2 Divisibilidad

ANTES DE COMENZAR LA UNIDAD...

Después del jueves…, otro jueves

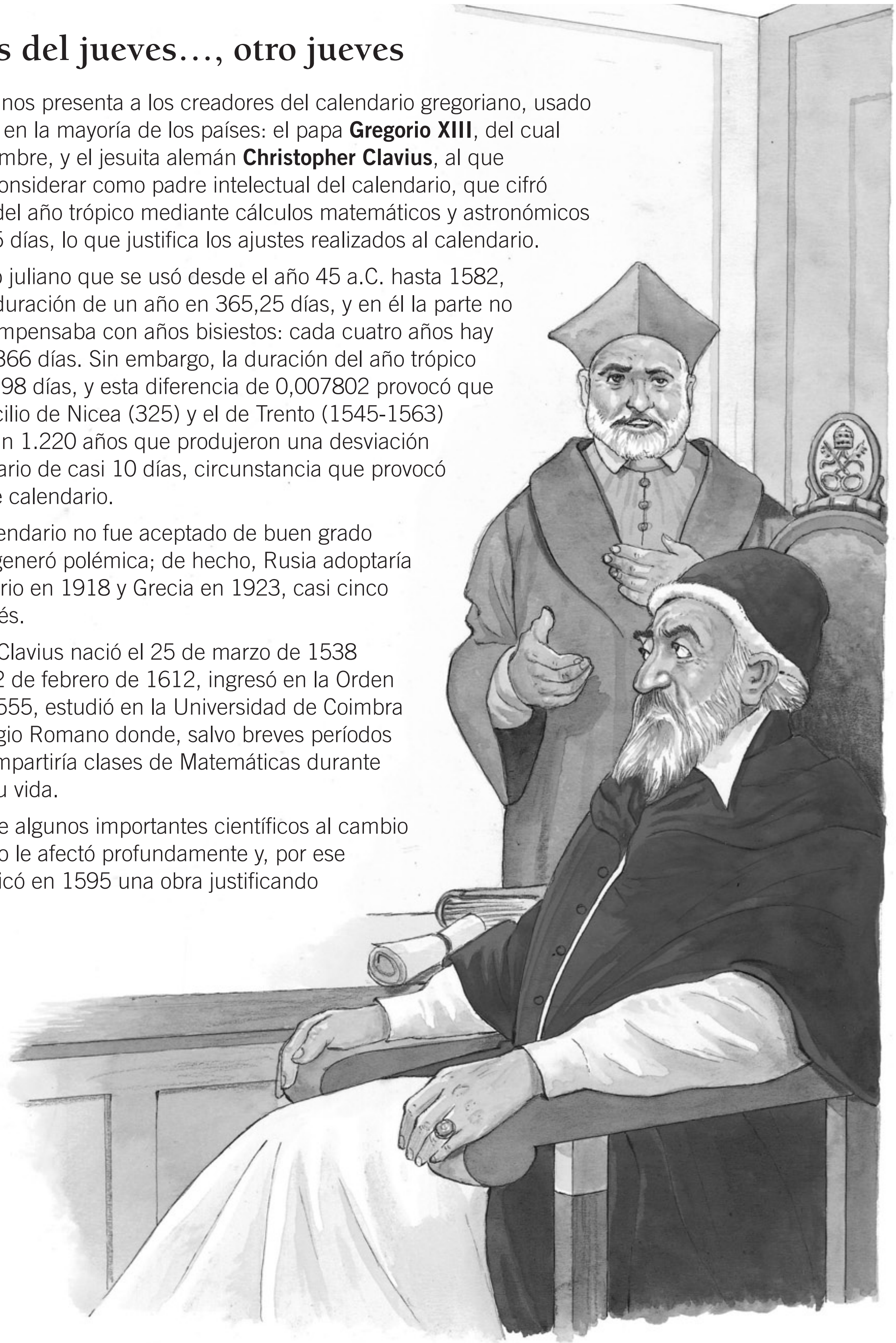
Esta historia nos presenta a los creadores del calendario gregoriano, usado actualmente en la mayoría de los países: el papa **Gregorio XIII**, del cual recibe su nombre, y el jesuita alemán **Christopher Clavius**, al que podríamos considerar como padre intelectual del calendario, que cifró la duración del año trópico mediante cálculos matemáticos y astronómicos en 365,2425 días, lo que justifica los ajustes realizados al calendario.

