Vídeo:** https://www.youtube.com/watch?v=npHXAFgPrOQ

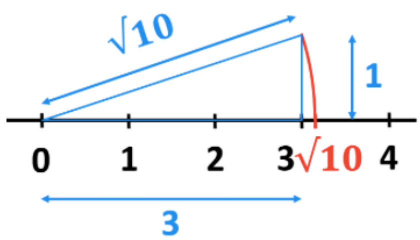
__Ejemplo 1__. Representación de $\sqrt{10}$

Como $10 = 3^2 + 1^2$, si aplicamos el T. Pitágoras



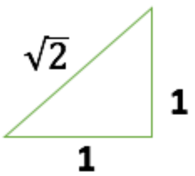
$x^2=3^2+1^2 \rightarrow x=\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

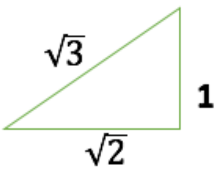
Por tanto, podemos usar ese triángulo sobre la recta para representarlo

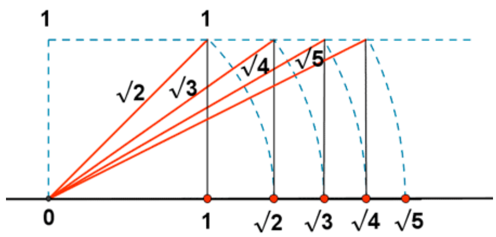


__Ejemplo 2__. Representación de $\sqrt{3}$

No podemos encontrar dos cuadrados enteros que sumen 3, pero sí que podemos expresar $3=(\sqrt{2})^2 + 1^2$. Por lo tanto, podemos representar $\sqrt{2}$ y utilizarlo como base de un triángulo rectángulo de altura 1 para representar $\sqrt{3}$







5. Aproximación y errores

- **Truncar a las décimas** (poner 0 desde las centésimas en adelante). Ej: 3,456 → 3,400
- **Redondear a las centésimas** (si la cifra siguientes es 5 o más subir una unidad a las centésimas y si es menor de 5 entonces truncar). Ej: 3,456 → 3,460
- **Error absoluto y error relativo**.

$E_a = |Valor_{aprox} - Valor_{real}|$; $E_r = \frac{E_a}{Valor_{real}}$

(https://www.youtube.com/watch?v=5cmpf8FNX2c)

6. Notación científica

Expresar un número en notación científica consiste en expresarlo como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Ejemplos:

a) 345678 = 3´45678 · 10^5 + -

b) 0,000345 = 3´45· 10^{-4}

c) 345´6· 10^5 = 3´456· 10^7

(https://drive.google.com/file/d/0B-02ZNYAUZ9CXzRvU29Bc0pJNHM/view

7. Propiedades de las potencias

1. $a^0=1$
2. Base negativa. $(-a)^{par}=a^{par}$; $(-a)^{impar}= - a^{impar}$
3. Exp. negativo. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
4. Misma base. $a^n \cdot a^m=a^{n+m}$; $a^n : a^m=a^{n-m}$
5. Mismo exponente. $a^n \cdot b^n=(ab)^n$; $a^n:b^n=(a/b)^n$
6. Potencia de una potencia. $(a^n)^m=a^{n \cdot m}$

8. Definición de radical

$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n$

(a radicando y n índice)

Observaciones:

- Si a<0, entonces $\sqrt[n]{a}$ sólo existe con n impar.
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

9. Propiedades de los radicales

1. $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
2. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
4. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

6. Suma de radicales

Descomponer radicandos y extraer factores

$\sqrt{50} + \sqrt{8} + \sqrt{12} =$

$\sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} =$

$5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=oQRf4lSIfY4&vl=es
Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=n4LBiSxHv94

10. Racionalizar (quitar raíces del denominador)

1. $\sqrt{a}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{a}$. (Ej: $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}$)

2. $\sqrt[n]{a^m}$ **en el denominador**. Multiplicar numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^b}$ con b lo que falta hasta n. (Ej: $\frac{3}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{7}$)

3. $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ **en el denominador**. Usar el conjugado. (Ej: $\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{7})}{-5}$)

https://www.youtube.com/watch?v=KTdBezXCjk0

B2.C3.1. Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ejercicios y problemas

11. Definición de Logaritmo

Si a>0 y a≠1, se llama logaritmo de base a de P, designándose $\log_a P$, al exponente al que hay que elevar a para obtener P. $$\boldsymbol{log_a P = x \leftrightarrow a^x = P}$$

Ejemplo: $\log_2 8 = 3$ (porque $2^3=8$) ; $\log_{10}10000=4$ (porque $10^4=10000$) // Notación: log=$\log_{10}$ y ln=$\log_e$

12. Propiedades de los logaritmos

1. $P \neq Q \rightarrow \log_a(P) \neq \log_a(Q)$ (si además a>1 entonces $P < Q \rightarrow \log_a(P) < \log_a(Q)$)
2. $\log_a 1=0$
3. $\log_a a=1$
4. $\log_a(P\cdot Q) = \log_a(P)+\log_a(Q)$
5. $\log_a(P/Q) = \log_a(P)-\log_a(Q)$
6. $\log_a(P^n)=n\cdot\log_a(P)$
7. $log_a(\sqrt[n]{P}) = \frac{log_a P}{n}$
8. Cambio de base. $log_a P = \frac{log_b P}{log_b a}$

Vídeo 1: https://www.youtube.com/watch?v=34zcIH6NQd4

Vídeo 2: https://www.youtube.com/watch?v=wdZ7Tl882vI

B2.C1.2. Intervalos. Inecuaciones.

