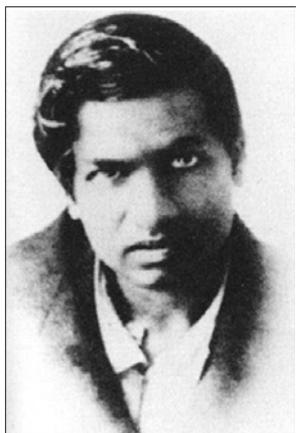


1 Números naturales

ANTES DE COMENZAR LA UNIDAD...

Los cuatro cuatros



Para introducir el estudio de los números naturales, contamos esta historia que bien pudo ser cierta. Situamos a su protagonista, el matemático hindú **Srinivasa Ramanujan**, en su niñez, entreteniéndolo a sus hermanos con un juego de habilidad numérica.

Ramanujan nació el 22 de diciembre de 1887 en una familia humilde. Su historia solo se entiende en el contexto de la India de finales del siglo XIX y principios del XX, donde la cultura no era un derecho sino un privilegio. Ramanujan asistió a la escuela pública gracias a una beca y sintió gran interés por los números y las fórmulas matemáticas.

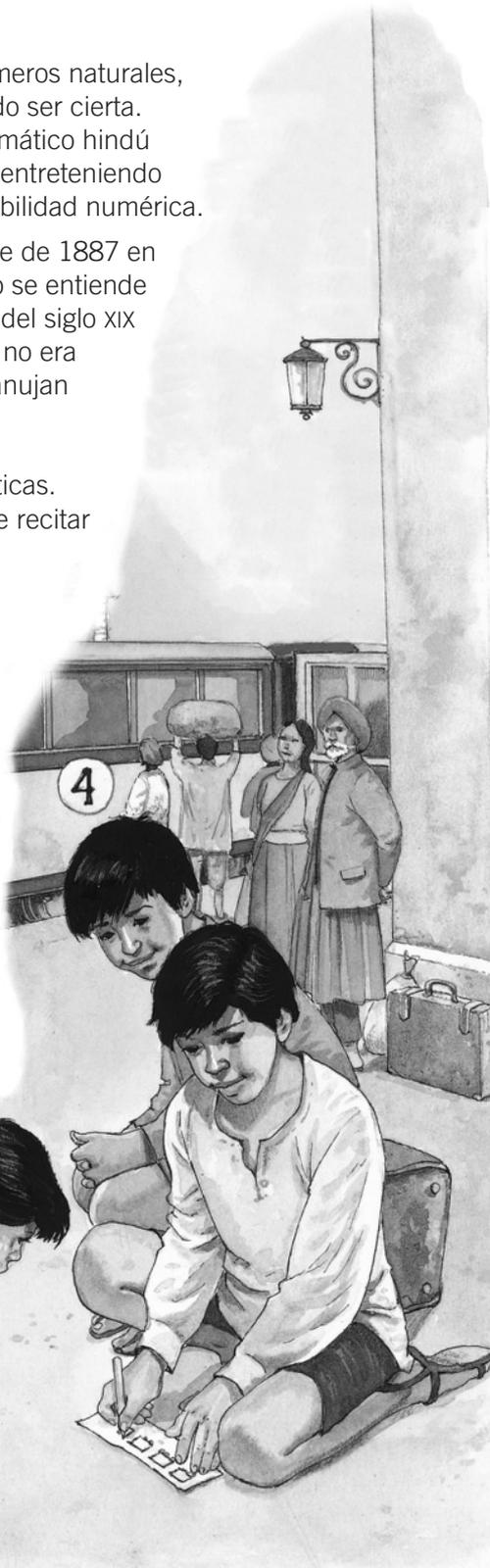
Con menos de 12 años era capaz de recitar

a sus compañeros cientos de cifras decimales del número π y multitud de fórmulas matemáticas.