El calendario juliano que se usó desde el año 45 a.C. hasta 1582, marcaba la duración de un año en 365,25 días, y en él la parte no entera se compensaba con años bisiestos: cada cuatro años hay un año con 366 días. Sin embargo, la duración del año trópico es 365,242198 días, y esta diferencia de 0,007802 provocó que entre el concilio de Nicea (325) y el de Trento (1545-1563) transcurrieran 1.220 años que produjeron una desviación en el calendario de casi 10 días, circunstancia que provocó el cambio de calendario.

El nuevo calendario no fue aceptado de buen grado por todos y generó polémica; de hecho, Rusia adoptaría este calendario en 1918 y Grecia en 1923, casi cinco siglos después.

Christopher Clavius nació el 25 de marzo de 1538 y murió el 12 de febrero de 1612, ingresó en la Orden Jesuita en 1555, estudió en la Universidad de Coimbra y en el Collegio Romano donde, salvo breves períodos de tiempo, impartiría clases de Matemáticas durante el resto de su vida.

El rechazo de algunos importantes científicos al cambio de calendario le afectó profundamente y, por ese motivo, publicó en 1595 una obra justificando el cambio.



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Cigarras y números primos

Existe un tipo de cigarras, las cigarras periódicas, que tienen el ciclo vital más largo de todos los insectos. En especial, una de ellas, la *Magicicada septendecim* vive 17 años bajo tierra alimentándose de las raíces de los árboles, luego emerge a la superficie, pone los huevos y muere.

¿Por qué el ciclo vital de la cigarra es de esa forma? ¿Y por qué es un número primo de años?

Se cree que ese ciclo es un número primo para favorecer la supervivencia de la especie. Según algunas teorías, esta cigarra tiene un parásito con un cierto ciclo vital que la cigarra intenta evitar. Es decir, trata de no coincidir con él.

Imaginemos que el parásito vive 2 años, entonces la cigarra no puede vivir un número de años que sea divisible por 2, porque el parásito y la cigarra coincidirían regularmente y eso la perjudicaría. Lo mismo ocurriría si el parásito tuviera un ciclo vital de 3 años.

Así, para evitar encontrarse con su parásito, la cigarra alargó su ciclo vital, y, además, lo hizo un número primo para que las coincidencias fueran mínimas.

Como la cigarra vive 17 años, si el parásito vive 2 años, solo se encontrarían cada 34 años. Si el parásito viviera 3, se encontrarían cada 51 años.

El parásito, para contrarrestar esto, debería alargar también su ciclo vital, porque si no estaría muchos años sin poder parasitar a nadie. Ahora bien, debería estar 16 años sin alimento, lo cual es muy difícil.

El largo ciclo vital de las cigarras, y el que este sea un número primo, las protege de forma muy conveniente.

Evolución histórica de la divisibilidad

Los hindúes llegaron a conocer la divisibilidad por 3, 7 y 9, y los griegos y egipcios establecieron la clasificación de los números en pares e impares.

El matemático francés Blaise Pascal (siglo XVII) propuso las reglas para determinar la divisibilidad por cualquier número.

Euclides y Fermat

Euclides descubrió la infinitud de los números primos. Así, alcanzó su máximo desarrollo la teoría de números en Grecia.

Hasta el siglo XVII en que Fermat propuso sus teoremas (el último de ellos demostrado en la última década del siglo XX) no hubo más progresos en esta área.

2 Divisibilidad

CONTENIDOS PREVIOS

CONVIENE QUE...

Conozcas la diferencia entre **división exacta y entera**.

PORQUE...

Te servirá para identificar los múltiplos y divisores de un número.

Si en una división el resto es 0, se dice que es **exacta**.
En caso contrario, es **entera**.

DIVISIÓN EXACTA

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 0 & 4 \end{array}$$

DIVISIÓN ENTERA

$$\begin{array}{r|l} 17 & 2 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 1 & 8 \end{array}$$

CONVIENE QUE...

Repases qué son los **múltiplos de un número**.

PORQUE...