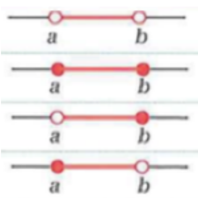
13. Intervalos

Abierto (a,b)=$\{x \in R: a < x < b\}$

Cerrado [a,b]= $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$

Semiabierto (a,b]= $\{x \in R: a < x \leq b\}$

[a,b)= $\{x \in R: a \leq x < b\}$



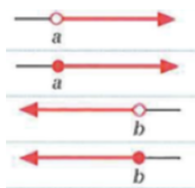
Semirectas

(a,∞)

[a, ∞)

(-∞,b)

(-∞,b]



Uniones e intersecciones de intervalos. (https://www.youtube.com/watch?v=RyTk9UoQU38)

14. Inecuaciones de grado 1

- Grado1. Las inecuaciones de 1º grado se resuelven de forma similar a las ecuaciones de 1º grado pero con la diferencia de que **cuando pasamos multiplicando o dividiendo un número negativo de un miembro a otro, la desigualdad cambia de sentido**. Suelen tener muchas soluciones.

Ejemplo: $\frac{-2x+3}{2} \geq 7 \rightarrow -2x+3 \geq 14 \rightarrow -2x \geq 11 \rightarrow x \leq \frac{11}{-2} \rightarrow x \leq -5'5 \rightarrow (-\infty, -5'5]$

- Grado 1 con valor absoluto.

$|z| < 5 \rightarrow -5 < z < 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 5 \rightarrow Estudiar -5 < \frac{x-2}{3} < 5$

$|z| \leq 5 \rightarrow -5 \leq z \leq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 5 \rightarrow Estudiar -5 \leq \frac{x-2}{3} \leq 5$

$|z| > 5 \rightarrow z < -5$ ó $z > 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| > 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} < -5\ ;\ \frac{x-2}{3} > 5$

$|z| \geq 5 \rightarrow z \leq -5$ ó $z \geq 5$ Ej: $\left|\frac{x-2}{3}\right| \geq 5 \rightarrow Estudiar\ \ la\ unión\ de\ \frac{x-2}{3} \leq -5\ ;\ \frac{x-2}{3} \geq 5$

15. Inecuaciones de grado >1

- 2º Grado (https://www.youtube.com/watch?v=uRlK2Omifsg)

Igualar a 0 la ecuación, sacar las soluciones, hacer una tabla con esas soluciones y estudiar el signo.

Ejemplo: $x^2-5x+6\leq 0$ → Resolver $x^2-5x+6=0$ → x=2 y x=3

2 3

$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
+	-	+

(Sustituimos x=0 → $0^2-5\cdot 0+6=6$ +) (Sustituimos x=2,5 → -) (Sustituimos x=4 → +)

Solución: como pone ≤ 0 → [2,3]

- Cociente de polinomios. Se hace de manera análoga al tipo anterior pero igualando numerador y denominador a 0. Con las soluciones obtenidas se hace la tabla con los signos. La solución nunca puede contener las soluciones del denominador.

Ejemplo: $\frac{x+1}{x^2-5x+6} > 0$ → Resolvemos x+1=0 y $x^2-5x+6=0$ → Soluciones: -1, 2 y 3

-1 2 3

$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
-	+	-	+

2 y 3 no pueden incluirse en la solución. Como pone >0 → $(-1,2)\cup(3,\infty)$

B2.C3.3. Reconoce sucesiones monótonas y acotadas y entiende el concepto de límite de una sucesión.

16. Límites de sucesiones

Dada la sucesión $a_n = \frac{P_n}{Q_n}$, queremos calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$

- Si Orden P_n > Orden Q_n → Tiende a $\pm\infty$. Para saber el signo sustituir por un nº grande para ver el signo.
- Si Orden P_n < Orden Q_n → Tiende a 0.
- Si Orden P_n = Orden Q_n → Tiende al cociente de los números que acompañan a los monomios de mayor grado.

Para P_n o Q_n , tendremos en cuenta el siguiente orden (grado en polinomios) de crecimiento de menor a mayor

$$\log(x) \approx \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \approx \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \approx x \approx x^2 \approx x^5 \approx 2^x \approx 7^x$$