

# 3° ESO

## ACADÉMICAS

**CUADERNILLO DE TRABAJO**

Nombre: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

# MATEMÁTICAS



## Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Está permitido copiar y fotocopiar esta obra, total o parcialmente, con el objetivo de que sea accesible para el alumnado.

-  **Reconocimiento (Attribution):** En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.
-  **No Comercial (Non commercial):** La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.
-  **Compartir Igual (Share alike):** La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas



**Reconocimiento – NoComercial – SinObraDerivada (by-nc-nd):** No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

**Profesor:**

.....

### **Materiales utilizados:**

Ejercicios y problemas diseñados por Daniel Hernández (IES Melchor de Macanaz)  
Material Creative Commons “Matemáticas 3º de ESO” ([www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es))  
Algunos problemas de <http://selectividad.intergranada.com>



**RESULTADOS DE LAS UNIDADES DEL CURSO**  
Departamento de Matemáticas – IES Melchor de Macanaz



## UNIDADES DEL CURSO:

### UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 2. PROBLEMAS ARITMÉTICOS.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 3. SUCESIONES.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 4. LENGUAJE ALGEBRAICO. POLINOMIOS.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### UNIDAD 5. ECUACIONES Y SISTEMAS.

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### **UNIDAD 6. FUNCIONES.**

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### **UNIDAD 7. LUGARES GEOMÉTRICOS. POLÍGONOS. SEMEJANZA. CUERPOS GEOMÉTRICOS.**

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### **UNIDAD 8. TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS.**

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			

### **UNIDAD 9. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD.**

<b>PARTICIPACIÓN</b>		<b>CUADERNO TRABAJOS</b>		<b>Comentario:</b>	Nota Unidad
<b>INFORMÁTICA</b>		<b>EXAMEN</b>			





## UNIDAD 1. NÚMEROS REALES

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

- B2.C1.5.** Opera con números enteros, decimales y fraccionarios respetando la jerarquía de las operaciones
- B2.C1.1.** Reconoce los distintos tipos de números, los sabe representar y los emplea para la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- B2.C1.2.** Distingue los tipos de decimales. Sabe pasar de fracción a decimal y a la inversa obteniendo su fracción generatriz.
- B2.C1.3.** Expresa números en notación científica, opera con ellos y los utiliza en problemas.
- B2.C1.4.** Aproximaciones y errores.
- B2.C2.1.** Potencias y raíces

Resumen del tema:

### 1. MCM y MCD. Descomponer factorialmente.

- **MCM.** Tomar comunes y no comunes al mayor exponente.

- **MCD.** Tomar comunes al menor exponente.

Ejemplo:  $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow \text{MCM} = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$36 = 2 \cdot 3^2 \rightarrow \text{MCD} = 2 \cdot 3$

### 3. Tipos de números

- **Naturales (N):** 0, 1, 2, ...

- **Enteros (Z):** 0, 1, 2, ... y -1, -2, -3, ...

- **Racionales (Q):** Fracciones ( $\frac{a}{b}$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ )

- **Irracionales (I):** No pueden ponerse en fracción ( $\pi, e, \sqrt{p}$  con  $p$  primo, 0'1234 ..., 0'102030 ...)

- **Reales (R):** Racionales (Q) e irracionales (I)

### 2. Operaciones con naturales y enteros:

- **Tipo I.**  $+3+5=+8$  ;  $-4-2=-6$  ;  $-3+8=+5$  ;  $+3-7=-4$

- **Tipo II. (Varias + y -).**  $2+3-4+5-2+1=11-6=5$

Sumamos +, sumamos - y al final los restamos.

- **Tipo III.** 2 signos juntos utilizar la regla de los signos "2 signos iguales + y 2 signos distintos -"

$++=+$     $--=+$     $-+=-$     $+=-$

Ejemplo:  $-(+3) - (-5) + (-7) + (+3) = -3 + 5 - 7 + 3$

- **Tipo IV.** Producto/ división con signos

Ejemplo:  $(-5) \cdot (-7) = +35$  ;  $(-24) : (+2) = -12$

- **TIPO V.** Jerarquía de las operaciones:

(1) Potencias y raíces // (2) Paréntesis

(3) Multiplicaciones-divisiones // (4) Sumas-restas

### Opuesto y valor absoluto

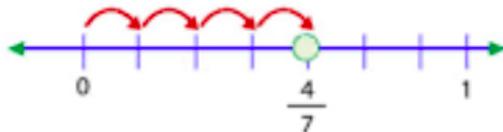
Opuesto de 2  $\rightarrow -2$

Valor absoluto  $|2|=2$  y  $|-2|=2$

### 4. Representación de fracciones y decimales en la recta. (<https://www.youtube.com/watch?v=UijZwbqT06U>)

**Fracciones:** El denominador indica el nº de partes iguales en que dividir la unidad y el numerador las que coger.

Ej:  $\frac{4}{7}$



**Nº decimales:** Pasarlos a fracción y representar

- D.Exacto  $1'2 = \frac{12}{10}$  ,  $1'23 = \frac{123}{100}$

- P.Puro  $1'6 = \frac{16-1}{9}$  ,  $1'23 = \frac{123-1}{99}$

- P.Mixto  $1'26 = \frac{126-12}{90}$  ,  $1'623 = \frac{1623-16}{990}$

**Nota:** En la representación de fracciones, para dividir un segmento en partes iguales de forma exacta habría que usar el método de Tales. (**Vídeo:** <https://www.youtube.com/watch?v=dqWRtHWI0-c>)

### 5. Ordenar fracciones

- Si tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador (Ej:  $\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$ )

- Si tienen distinto denominador, hay que construir fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador que será el m.c.m.

Ejemplo: Ordenar  $\frac{7}{15}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$

(1) Calculamos m.c.m (15, 5, 3) = 15

(2) Construimos fracciones equivalentes con denominador 15.

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15}; \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}; \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

(3) Ahora ya podemos ordenar  $\frac{7}{15} < \frac{10}{15} < \frac{12}{15}$

### 6. Suma y resta fracciones

- Si tienen el mismo denominador ponerlo como denominador y sumar numeradores ( $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ )

- Si tienen distinto denominador, hay que construir fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador que será el m.c.m.

Ejemplo: Resolver  $\frac{7}{15} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

(1) Calculamos m.c.m (15, 5, 3) = 15

(2) Construimos fracciones equivalentes con denominador 15.

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{15}; \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}; \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

(3) Finalmente  $\frac{7}{15} + \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{5}{15}$

### 7. Producto y división de fracciones

- Producto de 2 fracciones → Multiplicar en línea

Ejemplo:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8}$

- División de 2 fracciones → Multiplicar en cruz

Ejemplo:  $\frac{1}{2} : \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4}$

### 8. Operaciones combinadas con fracciones

(1) Resolver paréntesis

(2) Multiplicaciones y divisiones

(3) Por último sumas y restas

**Observación:** como norma general se recomienda no hacer el mcm para poner el mismo denominador mientras haya alguna multiplicación o división de fracciones en la operación a realizar.

Ej:  $\left(\frac{7}{5} : \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{5} = \frac{14}{5} - \frac{3}{5} = \frac{14}{5} - \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{5}{5} = \frac{1}{3}$

### 9. Tipos de problemas con fracciones

(1) Problemas de cantidad contraria

(2) Problemas de comparación de fracciones

(3) Problemas de fracción de un número

(4) Problemas de fracción de una fracción

(5) Problemas de fracción de x igual a un número

(6) Problemas de sumas y restas

(7) Problemas de producto y división

(8) Problemas dado el total

(9) Problemas dada una parte

### 10. Tipos de decimales

- **Decimales exactos** (Q): 1'23, 2'7, 3,845

- **Periódicos Puros** (Q): 1'666... = 1'6̂

- **Periódicos Mixtos** (Q): 1'366... = 1'36̂

- **Ni exactos ni periódicos** (I - Irracionales)  
0'12345..., 0'102030...