Su formación matemática fue muy básica, se limitó a los conocimientos escolares y al estudio de un libro con 6.000 teoremas, en el que no estaban incluidas sus demostraciones, y que le prestaron cuando tenía 15 años. Probablemente por este motivo sus aportaciones matemáticas no son excesivamente rigurosas, se limitan a simples anotaciones sin demostración alguna. Aun así, la audacia de sus trabajos, muchos de ellos todavía sin demostrar, lo han convertido en uno de los matemáticos más brillantes de su época.

En 1903 y 1907 suspendió los exámenes universitarios y comenzó a trabajar como contable en Madrás por un modesto salario. Animado por sus amigos decidió comunicar sus investigaciones y obtuvo el reconocimiento de Hardy, que era el matemático más prestigioso de Inglaterra, y posteriormente, del resto de la comunidad científica.

Fue invitado a residir y trabajar en Inglaterra, adonde partió en el año 1914. En 1919, sin haber podido saborear las mieles de la gloria regresó a la India, donde murió de tuberculosis el 26 de abril de 1920.



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Sistemas de medida



El sistema de medida más extendido en el mundo es el Sistema Métrico Decimal, que sirve para medir las magnitudes que nos rodean, y cuya unidad de longitud, el metro, es apropiada a la altura de nuestro cuerpo.

Un sistema de medidas debe ser adecuado a las magnitudes que queremos medir y al entorno que nos rodea. Hagamos ahora un ejercicio de imaginación y supongamos unos seres inteligentes y de un tamaño medio de $2 \cdot 10^{-12}$ metros. ¿Qué unidad de medida de longitud utilizarían y cuáles serían en su unidad nuestras distancias habituales?

Parece lógico entonces que utilizaran una unidad, que llamaremos «mini» en lo sucesivo, cuya equivalencia con el metro fuera: $1 \text{ mini} = 10^{-12}$ metros. Con esa unidad, una persona de 1,70 metros de altura mediría 1,7 billones de minis ($1,7 \cdot 10^{12}$).

Asimismo, una caminata en la que una persona recorriera 4 kilómetros, medida en minis, sería: $4 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} = 4 \cdot 10^{15}$ minis. Y dos ciudades distantes entre sí 300 km, estarían a la distancia de $300 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} = 3 \cdot 10^{17}$ minis.

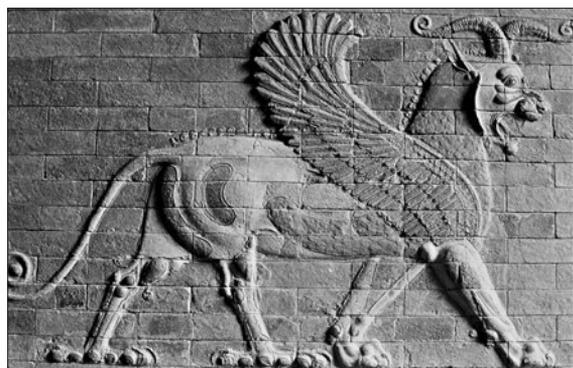
Además, para medir distancias para las que nosotros usamos los múltiplos del metro, ellos tendrían que utilizar una unidad mucho mayor que el mini (como a nosotros nos ocurre con las distancias estelares).

Evolución histórica de la potencia

Los babilonios usaban la elevación a potencia como operación auxiliar de la multiplicación, mientras que los griegos utilizaban los cuadrados.

Por su parte, Diofanto (siglo III d.C.) ideó la notación: x , xx , xxx ... para expresar la primera, segunda y tercera potencias de x .

Finalmente, Descartes introdujo en el siglo XVII la notación moderna: x , x^2 , x^3 ...



Los pitagóricos

No se sabe quién descubrió los números irracionales, pero los pitagóricos, a finales del siglo V a.C., conocían la condición de irracionalidad de $\sqrt{2}$ (números inconmensurables).



1 Números naturales

CONTENIDOS PREVIOS

CONVIENE QUE...