Lo necesitarás para comprender sus propiedades.

Un número es **MÚLTIPLO** de otro si la división del primero entre el segundo es exacta.

28 es múltiplo de 4, porque 28 : 4 es una división exacta.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 0 & 7 \end{array}$$

40 no es múltiplo de 7, porque 40 : 7 es una división entera.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 7 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 5 & 5 \end{array}$$

CONVIENE QUE...

Recuerdes lo que son los **divisores de un número**.

PORQUE...

Te servirá para establecer criterios de divisibilidad e identificar números primos y compuestos.

Un número es **DIVISOR** de otro si la división del segundo entre el primero es exacta.

4 es divisor de 28, porque 28 : 4 es una división exacta.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 0 & 7 \end{array}$$

7 no es divisor de 40, porque 40 : 7 es una división entera.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 7 \\ \cline{2-2} \text{Resto} \rightarrow 5 & 5 \end{array}$$

NOTACIÓN MATEMÁTICA

¿QUÉ SIGNIFICA? → **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$a : b$

$a : 5$

$9 : a$

Todas estas expresiones indican la **división de dos números**.

Para indicar la división exacta entre dos números naturales se utiliza el símbolo : aunque también se puede usar si la división es entera.

Cuando la división es entera se suelen poner los números en forma de fracción.

¿QUÉ SIGNIFICA? → **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

$\dot{a}$ Indica el **conjunto de todos los múltiplos de *a***.

$\dot{3}$ Indica el **conjunto de todos los múltiplos de 3**.

El conjunto de todos los múltiplos de un número se representa mediante ese número con un puntito encima de él.

¿QUÉ SIGNIFICA? → **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

Div (a) Indica el **conjunto de los divisores de un número *a***.

Div (9) Indica el **conjunto de los divisores de 9**.

El conjunto de todos los divisores de un número se representa mediante las letras Div seguidas de un espacio y el número entre paréntesis.

¿QUÉ SIGNIFICA? → **¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?**

D Indica el **dividendo** de una división.

d Indica el **divisor** de una división.

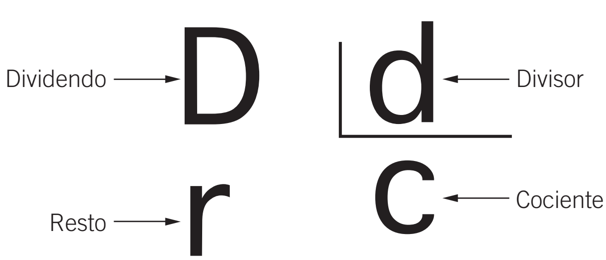
c Indica el **cociente** de una división.

r Indica el **resto** de una división.

En una división existen cuatro elementos: dividendo, divisor, cociente y resto.

Verifican que:

$D = d \cdot c + r$ y $r < d$



2 Divisibilidad

EN LA VIDA COTIDIANA... Criptografía y números primos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Reconocer la importancia de la criptografía y el criptoanálisis. • Utilizar el cifrado de César.
• Manejar el cifrado de César mejorado. • Utilizar los números primos en la criptografía.

1 La criptografía y el criptoanálisis

La criptografía es la ciencia que estudia la protección de la información con distintos métodos para impedir el acceso a la misma de personas no autorizadas.

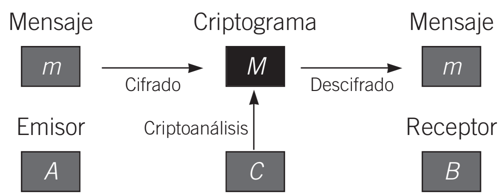
El criptoanálisis intenta averiguar los métodos anteriores para conseguir la información original.

La criptografía es tan antigua como la escritura. Se dice que las primeras civilizaciones que usaron la criptografía fueron la egipcia, la mesopotámica, la hindú y la china.

Hoy en día la criptografía es una disciplina de gran importancia: las comunicaciones de los gobiernos, entre las sedes de una empresa, en transacciones económicas, en el comercio por Internet, en las llamadas por teléfono móvil, necesitan estar protegidas para salvaguardar los intereses y la intimidad de las personas.