Paso de fracción a decimal: Resolver la división.

¿Cómo saber el tipo de decimal mirando el denominador?

- Denominador factores 2 ó 5 → D. Exacto

- Denominador distintos 2 ó 5 → Periódico Puro

- Denominador mezcla 2 ó 5 y otros → P.Mixto

Paso de decimal a fracción:

- D.Exacto  $1'2 = \frac{12}{10}, 1'23 = \frac{123}{100}$

- P.Puro  $1'6̂ = \frac{16-1}{9}, 1'23̂ = \frac{123-1}{99}$

- P.Mixto  $1'26̂ = \frac{126-12}{90}, 1'623̂ = \frac{1623-16}{990}$



## 11. Aproximación y errores

Formas de aproximar:

- **Truncar a las décimas** (poner 0 desde las centésimas en adelante). Ej: 3,456 → 3,400
- **Redondear a las centésimas** (si la cifra siguientes es 5 o más subir una unidad a las centésimas y si es menor de 5 entonces truncar). Ej: 3,456 → 3,460

Error absoluto y error relativo:

$$E_a = |Valor_{aprox} - Valor_{real}| ; E_r = \frac{E_a}{Valor_{real}}$$

El error relativo no tiene unidades y por tanto permite comparar el error entre magnitudes distintas.

Situaciones donde puede hacernos falta una aproximación:

- Cuando se conoce el valor real y no se quiere dar con precisión. Ej: El precio de un piso. Aprox.1 mill €

En este caso se suele usar el redondeo pudiendo indicarse de 2 maneras:

- \*Redondeo a las décimas, a las centésimas, a las milésimas, a las unidades, a las decenas,...
- \*Redondeo con cierto número de cifras significativas. Ej: Redondea 2'256 con 3 cifras significativas → 2'26  
No son cifras significativas los ceros a la izquierda, pero si los ceros entre 2 cifras distintas de 0.  
Ej: 0,0023 → Tiene 2 cifras significativas, 30005 → Tiene 5 cifras significativas, 0,0103 → Tiene 3 c.sign.  
Ej: Redondea 0,0023 con 1 cifra significativa → 0,002

- Cuando se desconoce el valor real. Ejemplo: Distancia al nadar en una piscina. Aprox. 5 km.

En el caso de que no conozcamos el valor real, podemos establecer una **cota para el error absoluto** en función de las cifras con las que se de el número.

Ej: Altura Iglesia 15 m → Cota error:  $E_{abs} < 0,5$  m // Altura montaña 3,4 km → Cota error:  $E_{abs} < 0,05$  Km=50m

(<https://www.youtube.com/watch?v=5cmpf8FNX2c>)

## 12. Propiedades de las potencias

- $a^0=1$
- Base negativa.  $(-a)^{par}=a^{par}$  ;  $(-a)^{impar}=-a^{impar}$
- Exp. negativo.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ;  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- Misma base.  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$  ;  $a^n : a^m = a^{n-m}$
- Mismo exponente.  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$  ;  $a^n : b^n = (a/b)^n$
- Potencia de una potencia.  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

## 13. Notación científica

Expresar un número en notación científica consiste en expresarlo como el producto de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Ejemplos:

- a)  $345678 = 3'45678 \cdot 10^5$  ← + -
- b)  $0,000345 = 3'45 \cdot 10^{-4}$
- c)  $345'6 \cdot 10^5 = 3'456 \cdot 10^7$

(<https://drive.google.com/file/d/0B-02ZNYAUZ9CXzRvU29Bc0pJNHM/view> )

## 14. Operaciones en Notación científica

- Para realizar + y - en notación científica, se transforma cada exp. decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos.  
 $4 \cdot 10^8 + 2,3 \cdot 10^6 - 6,5 \cdot 10^5 = 4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6,5 \cdot 10^5$
- El producto (cociente) de dos n<sup>º</sup> decimales da como resultado la multiplicación (división) de los decimales y restar los exponentes de base 10.  
 $4 \cdot 10^8 \cdot 2'3 \cdot 10^6 = (4 \cdot 2'3) \cdot 10^{8+6}$   
 $4 \cdot 10^8 : 2'3 \cdot 10^6 = (4:2'3) \cdot 10^{8-6}$

### 15. Definición de radical

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow a = b^n \text{ (a radicando y n índice)}$$

Observaciones:

- Si  $a < 0$ , entonces  $\sqrt[n]{a}$  sólo existe con n impar.

$$-\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

### 16. Propiedades y operaciones con radicales

1. Producto/Cociente radicales del mismo índice:  $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad // \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

2. Potencia de una raíz  $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

3. Raíz de una raíz  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

4. Extraer factores de una raíz

5. Simplificar/amplificar raíces  $\sqrt[n^p]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

6. Producto/Cociente de raíces de distinto índice.

7. Suma de radicales. Descomponer radicandos y extraer factores

$$\sqrt{50} + \sqrt{8} + \sqrt{12} = \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

Vídeo 1: <https://www.youtube.com/watch?v=oQRf4ISifY4&v=es>

Vídeo 2: <https://www.youtube.com/watch?v=n4LBSxHv94>

### 17. Racionalizar (quitar raíces del denominador)

1.  $\sqrt{a}$  en el denominador. Multiplicar numerador y denominador por  $\sqrt{a}$ . (Ej:  $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{7}$ )

2.  $\sqrt[n]{a^m}$  en el denominador. Multiplicar numerador y denominador por  $\sqrt[n]{a^b}$  con b lo que falta hasta n.

$$\text{(Ej: } \frac{3}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{7^2}}{7} \text{)}$$

3.  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  en el denominador. Usar el conjugado. (Ej:  $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{7}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{7})}{(\sqrt{2} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{7})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{7})}{-5}$ )

<https://www.youtube.com/watch?v=KTdBezXCjk0>

**Repaso de mcm, mcd y operaciones con enteros.**

1. Calcula MCM y MCD de 42 y 63

42	63	42 = _____	MCM(42,63)=
		63 = _____	MCD(42,63)=

**Tipo I. Suma/Resta de 2 números enteros.**



2. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 4+7=	b)-2-5=	c) -5+6=	d) 4-7=	e) -4-9=
f) -6-3=	g) 6-10=	h) 9-7=	i) - 8+3=	j) -5-3=
k) 7-3=	l) 2-5=	m) 5+9=	n) -6+2=	o) -4+3=
p) -6-3=	q) -3-5=	r) -9+4=	s) -7+9=	t) -8-7=

**Tipo II. Suma/Resta de varios números enteros.**



3. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 5 - 6 + 2 - 4 + 1 =	___ - ___ =	e) - 2 - 3 - 5 + 4 - 1 + 3 =	___ - ___ =
b) 4 + 5 + 3 - 2 - 9 - 7 =	___ - ___ =	f) - 6 - 5 + 8 - 3 + 9 - 1 + 8 =	___ - ___ =
c) 8 + 3 - 4 - 5 + 2 =	___ - ___ =	g) - 2 - 3 - 5 + 4 - 1 + 3 =	___ - ___ =
d) - 7 + 8 - 4 - 3 - 2 =	___ - ___ =	h) - 4 + 7 + 6 + 2 - 8 - 2 + 3 =	___ - ___ =

**Tipo III. Suma/Resta cuando aparecen 2 signos juntos.**



4. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 6 - ( - 3)	b) 5 - ( + 3)	c) - (+4) - ( - 6) + (+3)	d) - (-5) - (+ 6) + (+2) + (-4)
e) - 7 + ( - 4)	f) - 9 - ( - 4)	g) - (-3) + ( - 8) - (+2)	h) - (+4) - ( - 9) + (+1) + (-2)