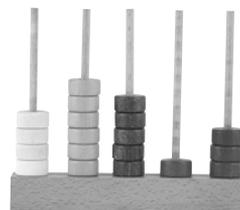
Recuerdes cómo se hace la **descomposición de un número** en sus distintos órdenes de unidades.

PORQUE...

Te ayudará a obtener la descomposición polinómica de un número.

$$46.513 = 4 \text{ DM } 6 \text{ UM } 5 \text{ C } 1 \text{ D } 3 \text{ U}$$

DM	UM	C	D	U
4	6	5	1	3



CONVIENE QUE...

Sepas **operar con** expresiones numéricas con **paréntesis**.

PORQUE...

Lo necesitarás para resolver operaciones combinadas.

$$\begin{array}{r} 3 \cdot (5 - 4) + (3 \cdot 8) - 3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 3 \cdot 1 + 24 - 3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 3 + 21 \\ \downarrow \\ 24 \end{array}$$

CONVIENE QUE...

Repases qué es una **potencia**.

PORQUE...

Te servirá para comprender las propiedades de las potencias.

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$
$$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

CONVIENE QUE...

Conozcas lo que es una **raíz cuadrada**.

PORQUE...

Aprenderás a calcular raíces cuadradas exactas y enteras.

$$\sqrt{4} = 2, \text{ porque } 2^2 = 4.$$
$$6^2 = 36, \text{ entonces } \sqrt{36} = 6.$$

NOTACIÓN MATEMÁTICA

<p>¿QUÉ SIGNIFICA? -----></p> <p>$a + b$ Indica la suma de dos números naturales.</p> <p>$a > b$ Señala una relación entre dos números naturales. El primero, a, es mayor que el segundo, b.</p> <p>$a < b$ Indica una relación entre dos números naturales. El primero, a, es menor que el segundo, b.</p>	<p>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</p> <p>Los números naturales se representan mediante letras minúsculas. Se suelen utilizar las letras a, b, c, \dots, aunque se puede tomar cualquier letra del abecedario.</p> <p>A veces, cuando nos referimos a un número que no conocemos y que queremos hallar, lo designamos por x, y, z, \dots</p>
<p>¿QUÉ SIGNIFICA? -----></p> <p>$12 \cdot 7$ Señala el producto de dos números.</p> <p>12×7 Se refiere al producto de dos números o las dimensiones de un rectángulo (12 unidades de ancho por 7 unidades de largo).</p>	<p>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</p> <p>El producto de dos números se indica por un punto (\cdot). Aunque también se puede representar por el símbolo \times, este se usa para especificar las dimensiones de un rectángulo.</p>
<p>¿QUÉ SIGNIFICA? -----></p> <p>$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$ Indican la expresión de una potencia en forma de producto.</p>	<p>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</p> <p>Los puntos suspensivos entre los dos signos de multiplicación significan que a se multiplica n veces.</p>
<p>¿QUÉ SIGNIFICA? -----></p> <p>$a = \sqrt{b}$ El número a es la raíz cuadrada del número b.</p>	<p>¿CÓMO LO ESCRIBIMOS?</p> <p>En esta expresión, b es un cuadrado perfecto y, por tanto, a es un número natural.</p>

1 Números naturales

EN LA VIDA COTIDIANA... Códigos numéricos

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

- Utilizar códigos para llamar por teléfono. • Reconocer el ISBN como el código internacional del libro.
- Observar la utilización de los códigos en las matrículas de los coches. • Crear códigos numéricos propios.

1 Los números de teléfono

Una de las utilidades de los números naturales es transmitir información en forma de códigos. Hay códigos numéricos que utilizamos constantemente, como, por ejemplo, los números de teléfono.

En España, desde 1998 todos los números de teléfonos fijos, salvo los números especiales, tienen nueve cifras y empiezan por 9. Asimismo, están formados por un prefijo de 2 o 3 cifras y el número de cada abonado.