Los métodos criptográficos y de criptoanálisis actuales usan fórmulas muy complejas que aprovechan la enorme potencia de cálculo de los ordenadores.

El proceso suele ser el que ves en el gráfico. Un emisor *A* quiere mandar un mensaje *m* al receptor *B*. Para que un intruso *C* no pueda leerlo, *A* lo somete a un proceso de cifrado, consiguiendo un criptograma *M*, que es el que envía a *B*. Este, al recibirlo, lo somete a un proceso de descifrado, obteniendo el mensaje original, *m*. El criptoanálisis le serviría a *C*, si tiene éxito, para obtener el mensaje *m* a partir del criptograma *M*.



Vamos a estudiar a continuación uno de los métodos más famosos en la historia: el cifrado de César, creado por el gobernante romano Julio César.

2 El cifrado de César

El cifrado de César consiste en desplazar cada letra del alfabeto tres lugares. El texto que ciframos lo pondremos en minúscula y el criptograma obtenido en mayúsculas.

Observa la relación entre las letras:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P
ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	

Por ejemplo, «enemigo» al cifrarlo queda HPHOLJR, y al descifrar ORUD obtenemos «mora». Compruébalo.

RESUELVE LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Utilizando el cifrado de César, encripta estas frases.*
El examen es fácil. A las cinco en la plaza.

b) *Descifra el mensaje.*
HÑ HADOHP HV HÑ ÑXPHV

Una generalización sencilla de este método consiste en desplazar el alfabeto otro número distinto de 3 letras.

Así, si lo desplazamos 4 letras, entonces «enemigo» se traduce como IQIPMKS.

c) *Cifra las siguientes frases utilizando el cifrado de César generalizado según los desplazamientos* k *marcados para cada una de ellas.*

- k = *1. La bolsa subirá.*
- k = *2. Llegamos mañana.*

3 El cifrado de César mejorado

Una mejora del cifrado de César consiste en relacionar cada letra con otra, sin que haya un mismo desplazamiento para todas, eligiendo una combinación al azar. Este método se denomina sustitución monoalfabética.

Por ejemplo, si elegimos la relación:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
B	W	E	R	T	Y	U	I	O	P	C	S	D	F

ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
G	H	J	K	L	Z	X	A	V	Q	N	M	Ñ

la palabra «enemigo» sería TFTDOUH.

Este sistema es bastante seguro porque se pueden emplear unas 10^{28} relaciones distintas, tantas como reordenaciones del alfabeto se te ocurran, por lo que si alguien quisiera descifrar el texto, aunque conociera la técnica, no sabría qué reordenación se ha elegido.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Utilizando la relación estudiada, cifra estas frases.*
Vienen a las siete. Vende todo.

b) *Elige una reordenación del alfabeto y cifra las frases anteriores.*

A pesar de que este método parece muy seguro, basándonos en la frecuencia con que se repiten las letras en un idioma, y con la actual potencia de cálculo de los ordenadores, es posible descifrar los mensajes.

Date cuenta de que hasta ahora hemos visto métodos de cifrado y descifrado en los que tanto emisor como receptor conocen la forma de enviar y recibir mensajes, es decir, los métodos de cifrado y descifrado son comunes.

En la criptografía actual, sin embargo, no ocurre así: si queremos mandar un mensaje a alguien, sabremos cómo cifrarlo pero solamente el receptor sabrá cómo descifrarlo.

4 La utilidad de los números primos en criptografía

Los sistemas actuales de criptografía utilizan métodos numéricos muy complejos, con operaciones en las que se manejan números primos con gran cantidad de cifras.

Muchos matemáticos y científicos trabajan en métodos de cifrado y descifrado, y utilizan los números primos, ya que son la base ideal para un proceso de cifrado fácil y descifrado enormemente difícil.

Vamos a ver, a continuación, un método sencillo de cifrado en el que utilizaremos los números primos. Se requiere que tanto emisor como receptor conozcan cómo cifrar y descifrar mensajes.