**Tipo IV. Producto/División de números enteros.**



5. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $(+2) \cdot (-3)$	d) $(-4) \cdot (-9)$	g) $(+20) : (-2) \cdot (-3) =$	j) $(+9) : (-3) \cdot (+2) =$
b) $(+6) \cdot (+7)$	e) $(-8) : (+2)$	h) $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) =$	k) $(+8) : (-4) : (-2) =$
c) $(-5) \cdot (+4)$	f) $(-18) : (-6)$	i) $(+2) \cdot (-6) \cdot (-5) =$	l) $(+20) : (-5) : (+2) =$

**Tipo V. Operaciones combinadas**



6. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $4+8:2$	b) $3-3 \cdot 3$	c) $5+5 \cdot 2$	d) $7-9 \cdot 3$	e) $16:8-4 \cdot 3$	f) $12:2-2 \cdot 2$
g) $8 \cdot 3+5 \cdot 2$	h) $6-12:2$	i) $(8+5) \cdot 2$	j) $7+5 \cdot (-2)$	k) $(-8+5) \cdot 3$	l) $5 \cdot 2+3$
m) $3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 21 : (-3)$		n) $18:2-3 \cdot (8-4)+(-4) \cdot (-2)$		o) $8-[9-(3+4) \cdot 2]$	



7. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $5^3 - 6 \cdot (2^3 - 2)$	b) $2^2 - (3^3 - 3) \cdot 4$	c) $2^3 - 4 \cdot (\sqrt{36} - 4)$
d) $[9 \cdot (7 - 3 \cdot 4)] - 2 \cdot (-3)$	e) $(-2) \cdot (+5) - (-3) \cdot (-7) - 5 + 4 \cdot 8$	f) $3 - 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (3 - 2 \cdot 4)$

**B2.C1.1. Reconoce tipos de números y los representa**

**TEORÍA:** Tipos de números reales.

8. Indica que afirmaciones son verdaderas o falsas justificando en su respuesta:



Afirmaciones	V/F	Justificación
a) El número 2 es natural pero no es racional		
b) El número 5/7 es racional pero no entero.		
c) El número -5 es natural, entero y racional		
d) $\sqrt{16}$ es un número irracional		
e) -15/3 es racional y entero		
f) $\sqrt{5}$ es un número irracional		
g) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ es un número racional e irracional		

9. Clasifica en números naturales (N), números enteros (Z), números racionales (Q) e irracionales (I) los siguientes números: 2, -5, 2/3, 3,14444..., 1'2, -2/5, 7/1,  $\pi$ , 2'333...,  $\sqrt{3}$ , -25/5,  $\sqrt{49}$



Naturales (N)	Enteros (Z)	Racionales (Q)	Irracionales (I)

10. Representa la fracción indicada sobre las siguientes figuras:



a) $\frac{1}{2}$ 	b) $\frac{2}{3}$ 	c) $\frac{3}{4}$ 	d) $\frac{3}{4}$ 
e) $\frac{5}{6}$ 	f) $\frac{2}{3}$ 	g) $\frac{3}{8}$ 	h) $\frac{5}{6}$ 
i) $\frac{3}{5}$ 	j) $\frac{7}{10}$ 	k) $\frac{8}{15}$ 	l) $\frac{3}{6}$ 
m) $\frac{6}{6}$ 	n) $\frac{1}{4}$ 	ñ) $\frac{5}{18}$ 	o) $\frac{3}{4}$ 

11. Representa utilizando cuadrados las fracciones  $9/8$  y  $7/3$ .



--	--

**TEORÍA:** ¿Cómo representar fracciones en la recta real?

12. Representa sobre la recta las siguientes fracciones:



a) $\frac{3}{4}$ 	b) $\frac{7}{8}$ 
c) $\frac{3}{5}$ 	d) $\frac{7}{6}$ 
e) $\frac{8}{3}$ 	f) $-\frac{5}{2}$ 
g) $-\frac{7}{4}$ 	h) $\frac{8}{5}$ 
i) $\frac{13}{6}$ 	j) $\frac{15}{7}$ 

**B2.C1.5. Operaciones con fracciones**

13. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes justificando tu respuesta:



a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$	b) $\frac{7}{5}$ y $\frac{14}{10}$	c) $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{6}$
-----------------------------------	------------------------------------	----------------------------------

14. Calcula el valor de "x" para que las siguientes fracciones sean equivalentes:



a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{x} \rightarrow x=$	b) $\frac{10}{4}$ y $\frac{x}{6} \rightarrow x=$	c) $\frac{4}{x}$ y $\frac{8}{12} \rightarrow x=$
---	--	--

15. Ordenar de menor a mayor  $\frac{7}{15}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{2}{3}$



16. Ordenar de menor a mayor  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{12}$ ,  $\frac{11}{18}$ ,  $\frac{4}{9}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$



17. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:



<p>a) <math>\frac{1}{12} + \frac{7}{8} - \frac{3}{10} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p> <p>12   8   10        mcm(12,8,10)= _____</p>
<p>b) <math>\frac{35}{36} - \frac{1}{8} - \frac{3}{24} = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p> <p>36   8   24        mcm(36,8,24)= _____</p>



$$k) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right) : \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] =$$

Sol:11/24

$$l) \left[ \left( \frac{1}{2} + 1 \right)^{-1} \right]^3 \cdot \left( 4 - \frac{5}{2} \right)^2 : \sqrt{\frac{100}{225}} =$$

Sol:1

$$m) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} =$$

Sol: 11/6

$$n) 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{4 + \frac{3}{5}}} =$$

Sol: 181/79

18. Resuelve:



a)  $\frac{2}{7}$  de 14 =

b)  $\frac{3}{5}$  de 105 =

c)  $\frac{3}{20}$  de 400 =

### B2.C1.1. Problemas con fracciones

#### 19. Tipo 1. Problemas de cantidad contraria.

a) Una clase tiene 36 alumnos de los que 15 han aprobado. ¿Qué fracción representa los suspensos?.

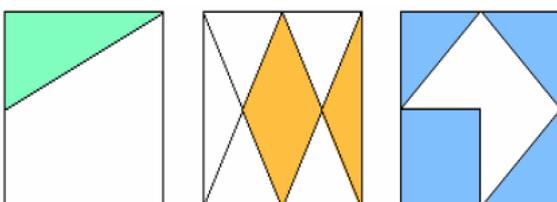


b) Si se han vaciado  $\frac{5}{28}$  de una piscina. ¿Qué fracción representa la parte que queda por vaciar?.



#### 20. Tipo 2. Comparación de fracciones.

Los siguientes cuadrados tienen coloreados la parte de terreno con olivos plantados por 3 hermanos. Cada hermano ha plantado un terreno. ¿cuál de los hermanos tiene más olivos?. Además la Junta de CLM da una ayuda de 0,5 € por  $m^2$ . Cada cuadrado tiene  $5000 m^2$ . ¿Cuánta ayuda le corresponde a cada uno?.



**21. Tipo 3. Problemas de fracción de un número.**

Antonio tiene ahorrados 2380€. Si gasta  $\frac{3}{7}$  en un ordenador. ¿Cuánto dinero le queda?



**22. Tipo 4. Problemas de fracción de una fracción.**

Nos comemos  $\frac{1}{3}$  de una tarta. De lo que queda nos comemos  $\frac{2}{7}$ . ¿Qué fracción representa la parte de tarta que queda sin comer?



**23. Tipo 5. Problemas de fracción de x igual a un número.**

Se nos rompe una bolsa de caramelos y se nos caen 210 caramelos, lo que supone  $\frac{3}{7}$  del total. ¿Cuántos caramelos tenía la bolsa?



**24. Tipo 6. Problemas de sumas y restas de fracciones.**

España y Portugal poseen  $\frac{5}{27}$  y  $\frac{1}{6}$  de los bosques europeos respectivamente. ¿Qué fracción de bosques europeos tienen España y Portugal?. ¿Qué fracción de bosques tiene el resto de Europa?.