Si llamamos desde el extranjero tenemos que añadir el número 34 al principio del número del abonado.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) Imagina que quieres llamar desde el extranjero a una persona de Burgos cuyo número de abonado es 11 11 11. ¿Qué código tienes que marcar si el prefijo de Burgos es 947?

b) Sabiendo que el prefijo de Cuenca es 969, ¿cuáles de estos códigos telefónicos no son correctos?

969238769 9691345976 960123444
34969111943 349698842323



2 El ISBN

Observando cualquier libro, vemos que en la cubierta aparecen las letras ISBN seguidas de un grupo de números. El ISBN es el número con el que quedan catalogados los libros. Está formado por 10 dígitos, divididos en cuatro grupos y separados por guiones:

$$84 - 294 - 6411 - 5$$

El primer grupo es el identificador del país; en este caso, 84, que corresponde a España. El segundo grupo, 294, es el identificador de la editorial que ha realizado el libro, la Editorial Santillana.

El tercer grupo, de 4 cifras, 6411, es el correspondiente al libro que lleva el código.

El cuarto grupo, de 1 cifra, es el dígito de control, y sirve para comprobar si el resto de grupos es correcto.

El dígito de control se obtiene de esta forma.

1.º Cada número tiene una posición. Al número que ocupa la primera posición, 8, lo multiplicamos por 10; al segundo, 4, lo multiplicamos por 9, y a los siguientes por 8, 7...

En el ejemplo:

$$8 \cdot 10 = 80; 4 \cdot 9 = 36; 2 \cdot 8 = 16; \\ 9 \cdot 7 = 63; 4 \cdot 6 = 24; 6 \cdot 5 = 30; 4 \cdot 4 = 16; \\ 1 \cdot 3 = 3; 1 \cdot 2 = 2$$

2.º Sumamos los productos anteriores:

$$80 + 36 + 16 + \dots + 16 + 3 + 2 = 270$$

3.º Calculamos el resto de dividir esa suma entre 11:

$$270 = 11 \cdot 24 + 6; \text{resto: } 6$$

4.º Restamos a 11 el resto obtenido:

$$11 - 6 = 5. \text{ El dígito es } 5.$$

Este número se corresponde con el dígito que teníamos. En el caso de que el resultado obtenido en el paso 4.º sea 10, el dígito de control pasa a ser la letra X.

Comprueba si los siguientes ISBN son correctos o no. Si no lo son, corrige el dígito de control.

2-7118-3008-9 0-7141-1134-3
84-294-6213-9 84-294-6736-X

3 Las matrículas

Otro de los códigos más comunes son los números que identifican los coches, es decir, la matrícula.

El actual sistema de matrículas utilizado en España es similar al de otros países de la Unión Europea. El tamaño de la matrícula es de 52×11 cm e incluye la letra E de España sobre la bandera de la Unión Europea, más una combinación de cuatro números (de 0000 a 9999) y tres letras (comenzaron por BBB y terminarán en ZZZ). Cuando se acaban los números para una combinación de letras, se pasa a la siguiente.

En este sistema se excluyen las vocales, las letras LL, CH (incompatibles con el diseño, que no admite cuatro letras en el último grupo), y Ñ y Q, por confundirse con la N y con la O y el número 0, respectivamente.

4 Otros códigos numéricos

Existen códigos numéricos que a veces tenemos que crear nosotros mismos: por ejemplo, el PIN del teléfono móvil, el número secreto de una tarjeta de crédito, etc.

Para evitar que se nos olviden utilizamos una combinación de números que tengan algún significado para nosotros, aunque hay que tener cuidado de que este no sea muy obvio para evitar que sean usados de manera fraudulenta.

Observa el siguiente ejemplo de código numérico para los alumnos de una clase de 1.º ESO:

13 - 07 - 1

El primer grupo de cifras por la izquierda indica la edad del alumno, en este caso 13. El siguiente grupo señala la nota media obtenida en Matemáticas en el curso anterior, un 7, y el tercero, el sexo del alumno, 1 si es una chica y 2 si es un chico. Así, el alumno representado por este código es una chica de 13 años que sacó un 7 de nota media el año pasado.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) Describe el alumno representado por cada uno de estos códigos, según el modelo del ejemplo.