A cada letra del alfabeto le haremos corresponder un número de dos cifras. La letra A la sustituiremos por 10, la B por 11 y así sucesivamente.

a/10	b/11	c/12	d/13	e/14	f/15	g/16
h/17	i/18	j/19	k/20	l/21	m/22	n/23
ñ/24	o/25	p/26	q/27	r/28	s/29	t/30
u/31	v/32	w/33	x/34	y/35	z/36	

El emisor aplica este método de cifrado: si el número correspondiente a la letra es primo, se deja como está, y si es compuesto, se le suma un número fijo, 30 en este caso.

a/40	b/11	c/42	d/13	e/44	f/45	g/46
h/17	i/48	j/19	k/50	l/51	m/52	n/23
ñ/54	o/55	p/56	q/57	r/58	s/29	t/60
u/31	v/62	w/63	x/64	y/65	z/66	

De este modo, la palabra «mates» sería 5240604429.

Para descifrar el mensaje hacemos grupos de dos cifras en los números y miramos la equivalencia en la tabla. Así, 17555140 29405840 descifrado es la frase «hola sara».

RESUELVE LAS ACTIVIDADES.

a) *Con el método anterior cifra estas frases.*
Ven mañana. Tengo frío.

b) *Descifra el texto.*
604844234429 573144 4429603113484058

c) *Inventa otro método para encriptar textos en el que utilices los números primos.*

2 Divisibilidad

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hacer una tabla

Estrategia	Hay ocasiones en las que, al considerar cada condición de un problema, interesa obtener una tabla con una serie de números. La solución será el número que está en todas las tablas y satisface las condiciones establecidas.

PROBLEMA RESUELTO

Una caja de bombones contiene menos de 100 bombones. Contados de 7 en 7 sobran 3, y contados de 11 en 11 sobra 1. ¿Cuántos bombones tiene la caja?

Planteamiento y resolución

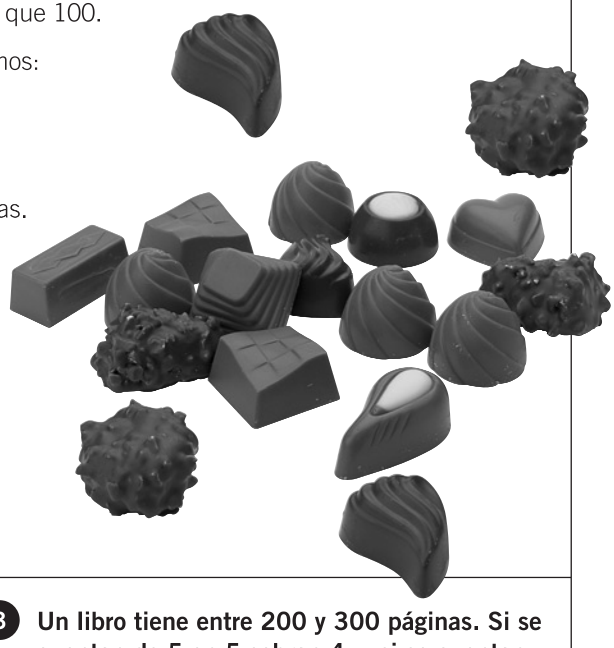
- 1.ª condición: Si contamos de 7 en 7, sobran 3. Hacemos: $(7 \cdot 1) + 3$; $(7 \cdot 2) + 3$; $(7 \cdot 3) + 3$... y obtenemos la tabla de números: {10, 17, 24, 31, 38, **45**, 52, 59, 66, 73, 80, 87 y 94}.
  No seguimos porque el número de bombones es menor que 100.
- 2.ª condición: Si contamos de 11 en 11, sobra 1. Hacemos:
  $(11 \cdot 1) + 1$; $(11 \cdot 2) + 1$; $(11 \cdot 3) + 1$...
  y así obtenemos la tabla de números:
  {12, 23, 34, **45**, 56, 67, 78 y 89}
  El número de bombones es 45, que está en las dos tablas.

Comprobación

Lo podemos comprobar efectuando estas divisiones.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 7 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 11 \\ \hline 1 & 4 \end{array}$$

Contados de 7 en 7 sobran 3 bombones, y contados de 11 en 11 sobra 1.