**25. Tipo 7. Problemas de multiplicaciones y divisiones.**

Nos quedan  $\frac{2}{3}$  de tarta y los queremos repartir entre 6 personas. ¿A qué fracción de tarta tocamos?.



**26. Tipo 8. Problemas dado el total.**

En una clase hay 36 alumnos,  $\frac{2}{3}$  de los cuales son chicos. Las  $\frac{3}{4}$  de las chicas dan música. ¿Qué fracción del total son chicas de música y cuántas son?



**27. Tipo 9. Problemas dada la parte.**

En una carnicería se vende por la mañana  $\frac{3}{7}$  de la carne y por la tarde la mitad de lo que quedaba. ¿Qué fracción queda por vender?

	Se vende	Queda
Mañana		
Tarde		



28. De un calentador de agua se gasta  $\frac{1}{6}$  del agua y luego  $\frac{2}{5}$  partes de lo que quedaba. Si aún quedan 30 litros. ¿Cuál es la capacidad del calentador?

	Se gasta	Queda
Primero		
Después		



29. Tres amigos les toca la lotería. El primero se lleva  $\frac{2}{5}$  del total, el segundo  $\frac{5}{9}$  de lo que queda y el tercero 92€. ¿Cuánto dinero les tocó?



**Problemas variados**

30. He recorrido en coche 60 km, lo que supone  $\frac{4}{9}$  del total. ¿Cuántos kilómetros haré en total?.




31. Tengo un terreno de 600 m<sup>2</sup>. Dedico  $\frac{2}{15}$  a plantar alcachofas,  $\frac{1}{6}$  ha plantar pimientos y el resto lo tengo para árboles. De la parte de árboles,  $\frac{2}{5}$  son de árboles ornamentales y el resto son frutales. ¿Cuántos m<sup>2</sup> dedico a frutales?.

(Sol: 276 m<sup>2</sup>)
 


32. Violeta se ha comido los  $\frac{2}{5}$  de una barra de helado. ¿Qué fracción queda?. Su padre, Robert, se ha comido la mitad del resto. ¿Qué fracción del helado queda ahora?

(Sol: a) $\frac{3}{5}$  b) $\frac{3}{10}$ )
 


33. José recibe el regalo de un paquete de discos. En la primera semana escucha  $\frac{2}{5}$  de los discos, y en la segunda,  $\frac{4}{5}$  del resto. Si aún le quedan 3 sin escuchar, ¿cuántos discos había en el paquete?.

	Escucha	Queda
1ª semana		
2ª semana		

(Sol: 25 discos)
 


34. De un recipiente de 240 litros se han llenado 130 botellas de medio litro. ¿Cuántas botellas de  $\frac{1}{5}$  de litro se podrá llenar con el resto?

(Sol: 875 botellas)
 


35. Nos dicen que el resultado de un examen ha sido el siguiente:  $\frac{1}{8}$  de los alumn@s han suspendido,  $\frac{3}{7}$  tienen suficiente,  $\frac{3}{8}$  notable y  $\frac{1}{10}$  sobresaliente. Comprueba si es posible.

(Sol: No)  

36. Una masa de pizza de 600 g contiene  $\frac{2}{15}$  de aceite,  $\frac{9}{25}$  de agua y el resto harina. ¿Qué parte de harina tiene la mezcla y que cantidad en gramos es?

(Sol: No)  

37. Una finca se divide en tres parcelas. La primera es igual a los  $\frac{4}{7}$  de la superficie de la finca y la segunda es igual a la mitad de la primera. a) ¿Qué fracción de la finca representa la tercera parcela?; b) Si la finca es de 14.000 m<sup>2</sup>, ¿cuál es la superficie de cada parcela?

(Sol: a)  $\frac{1}{7}$ , b) 8000, 4000 y 2000 m<sup>2</sup>)  

38. En un programa de televisión intervienen 3 médicos. El primero habla  $\frac{3}{8}$  del tiempo total, la segunda interviene  $\frac{2}{5}$  del resto y el tercero expone sus ideas en 15 minutos. ¿Cuánto tiempo dura el programa?

(Sol: 40 minutos)  

39. Aída organiza su armario: la cuarta parte la reserva a los zapatos; del espacio que queda,  $\frac{7}{12}$  los dedica a ropa y el resto a complementos. ¿Qué fracción del armario dedica a los complementos?

(Sol:  $\frac{5}{16}$ )  

40. Nos gastamos  $\frac{2}{3}$  de lo que llevamos en el supermercado y una cuarta parte de lo que nos queda en la farmacia. Si regresamos a casa con 6 euros. ¿Cuánto teníamos al salir de casa?

(Sol: 24€)  

41. Una persona realiza  $\frac{3}{5}$  partes de un viaje en ferrocarril; los  $\frac{7}{8}$  del resto en coche y los 26 km restantes en moto. En total, ¿cuántos kilómetros recorre?.

(Sol: 520 km)  

42. Un futbolista ha metido los  $\frac{2}{5}$  de los goles de su equipo y otro la cuarta parte del resto. Si los demás jugadores han conseguido 45 goles, ¿cuántos goles metió el equipo en toda la temporada? .

(Sol: 6,75 m)  

43. Una canica cae al suelo y se eleva cada vez los  $\frac{2}{3}$  de la altura anterior. Tras botar tres veces, se ha elevado 2 metros. ¿Desde qué altura cayó la canica?

(Sol: 6,75 m)  

44. Si un grifo tarda 2 horas en llenar una piscina y otro grifo tarda 3 horas. Si los ponemos a llenar a la vez, ¿cuánto tardarán?

	Tiempo en llenar	Fracción que llena en 1 hora	Suma de las 2 fracciones
Grifo 1			
Grifo 2			

(Sol: 1,2 h)  

45. Si un grifo tarda 8 horas en llenar una piscina y otro grifo tarda 12 horas. Si los ponemos a llenar a la vez, ¿cuánto tardarán?

	Tiempo en llenar	Fracción que llena en 1 hora	Suma de las 2 fracciones
Grifo 1			
Grifo 2			

(Sol: 4,8 h)  

46. Un padre y un hijo tardan 2 horas en arar un campo. Si el padre lo hace solo tarda 6 horas. ¿Cuánto tardará el hijo en hacerlo solo?.

	Tiempo en llenar	Fracción que ara en 1 hora
Padre		
Hijo		

(Sol: 3 h)  

**B2.C1.2.** Tipos de decimales. Paso de decimal a fracción y a la inversa. Representación

**TEORÍA:** Tipos de decimales

**TEORÍA:** Paso de fracción a decimal.

**TEORÍA:** Dada una fracción, cómo saber qué tipo de decimal es mirando su denominador.

47. Indica qué tipos de decimales son los siguientes números:



a) 1,44444.... _____	b) 7,43 _____	c) 127 _____	d) 1,010010001... _____
e) 7,241111.... _____	f) $3,\hat{2}$ _____	g) $1,2\hat{7}$ _____	h) 1,234567.... _____
i) $\sqrt{2}=1,414213....$ _____	j) $3,0123\hat{2}$ _____	k) $\pi-3=0,141592$ _____	l) 1,2122232425.... _____



48. Ordena, de menor a mayor:  $2\hat{3}$  ,  $2'3$ ,  $2'13$  y  $2'303003...$  .



49. Escribe 3 números comprendidos entre  $3,6$  y  $3,\hat{6}$



50. Pasa a decimal las siguientes fracciones e indica de que tipo es:

a) $\frac{6}{25}$	b) $\frac{7}{3}$	c) $\frac{5}{6}$
-------------------	------------------	------------------



51. Indica que tipo de decimal son estas fracciones, sin hacer la división y justifica tu respuesta:

a) $\frac{23}{50}$	a) $\frac{8}{7}$	a) $\frac{3}{14}$	a) $\frac{4}{6}$
a) $\frac{9}{6}$	a) $\frac{13}{150}$	a) $\frac{7}{20}$	a) $\frac{6}{35}$