13-05-2 14-06-1
13-09-2 13-07-1

b) Indica por qué estos códigos no son correctos.

23-05-1 13-13-2
13-07-3 13-4-1

c) El método utilizado para representar a los alumnos, ¿asocia a cada alumno un único código?

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) ¿Cuál fue la primera matrícula del sistema actual? ¿Y la segunda? ¿Y la tercera? ¿Cuáles serán la penúltima y última matrículas con este sistema?

b) Observa estas matrículas y señala las que son falsas.
E 0008 ABB E 10001 BTT E 2345 ZZZ
E 4587 ZÑA E 11224 CCC E 0000 CXZ

c) Inventa otro sistema de matriculación.



d) ¿Pueden existir dos chicas que tengan el mismo código? ¿Y dos chicos? ¿Y una chica y un chico?

e) Si añadimos al código un nuevo grupo de números a la derecha con los números 0 (si tiene el pelo moreno), 1 (rubio) y 2 (pelirrojo), describe a los alumnos representados por estos códigos.

13-06-2-2 13-08-1-1
13-07-1-0 13-09-2-1



1 Números naturales

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Método de ensayo y error

Estrategia El método de ensayo y error consiste en aplicar las condiciones del enunciado a un posible resultado, operación o propiedad, hasta encontrar el objetivo o comprobar que este no es posible. Aunque en estos problemas se suele empezar eligiendo los valores al azar, después de los primeros ensayos los valores no se eligen así, sino que se tienen en cuenta los ensayos realizados.

PROBLEMA RESUELTO

El producto de tres números naturales consecutivos es 2.730.
¿Cuáles son dichos números?

Planteamiento y resolución

Escribimos la serie de números naturales y vamos probando ordenadamente con cada terna de números consecutivos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

$$0 \cdot 1 \cdot 2 = 0; \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24; \quad 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \dots$$

Como resultan números muy inferiores a 2.730, probamos, por ejemplo, con la terna 14, 15 y 16.

$$14 \cdot 15 \cdot 16 = 3.360$$

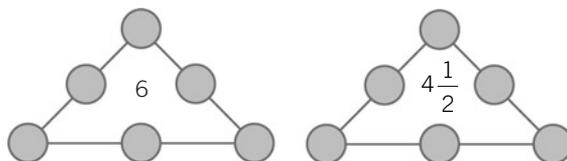
Vemos que nos hemos pasado, y probamos con la terna anterior, es decir, con 13, 14 y 15.

$$13 \cdot 14 \cdot 15 = 2.730$$

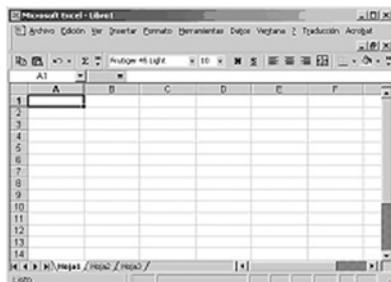
Los tres números naturales cuyo producto es igual a 2.730 son 13, 14 y 15.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1 El producto de tres números pares consecutivos es 1.680. ¿Cuáles son dichos números?
- 2 Al multiplicar tres números impares consecutivos, y dividir este resultado por su suma, el cociente obtenido es 15. ¿Cuáles son estos números?
- 3 Al sumar tres múltiplos consecutivos de 3 y dividir este resultado entre 6, el cociente es 12. ¿Cuáles son los tres múltiplos?
- 4 Coloca en cada círculo los números 1, 2, 3, 1, 3, 6, de tal forma que la suma de los números de cada lado del triángulo sea igual al número del centro.



MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR



Pantalla inicial de EXCEL

	A	B	C
1			
2			
3		Matemáticas	
4			
5			
6			

Parte de una hoja



Ayuda del programa

PRÁCTICA EXCEL

Entrada al Programa:

Menú Inicio → Programas → Microsoft Excel

Una vez que el programa se ejecuta, en el monitor verás la pantalla del margen.

Es un **libro de trabajo** formado por 3 hojas: Hoja1; Hoja2 y Hoja3, aunque puede haber hasta 256 hojas en un libro.

Libro → Carpeta que puede contener hojas, gráficos, macros, etc.

Hoja → Pizarra «ordenada» en celdas (cada celda está ordenada por su fila y columna) que contienen datos numéricos, texto, etc.

Celda → Contiene dos informaciones:

- El formato de la celda: consiste en el tipo de dato que puede contener: numérico, de texto, lógico, fechas, etc.
- El contenido.

Observa en el margen una hoja que tiene escrita la palabra «Matemáticas» en la celda B3 (columna B, fila 3); el **contenido** de la celda es la palabra «Matemáticas» y el **formato** es el tipo **Texto**.

EXCEL trabaja con estas dos informaciones por separado; por ejemplo, puedes borrar el contenido de una celda y mantener el formato, o copiar solo el formato de una celda a otra sin copiar el contenido.

Cuando se sale del programa se indica el nombre del archivo. La extensión la da el mismo programa y es XLS.

PRÁCTICA

Abre un libro nuevo. La información que da EXCEL como ayuda es muy completa y permite tener una visión genérica de qué es un hoja de cálculo y cómo se puede utilizar. Pulsa el botón ? (ayuda) de la barra de menús o pulsa directamente la tecla **F1**. En la ventana que sale, pulsa sobre **Buscar** y escribe, por ejemplo, *tipos de formato* y observa que vuelve a salir una nueva ventana de ayuda. A través de este tipo de desarrollo, el programa te proporcionará formas de uso o sugerencias sobre un tema determinado.

EJERCICIOS

- 1 Busca información sobre estos conceptos básicos utilizando el auxiliar de Office, y contesta a las siguientes cuestiones.

Hoja de cálculo | Libros y hojas de trabajo

- a) ¿Qué es un libro de trabajo?
- b) ¿Y una etiqueta de hoja?

- 2 Busca información al respecto.

Fórmulas | Cálculos rápidos en una hoja de cálculo

- a) ¿Qué es una fórmula?
- b) ¿Cómo se crea una fórmula?

- 3 Busca información al respecto.

Barra de herramientas | Mostrar u ocultar

- a) ¿Qué es una barra de herramientas flotante?
- b) ¿Cómo se oculta?

1 Números naturales

MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

PRÁCTICA EXCEL

Abre el programa EXCEL y observa, en la parte superior de la pantalla, las barras de herramientas que existen para acceder a los diferentes menús:



- Contiene los comandos más importantes para realizar operaciones con la hoja o con los datos de la hoja.
- Para acceder a las opciones que ofrece, pulsa sobre la opción con el botón de la izquierda del ratón o pulsa simultáneamente la tecla **ALT** y la tecla subrayada en la opción (A para **A**rchivo, E para **E**dición, etc.).
- Cada una de estas opciones da lugar, a su vez, a una serie de comandos; por ejemplo con **ALT** + E se despliegan los comandos de **Edición** (para las opciones de eliminar, buscar, etc.) y con **CTRL** + F los de **Formato** (que permite cambiar el formato de celdas, filas, etc.).

En el menú **Herramientas** → **Personalizar...** encontramos herramientas, alguna de las cuales se pueden activar en la barra correspondiente (obsérvalo en el margen).

Una barra que siempre está activada o visible es la barra **Estándar**.



Esta barra contiene comandos, entre otros, de la barra **Archivo**. Cada uno de los iconos de la barra Estándar es un comando diferente. Para saber la función de cada comando, acércate con el **Apuntador** y observa el rótulo que aparece debajo del icono con su descripción; hazlo con el octavo icono y te indicará *Vista preliminar*, tal como puedes ver en el margen.