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. **Antonio le dijo a Ana: «Si agrupo mis llaveros en grupos de 11 me sobran 5, y si los agrupo en grupos de 23 me sobran 3. ¿Cuántos llaveros tengo si son menos de 50?».**

2. **Un pastor agrupaba a las ovejas de su rebaño de 5 en 5, y de 6 en 6, y siempre le sobraba una oveja; pero si las agrupaba de 7 en 7, todos los grupos quedaban con la misma cantidad de ovejas. ¿Cuántas ovejas tenía en total el rebaño si eran menos de 100?**

3. **Un libro tiene entre 200 y 300 páginas. Si se cuentan de 5 en 5 sobran 4, y si se cuentan de 7 en 7 sobran 6. ¿Cuántas páginas puede tener el libro? Si al contarlas de 2 en 2 sobra 1 página, ¿se puede conocer el número de páginas del libro? ¿Y si, además, al contarlas de 3 en 3 sobran 2 páginas?**

   Indica las posibilidades existentes.

   Calcula el número de páginas que tiene el libro que cumple todas las condiciones establecidas.

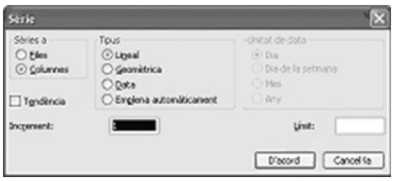
MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

Unidad02_1a

Hoja

	A	B
1	**Divisores de →**	**28**
2	**Nombre**	**Divisor**
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	

Contenido



Llenar Series

	A	B	C	D	E
1	**Cálculo del m.c.d. y del m.c.m.**				
2	**de diferentes números**				
3	Número1º	Número2º	Número3º	m.c.d.	m.c.m.
4	16	24			
5	45	72			
6					
7					
8					

Contenido

PRÁCTICA EXCEL

PRÁCTICA 1 (ejercicio 57 a), pág. 49)

Abre el libro **NUMEROS_1** e inserta la hoja: Unidad02_1a.

1. Escribe los rótulos y los datos de las celdas A1, A2, B1 y B2 como se ve en la figura adjunta.
2. Escribe 1 en la celda A3; selecciona tantas celdas como quieras de la misma columna (A4, A5, …, A30) y con la opción:

   Edición → Rellenar → Series...

   completa las celdas A4:A30 con los valores de una serie creciente que comienza en 1 y que tiene un incremento de 1 en 1; o sea, la serie de los números naturales hasta el 28.
3. En la celda B3 escribe la fórmula:

   fx =SI($B$1/A3=ENTERO($B$1/A3);"si";"no")

   Si el resultado de dividir el número de la celda B1 (28) entre el número de la celda A3 es un número entero, significará que el número de A3 (1) es divisor del número B1 y aparecerá **sí** en B3; si el resultado es un número decimal, se escribirá **no**.
4. Copia la fórmula en las celdas B4, B5, etc. (los signos $ hacen que la referencia a la celda B1 no cambie, y que en la celda B4 se copie fx =SI($B$1/A4=ENTERO($B$1/A4);"si";"no") , en la celda B5 se modifique automáticamente con A5, etc.).
5. Observa en qué celdas aparece un si y razona qué significa. Después, escribe en la libreta todos los divisores del número 28.

PRÁCTICA 2 (ejercicio 92, pág. 51)

Inserta la hoja Unidad03_2a.

1. Escribe los rótulos tal como se ve en la figura del margen.
2. Escribe los números 16 y 24 en las celdas A4 y B4, así como el resto de números del ejercicio.
3. En la celda D4 escribe la fórmula: fx =M.C.D(A4;B4) y obtendrás el m.c.d. de los dos números.
4. Copia la fórmula en las celdas D5, D6, etc. para completar el ejercicio.

EJERCICIOS

1. **APLICA:** De manera análoga a como has hecho en la Práctica 1, y en la misma hoja de cálculo, resuelve los apartados b), c) y d) del ejercicio 57. En cada caso, decide hasta qué número llegará la serie de los números naturales.
2. Crea la hoja Unidad02_3a para resolver el ejercicio 41 de la página 48.
3. **PRACTICA:** Calcula el m.c.m. de los números del ejercicio 92 de la página 51. Para calcular el m.c.m. has de utilizar la fórmula fx **=M.C.M( )**.
4. **APLICA:** En la misma hoja, resuelve los ejercicios 93, 94, 96 y 97 de la página 51.

   Guarda el libro con Archivo → Guardar.