**TEORÍA:** Paso de decimal a fracción

52. Escribe en forma de fracción los siguientes números:



a) $5\overline{6} =$	b) $0\overline{17} =$	c) $2\overline{106} =$	d) $0\overline{0023} =$
e) $123\overline{111}... =$	f) $1\overline{3} =$	g) $1\overline{23} =$	h) $21\overline{5} =$
i) $1\overline{2343} =$	j) $27\overline{9} =$	k) $1\overline{703} =$	l) $0\overline{13} =$
m) $1\overline{1234}... =$	n) $\pi =$	o) $1\overline{273} =$	p) $0\overline{9} =$

53. Indica si son verdaderas o falsas estas afirmaciones justificando tu respuesta:



Enunciado	V	F	Justificación
a) Al sumar dos decimales periódicos puros siempre se obtiene otro periódico puro.			
b) Hay n <sup>os</sup> decimales que no son racionales			
c) Los números naturales son racionales			
d) El cociente de 2 decimales exactos es exacto			



54. Representa en la recta los siguientes números decimales utilizando las fracciones:

<p>a) <math>0'6 = \frac{\quad}{\quad}</math></p>	<p>b) <math>0,25 = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p>
<p>c) <math>0'3 = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p>	<p>d) <math>1'4 = \frac{\quad}{\quad}</math></p>
<p>e) <math>1'9 = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p>	<p>f) <math>1'49 = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}</math></p>

**B2.C1.4. Aproximación y errores**

**TEORÍA:** Truncamiento. Redondeo. Error absoluto y relativo.

55. Completa la siguiente tabla:



	2314	1325	4300	937	1554	1665	9555
Truncar a las centenas							
Redondear a las decenas							
Redondear a las u.millar							

56. Halla los errores absoluto y relativo que cometemos al redondear y truncar a las décimas la expresión decimal del número  $10'476$ .




57. Supongamos que medimos la altura de un lápiz y obtenemos 17 cm, cuando en realidad mide 16,8 cm. También medimos la distancia a Murcia desde Hellín y nos salen 88 km, cuando en realidad son 90 km. ¿En qué caso hemos cometido un mayor en la medición?




58. Completa la siguiente tabla redondeando con el nº de cifras significativas indicado:



Número	Cifras significativas				
	1	2	3	4	5
$\sqrt{2}$					
$1/3$					
1'99995					

59. Establece una cota del error absoluto para las estas situaciones en que desconocemos el valor real:

Situación	Cota del error absoluto
a) Volumen de una piscina $48 \text{ m}^3$	
b) Altura de una canasta 3,55 m	
c) Altura de un helicóptero 35,5 km	
d) Peso boli 35 g	
e) Peso silla 3,25 kg	

**B2.C2.1. Potencias y radicales**

**TEORÍA: Propiedades de las potencias.**

60. Escribe en forma de potencia sin calcular:



a) $2^5 \cdot 2^7$		b) $4^2 \cdot 4^3$		c) $2^{15} \cdot 2^9$		d) $2^5 \cdot 2^x = 2^7$	x=
e) $3^9 : 3^5$		f) $6^6 : 6^5$		g) $2^{10} \cdot 2^3 \cdot 2^4$		h) $5^x : 5^4 = 5^9$	x=
i) $(2^3)^4$		j) $(5^3)^5$		k) $((2^3)^4)^2$		l) $((3^2)^3)^5$	
m) $2^7 \cdot 3^7$		n) $21^5 : 7^5$		o) $12^4 : 2^4$		p) $2^5 \cdot 4^5$	
r) $9^{12} : 3^3$		s) $4^6 \cdot 6^6$		t) $20^{15} \cdot 5^{15}$		u) $15^x : 5^x$	

61. Escribe en forma de potencia sin calcular:



a) $(-2)^{57}$		b) $(-4)^{24}$		c) $(-2)^4 \cdot (-2)^9$		d) $(-2)^5 : 2^3$	
e) $(-3)^9 : (-3^5)$		f) $-(-6)^9 : 6^6$		g) $-(-2)^{13} \cdot (-2^3)$		h) $(-5)^7 : (-5^4)$	

62. Escribe en forma de potencia sin calcular:



a) $((-2)^9 : 2^5) \cdot 2^7$	b) $(3^9 \cdot (-3)^3) : ((-3) \cdot 3^3)^2$	c) $(7^9 : 7^1) : (-7^4)$
d) $((-4)^6 : (-4)^5) \cdot 4^1$	e) $((-a)^8 \cdot a^4) : (-a)^3$	f) $((-y)^2 \cdot (-y)^3) \cdot y^4$

g) $((-4)^9 : 2^9) \cdot (-2^7)$	h) $-((-8)^9 : 2^9) : -2^9$	i) $(b^5 \cdot (-b)^4) : (-b)^3$
j) $((-9)^7 \cdot 9^4) : (-3)^{11}$	k) $((-9)^6 : (-3)^6) \cdot -3^5$	l) $(-y^2)^3 \cdot ((-y)^4)^2$



63. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $\frac{7^6}{(-7)^4}$	b) $\frac{(-15)^3}{5^3}$	c) $\frac{18^5}{3^5 \cdot 6^5}$
d) $\frac{(7^6 \cdot 7^3)^2}{(7^2 \cdot 7^4)^3}$	e) $(12^2)^3 \cdot 6^5 \cdot (2^7 : 2^2)$	f) $(12^2)^3 \cdot 6^5 \cdot (2^7 : 2^2)$
g) $\frac{30^6}{3^6}$	h) $\frac{30^6}{3^5}$	i) $\left(\frac{6^3}{3^2}\right)^2$



64. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $\frac{12^5}{3^4}$	b) $\frac{15^3}{5^2}$	c) $\frac{20^7}{2^4}$
d) $\frac{36^5}{3^9}$	e) $\frac{54^6}{(-6)^7}$	f) $\frac{-64^4}{(-4)^6}$



65. Escribe en forma de potencia sin calcular:

a) $2^{-5}$	b) $\frac{1}{5^{-2}}$	c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$
-------------	-----------------------	------------------------------------

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$	e) $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right)^{-5}$	f) $a^{-2} \cdot b^{-3}$
g) $(2x^2y)^{-3}$	h) $\frac{2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 5^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-4} \cdot 5^5}$	i) $\frac{7^6 \cdot 3^2 \cdot 7^{-2}}{7^5 \cdot 3^{-3} \cdot 3^4}$
j) $\frac{2^4 \cdot (-3)^2 \cdot 6^{-2}}{4^2 \cdot 9^{-3} \cdot 3^2}$	k) $\frac{2^{-3} \cdot 3^3 \cdot 9^{-2} \cdot 4^3}{2^{-6} \cdot 8 \cdot 3^5}$	l) $\frac{2^5 \cdot 4^{-2} \cdot 9^{-3}}{3^4 \cdot 2^{-5} \cdot 3^{-2}}$
m) $\frac{6xy}{8} : \frac{y^2}{2x}$	n) $(15x)^{-1} : (5x^{-2})^{-2}$	o) $(x^{-2}y^3)^3 \cdot (xy^{-3})^{-2}$
p) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$	q) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$	r) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{-7}{5}\right)^4$
s) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} \cdot (x^{-3})^{-1}$	t) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{7}\right)^3$	v) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{9}\right)^3$

**B2.C1.3. Notación científica**

**TEORÍA:** Notación científica.

66. Escribe en notación científica los siguientes números:



Número	Notación Científica	Número	Notación Científica
60250000000		$0,00043 \cdot 10^3$	
256000000		$0,0000012 \cdot 10^{-2}$	
0,00000003		$123 \cdot 10^4$	
0,0000435		$120,03 \cdot 10^{-6}$	
0,002020		$0,0123 \cdot 10^5$	
$23,4 \cdot 10^3$		$0,00045 \cdot 10^{-2}$	
27 cienmilésimas		3 billones de billón	
7 billones		0,23 diezmilésimas	