La barra **Formato** contiene formatos de control del tipo de letra, el estilo, el tamaño, la alineación del texto, etc.



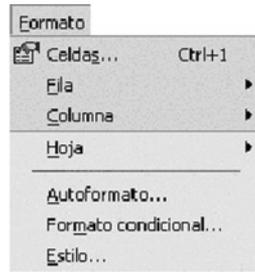
La **barra de fórmulas** permite introducir y ver fórmulas en las celdas.



La **barra de estado**, situada al final de la hoja, señala, como puedes ver en el margen, la acción que se está ejecutando cuando se introduce una fórmula.



Comandos de Edición



Comandos de Formato



Barras de herramientas



Barra de estado

EJERCICIOS

- 1 Introduce en la celda B1 tu nombre y apellidos en letra arial, negrita y de tamaño 12.
- 2 Crea una carpeta personal con tu nombre en el disco duro del ordenador o en un disquete.
- 3 Guarda el libro, para registrar los datos introducidos en la hoja, en tu carpeta personal con el siguiente nombre: Excel_Unidad0.

MATEMÁTICAS EN EL ORDENADOR

Unidad01_1a

Nombre de la Hoja

	A	B	C	D
1	Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
2	173	3		
3	267	4		
4	1329	9		
5				

Contenido



Función Cociente

PRÁCTICA EXCEL

PRÁCTICA 1 (ejercicio 62, pág. 30)

Abre un libro de trabajo EXCEL y guárdalo cuando acabes la Práctica en tu carpeta personal con el nombre **NUMEROS_1**.

Pulsa sobre la pestaña **Hoja1** con el botón derecho del ratón y cambia el nombre de esta Hoja por **Unidad01_1a** (obsérvalo al margen).

- Escribe las etiquetas: dividendo, divisor, cociente... de las celdas A1 a D1.
- Con el botón izquierdo del ratón, selecciona las columnas de la A a la D, y modificalas con el ratón en la intersección de dos de las columnas hasta que veas las etiquetas, por ejemplo, con un ancho de 12.00: **Ancho: 12.00 (89 píxeles)**.
- Introduce los números del ejercicio en las celdas: 173, 3...
- Selecciona con el ratón la celda C2. A partir de las dos ventanas de Diálogo que se ven en el margen, escribe la fórmula siguiente: **=cociente(A2/B2)** para encontrar el cociente de 173 y 3; también puedes escribir las fórmulas con el botón de función **f_x**. Observa que aparece en la celda el cociente **entero**.
- Para copiar esta fórmula en las celdas C3 a C5:
 - Sítuate en la celda C2 y activa **Edición** → **Copiar** (o pulsa el botón **Copiar** o las teclas CTRL-C).
 - Selecciona con el ratón las celdas C3 a C5 y activa **Edición** → **Pegar** (o pulsa el botón **Pegar** o las teclas CTRL-V).

Sítuate en la celda C3 y observa que la fórmula que ves es A3/B3; y en C4, B4/C4, etc. Fíjate en que se ha copiado la referencia de la celda A2 y no su contenido.
- Escribe la fórmula siguiente en la celda E2: **=A2-B2*C2**.
- Copia esta fórmula en las celdas D3, D4 y D5 para hallar el resto.
- Copia los resultados en tu cuaderno.

EJERCICIOS

- 1 APLICA:** Continúa la tabla escribiendo los números siguientes.

Columna A	...	40	80	120	160	200
Columna B	...	6	10	15	21	28

¿Hay algún resultado que dé resto 0?
¿Qué significa?

- 2** En la misma hoja de cálculo, haz el ejercicio 63 de la página 30.

- 3 FINAL**

Guarda el libro con los datos introducidos en la hoja de cálculo con **Archivo** → **Guardar como...** y nómbralo NUMEROS_1.