67. Resuelve los siguientes cálculos expresando la solución en notación científica:



a) La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg. ¿Cuál sería la masa equivalente a 3 planetas iguales a la Tierra?
b) El diámetro de un virus es de $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra, si su radio medio es de 6.370 km?
c) La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s. ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

**TEORÍA:** Operaciones en notación científica.

68. Realiza las siguientes operaciones y expresa la solución en notación científica:



a) $(2,12 \cdot 10^5) + (1,4 \cdot 10^3) =$
b) $(20,1 \cdot 10^3) + (2,1 \cdot 10^{-2}) =$
c) $(8 \cdot 10^{-3}) - (6 \cdot 10^{-2}) =$
d) $(1,3 \cdot 10^3) \cdot (2,1 \cdot 10^{-2}) =$
e) $(3,2 \cdot 10^7) \cdot (6,4 \cdot 10^{-15}) =$

69. Una gota de sangre de un  $\text{mm}^3$  contiene aproximadamente 5 millones de glóbulos rojos. Una persona tiene aproximadamente 4,5 litros de sangre. ¿Cuál sería el número de glóbulos rojos que tiene esta persona? Expresa el resultado en notación científica.





70. El periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol es de un año, aproximadamente 365,25 días, y el periodo de Plutón es de  $7,82 \cdot 10^9$  segundos.

- a) Expresa en notación científica y en segundos el periodo de la Tierra.
- b) ¿Cuántos años terrestres tarda Plutón en dar una vuelta alrededor del Sol?



**B2.C2.1. Radicales**

**TEORÍA:** Definición de radical. Propiedades de los radicales.

--	--

71. ¿Cuánto mide el lado de una habitación cuadrada embaldosada con 144 baldosas de cuadradas de 25 cm de lado?

	 
--	---

72. En un depósito cúbico caben 1000 cubos de 1 dm<sup>3</sup>, ¿cuánto mide su arista?.

		 
---	--	---

73. Calcula:



a) $\sqrt[3]{27} =$	b) $\sqrt[4]{16} =$	c) $\sqrt{36} =$	d) $\sqrt[3]{-8} =$	e) $\sqrt[3]{-125} =$	f) $\sqrt{81} =$
---------------------	---------------------	------------------	---------------------	-----------------------	------------------

74. Calcula:



a) $\sqrt[5]{1} =$	b) $\sqrt{-36} =$	c) $\sqrt[4]{81} =$	d) $\sqrt[5]{-1} =$	e) $\sqrt[3]{-8} =$	f) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} =$	g) $\sqrt[3]{\frac{27}{-8}} =$	h) $\sqrt[4]{-16} =$
--------------------	-------------------	---------------------	---------------------	---------------------	-------------------------------	--------------------------------	----------------------



75. Descompón en factores y extrae los que puedas fuera de la raíz:

a) $\sqrt{12} =$	b) $\sqrt{48} =$	c) $\sqrt{72} =$
d) $\sqrt{2500} =$	e) $\sqrt[3]{52} =$	f) $\sqrt[3]{40} =$



76. Extrae fuera del radical cuando sea posible:

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4} =$	b) $\sqrt[5]{2^7 \cdot 3^6} =$	c) $\sqrt{5^7 \cdot 7^3} =$
d) $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6} =$	e) $\sqrt[3]{3^{17} \cdot 5^4} =$	f) $\sqrt[7]{a^{15} \cdot b^{24}} =$
g) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2} =$	h) $\sqrt{2^5 \cdot 3^8 \cdot 7^3} =$	i) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^4 \cdot c^7} =$
j) $\sqrt[5]{32 \cdot x^4 \cdot y^{12}} =$	k) $\sqrt[7]{5^2 \cdot 7^{14} \cdot 11^8} =$	m) $\sqrt[4]{2^5 \cdot w^9 \cdot t^4} =$
n) $\sqrt{240} =$	o) $\sqrt[3]{144} =$	p) $\sqrt[5]{64} =$



77. Calcula estas operaciones de radicales de distinto índice:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$	b) $\sqrt{8} : \sqrt{2} =$	c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} =$	d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} =$
e) $\sqrt{2^5} \cdot \sqrt{2^3} =$	f) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{a^4b} =$	g) $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[3]{4x} =$	h) $\frac{\sqrt[4]{5^{10}} \cdot \sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[4]{5^6}} =$



78. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{3^6} =$	b) $\sqrt[4]{2^2} =$	c) $\sqrt[12]{3^4} =$	d) $\sqrt[6]{2^3} =$	e) $\sqrt[8]{2^{10}} =$	f) $\sqrt[4]{3^6} =$
----------------------	----------------------	-----------------------	----------------------	-------------------------	----------------------



79. Calcula:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}} =$	b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} =$	c) $(\sqrt[3]{3})^6 =$	d) $(\sqrt[4]{2^2})^3 =$	e) $(\sqrt[3]{\sqrt{7}})^6 =$	f) $(\sqrt[5]{\sqrt[7]{2}})^5 =$
-------------------------------	-------------------------------	------------------------	--------------------------	-------------------------------	----------------------------------



80. Calcula estas operaciones de radicales con distinto índice:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$	b) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} =$	c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{3^2} =$	d) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{6} =$
e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{2} =$	f) $\sqrt{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2b} =$	g) $\sqrt[3]{2x^2} \cdot \sqrt[5]{x} =$	h) $\sqrt[4]{5^2} : \sqrt[6]{5^3} =$



81. Simplifica las operaciones que puedas:

a) $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$	b) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} =$	c) $5\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} =$	d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$
e) $3\sqrt{2} + \sqrt[4]{2} =$	f) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$	g) $7\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} =$	h) $7\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[4]{3} =$



82. Simplifica las operaciones que puedas:

a) $\sqrt{8} + 7\sqrt{2} =$	b) $\sqrt{20} - \sqrt{5} =$	c) $\sqrt{50} + \sqrt{72} - 10\sqrt{2} =$
d) $5\sqrt{28} + \sqrt{63} =$	e) $5\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} =$	f) $-\sqrt{48} + 4\sqrt{108} - \sqrt{75} =$

**TEORÍA:** Racionalizar raíces (quitar raíces del denominador).

83. Racionaliza y simplifica:



a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$	b) $\frac{7}{\sqrt{3}}$	c) $\frac{2}{\sqrt{5}}$	d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$
e) $\frac{7}{\sqrt[4]{3^3}}$	f) $\frac{2}{\sqrt[5]{2^2}}$	g) $\frac{2}{\sqrt[10]{7^7}}$	h) $\frac{5}{\sqrt[7]{3^2}}$

i) $\frac{7}{\sqrt[4]{3^3}}$	j) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$	k) $\frac{5}{\sqrt{5}-2}$	l) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
------------------------------	---------------------------	---------------------------	--

**B2.C1.2.** Tipos de números reales. Representación de raíces en la recta real.

**TEORÍA:** Recordamos los tipos de números reales. Representación de  $\sqrt{a}$ .

84. Clasifica en números naturales (N), números enteros (Z), números racionales (Q) e irracionales (I) los siguientes números:  $2'34\hat{1}$ ,  $-5'3$ ,  $9999$ ,  $9'8$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $1'102030\dots$ ,  $-7/3$ ,  $-\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $1'001234\dots$ ,  $\sqrt{49}$   

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racionales (Q)	Irracionales (I)

85. Representa en la recta los siguientes números irracionales utilizando el teorema de Pitágoras:  

a) $\sqrt{2}$ 	b) $\sqrt{5}$ 
c) $\sqrt{10}$ 	d) $\sqrt{6}$ 

## UNIDAD 2. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

**B2.C1.1.** Reconoce los distintos tipos de números, los sabe representar y los emplea para la resolución de problemas de la vida cotidiana.

**B2.C5.1.** Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas. En particular, sabe resolver problemas aritméticos.

Resumen del tema:

### 1. Cómo resolver reglas de 3 directas / inversas.

(1) Planteamos la correspondiente reglas de 3:

Magnitud 1	----->	Magnitud 2
A		C
B		X

(2) Estudiamos si la relación entre Magnitud 1 y Magnitud 2 es Directa (+ +) o Inversa (+ -)

- Si la relación es Directa  $\rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{X} \rightarrow X = \frac{B \cdot C}{A}$  (multiplicamos en cruz y dividimos por el valor que queda)

- Si la relación es Inversa le damos la vuelta a los valores correspondientes a la Magnitud 1 con lo que la igualdad nos queda así  $\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{C}{X} \rightarrow X = \frac{A \cdot C}{B}$  (multiplicamos en línea y dividimos por el valor que queda)

### 2. Reglas de 3 compuestas (más de 2 magnitudes)

(1) Planteamos la correspondiente regla de 3:

Magnitud 1	----->	Magnitud 2	----->	Magnitud 3
A		C		E
B		D		X

(2) Estudiamos si la relación de las Magnitud 1 y Magnitud 2 con la magnitud que lleva la X para ver si es Directa (+ +) o Inversa (+ -). Cuando se directa mantendremos la proporción igual y cuando sea inversa le daremos la vuelta. Por ejemplo, suponiendo que Magnitud 1 sea Directa y Magnitud 2 inversa

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{E}{X} \rightarrow X = \frac{B \cdot C \cdot E}{A \cdot D} \quad (\text{dejamos } \frac{A}{B} \text{ al ser directa y } \frac{D}{C} \text{ al ser inversa})$$

### 3. Repartos directamente proporcionales

Queremos repartir una cantidad C directamente proporcional a valores a, b y c. Calculamos  $S = a + b + c$  y calculamos la fracción que representa cada parte  $\frac{a}{S}$ ,  $\frac{b}{S}$  y  $\frac{c}{S}$ . A cada uno le corresponde esa fracción de C:

$$\frac{a}{S} \text{ de } C, \frac{b}{S} \text{ de } C \text{ y } \frac{c}{S} \text{ de } C$$

### Repartos inversamente proporcionales.

Queremos repartir una cantidad C inversamente proporcional a valores a, b y c. En este caso hacemos un reparto directamente proporcional a valores  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  y  $\frac{1}{c}$  cogiendo como  $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

#### 4. Problemas de mezclas

Queremos mezclar una cantidad  $C_1$  de producto A de precio  $P_1$  con una cantidad  $C_2$  de producto B precio  $P_2$ . Para plantear los problemas utilizar la siguiente tabla:

	Cantidad	Precio	Coste
Producto A	$C_1$	$P_1$	$C_1 \cdot P_1$
Producto B	$C_2$	$P_2$	$C_2 \cdot P_2$
Mezcla	$C_1 + C_2$	$X = (C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2) / (C_1 + C_2)$	$C_1 \cdot P_1 + C_2 \cdot P_2$

#### 5. Problemas de velocidades

Móviles. Espacio=Velocidad·Tiempo (misma dirección  $v=v_2-v_1$  // distinta dirección  $v=v_1+v_2$ )

Caudales. Nº Litros=Caudal·Tiempo (misma dirección  $C=C_2-C_1$  // distinta dirección  $C=C_1+C_2$ )

#### 6. Porcentajes.

(1) Cálculo de porcentajes de forma directa. 35 % de  $C = \frac{35}{100} \cdot C = 0,35 \cdot C$

(2) Aumentos porcentuales. Aumento del 20%  $\rightarrow$  120 % de  $C = \frac{120}{100} \cdot C = 1,20 \cdot C$

(3) Disminuciones porcentuales. Descuento del 30%  $\rightarrow$  70 % de  $C = \frac{70}{100} \cdot C = 0,70 \cdot C$

(4) Cálculo de porcentajes como regla de 3 directa

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)
Total	----->	100 %
Parte	----->	X

Ejemplos:

a) Un abrigo ha costado 33€ con un 10% de aumento del precio. ¿Cuánto costaba ante de dicho aumento?.

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)	
33	----->	110 %	$x = \frac{3300}{110}$
X	----->	100 %	

b) Si en una clase 6 alumnos llevan gafas, lo que supone el 20% del total. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?.

Cantidad	(Directa)	Porcentaje (%)	
X	----->	100 %	$x = \frac{600}{20}$
6	----->	20 %	

#### 7. Problemas de intereses

Interés simple (pago/amortización de intereses al final del periodo)

I intereses, C capital, r % de interés, t tiempo

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \text{ (t en años)}, I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \text{ (t en meses)}, I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36500} \text{ (t en días)}$$

Interés compuesto (amortizaciones varias veces durante el periodo)

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t, I = C_F - C_I. C_F \text{ capital final, } C_I \text{ capital inicial, } r \text{ \% interés, } t \text{ tiempo, } I \text{ intereses}$$

**B2.C1.1., B2.C5.1.** Resolución de problemas aritméticos aplicables a la vida real.

**TEORÍA:** Reglas de 3 simples directas e inversas.

1. En una obra, 2 obreros realizan una zanja de 5 m. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántos metros abrirán si se incorporan 3 obreros más?



2. Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?



3. Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?



4. Si 20 obreros levantan un muro de ladrillos en 6 días, ¿cuántos días tardarían 12 obreros?



**TEORÍA:** Reglas de 3 compuestas.

5. Un albañil pone  $260 \text{ m}^2$  de baldosa en 5 días trabajando 8 horas al día. Se compromete a poner  $500 \text{ m}^2$  de baldosas en 7 días, ¿cuántas horas tendrá que trabajar al día? .

6. Para calentar 2 litros de agua desde  $0$  a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  se necesitan 1.000 calorías. Si queremos calentar 3 litros de agua de  $10$  a  $60 \text{ }^\circ\text{C}$  ¿Cuántas calorías son necesarias?. (Sol: 3750 cal.)

7. Un motor funcionando 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de 1.200 euros. ¿Cuánto gastará el motor funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias?. (Sol: 2.430 €)

8. En un restaurante 113 comensales han consumido 840 yogures durante 20 días. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales por día?. (Sol: No)

9. Ocho bombillas encendidas 4 horas diarias, han consumido 48 kW/h en 30 días. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas iguales a las anteriores, encendidas 3 horas diarias, durante 20 días?. (Sol: 18 kW/h)

10. Cinco fuentes abiertas 8 horas y manando 12 l/min de agua llenan un estanque. ¿Cuántas fuentes debemos de abrir para llenar el mismo estanque en 6 horas manando 20 l/min?. (Sol: 4 fuentes)

11. Nueve grifos abiertos 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por valor de 20 €. Averiguar el precio del vertido de 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días. (Sol: 40 €)

12. Para pintar un muro de 8 metros de largo y 2,5 metros de alto necesitamos 2 botes de 1 kilo de pintura. ¿Cuántos botes de 5 kilos se necesitarán para pintar uno de 50 metros de largo y 2 de alto?. (Sol: 2 botes)

13. En una cadena de montaje, 17 operarios, trabajando 8 horas al día, ensamblan 850 aparatos de radio a la semana. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar la próxima semana, para atender un pedido de 1.000 aparatos, teniendo en cuenta que se añadirá un refuerzo de tres trabajadores?. (Sol: 8 horas)

14. Un ganadero sabe que para alimentar a sus 20 animales durante 30 días necesita 2 toneladas de pienso. ¿Cuántos días le durará la comida si compra 10 animales más y otros 1.500 kilogramos de pienso?. (Sol: 35)

15. Para pintar un muro de 8 metros de largo y 2,5 metros de alto necesitamos 2 botes de 1 kilo de pintura. ¿Cuántos botes de 5 kilos se necesitarán para pintar uno de 50 metros de largo y 2 de alto?. (Sol: 2 botes)

**TEORÍA:** Repartos directamente proporcionales.

16. Pedro, Alberto y María tenían, respectivamente, 5, 3 y 2 euros. Juntaron su dinero y compraron 500 folios. ¿Cuántos folios recibe cada uno?. (Sol: Pedro 250, Alberto 150 y María 100 folios)



17. En una campaña de recogida de pilas para reciclar, Yolanda lleva 7 pilas, Miriam 11 y Juan 12. Si como premio ganan 60 bolígrafos, ¿cómo se los repartirán?. (Sol: Yolanda 14, Miriam 22 y Juan 24 bolígrafos)



18. Un padre reparte 700 € en partes directamente proporcionales a sus edades: Miguel de 8 años, Fátima de 12 años y Lucía de 15 años. ¿Cuánto recibirá cada hijo?. (Sol: Miguel 160, Fátima 240 y Lucía 300 €)



19. Tres amigos reciben 450 € por hacer de canguro. Rafa trabajó 3 días, Marina 5 días y Alfredo 7 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?. (Sol: Rafa 90, Marina 150 y Alfredo 210 €)



20. Dos socios montan una empresa. El socio A puso 2 millones de euros y el socio B puso 5 millones. Al año han obtenido 28.000 € de beneficios. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?. (Sol: El A 8.000 y el B 20.000 €)



21. Se reparte dinero en proporción a 5, 10 y 13; al menor le corresponden 2500 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos? Sol: 5.000 y 6.500 €



22. ¿Cómo se podrían repartir 2310€ entre 3 hermanos de forma que al mayor le corresponda la mitad que al menor y a este, el triple que al mediano?



**TEORÍA:** Repartos inversamente proporcionales.

23. Quiero repartir un beneficio de 1100€ en partes inversamente proporcionales a los días que han faltado 2 trabajadores que ha sido 3 y 4 días respectivamente. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

24. Tres camareros se reparten 295€ de propinas en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron a trabajar que fueron 2, 5 y 7 días respectivamente. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

**TEORÍA:** Problemas de mezclas

25. Si mezclamos 40 kg de café de 6,80€/kg con 25 kg de otro café de 4,50€/kg. ¿A qué precio resultará el kg de mezcla?

26. Si un joyero mezcla 3 lingotes: uno de 30 kg con 68,3% de oro, otro de 10 kg con 82,15% de oro y otro de 15 kg de oro puro. Hallar el porcentaje de oro que tendrá la mezcla.

27. Un litro de agua pesa 999,2 g y un litro de alcohol 749,7 g. ¿Qué pesará un litro de disolución al mezclar 3 litros de agua con 7 litros de alcohol?

28. Un joyero quiere fundir un lingote de 3kg de oro de ley 0,80 con 4 kg de oro de ley de 0,95. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?

**TEORÍA:** Problemas de velocidades

29. Un motorista va por una carretera a 80 km/h. Más adelante, a 30 km, va un ciclista a 25 km/h en el mismo sentido. ¿Cuánto tardará el motorista en alcanzar al ciclista?.

30. Un meteorito se acerca hacia una estrella a una velocidad de 100 km/s. La estrella se dirige hacia el meteorito a 65 km/h. Si se encuentran a una distancia de 3 millones de km. ¿Cuánto tardarán en chocar?



31. Un camión sale de Hellín a 90 km/h a las 8 de la mañana. A los 30 minutos, se dan cuenta que se ha dejado un paquete y sale un coche persiguiéndolo a 120 km/h. ¿A qué hora lo pillará?



32. Un embalse tiene una capacidad de 880 hm<sup>3</sup> y se encuentra al 20% de su capacidad. Cada día se vacían 7500 l/s y recibe una aportación media de la lluvia de 34 m<sup>3</sup>/s. Manteniendo ese ritmo, ¿Cuánto tardará en alcanzar el 75% de su capacidad?



**TEORÍA:** Porcentajes. Porcentajes encadenados.

33. De un colegio con 600 alumnos, el 50% son de Educación Primaria, el 35% de ESO y el 15% de Bachillerato. Halla el nº de alumnos de cada nivel. (Sol: 300 de primaria, 210 de ESO y 90 de Bachillerato)



34. En la liga de futbol en la que juego he metido 7 de los 48 goles de mi equipo. ¿Qué porcentaje he metido?. (Sol:14, 6%)



35. Un agricultor recogió el año pasado 120 toneladas de naranjas. Este año espera obtener un 30% más. ¿Cuántas toneladas espera obtener? (Sol:156 toneladas)

36. Me voy a comprar un ordenador de 950€. Hay un descuento de un 18%, ¿Cuánto me costará? (Sol:779€)

37. En Diciembre vi un abrigo que valía 60€. En Enero le hicieron un descuento de un 20% y en Febrero volvieron a subirle el precio un 20%. ¿Cuánto vale ahora?. (Sol: 57,6€)

38. El precio de un coche es de 11.400 euros. Al comprarlo me han hecho un descuento del 22 %, pero después había que pagar un 17% de impuestos de matriculación. ¿Cuál es el precio final?. (Sol: 10.403,64€)

39. Un artículo que vale 50 euros tiene los siguientes cambios de precio: primero sube un 30%, a continuación, baja un 15%, vuelve a bajar un 25%, y por último tiene una subida del 10%. ¿Cuál es su precio final? ¿Qué porcentaje ha variado respecto del precio inicial?. (Sol: Precio final: 45,58€ Descuento: 8,8375%)

40. En una reunión hay un 60 % de mujeres. Si hay 12 mujeres, calcula el número total de personas que han asistido a la reunión. (Sol: 20 personas)



41. Un reloj valía 32 euros, pero el relojero me lo ha rebajado y he pagado finalmente 28.80 euros. ¿Qué tanto por ciento me han rebajado?. (Solución: 10 %)



42. En un incendio han ardiendo el 40% de los árboles de un bosque. Si después del incendio quedan 4.800 árboles sin quemar, ¿cuántos árboles había al principio?. (Sol: 8000 árboles)



43. Un cliente ha comprado una lavadora por 375 euros. Estaba de oferta con un 20 % de descuento. ¿Cuál era el precio sin rebaja?. (Sol: 468,75 €)



44. Un depósito de agua está al 93% de su capacidad. Si se añaden 14.000 litros, quedará completo. ¿Cuál es la capacidad del depósito?. (Sol: 200.000 litros)



45. Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30% y en esa posición mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?. (Sol: 80 cm)



**TEORÍA:** Interés simple y compuesto.

46. Un banco ofrece un beneficio anual de un 3%. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos 900€ durante 3 años?.



47. Calcula el interés que producen 2000€ en 10 meses al 4% anual.



48. Antonio le prestó a Pepe 2500€ al 2% anual durante 4 años. ¿Cuánto tiempo tendrá que devolver Antonio cuando pase ese tiempo?.

49. ¿Qué interés recibiremos al invertir 5000€ al 3% anual si lo retiramos a los 2 meses y 9 días?.

50. ¿Cuánto tiempo tendremos que mantener 3000€ en el banco al 4% de interés para ganar 350€?.

51. ¿Qué rédito “ $r$ ” nos tendrá que dar el banco para ganar 200€ al invertir 2500€ durante 2 años?.



52. ¿Qué capital tendremos al cabo de 5 años si invertimos 20000€ al 3,5% anual con amortizaciones anuales?.



53. ¿Cuántos intereses ganaremos al meter 10000€ al 3% anual durante 3 años con amortizaciones anuales?.



## UNIDAD 3. SUCESIONES

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

**B2.C3.1.** Calcula términos de una sucesión numérica recurrente a partir de términos anteriores

**B2.C3.2.** Identifica la presencia de las sucesiones en la naturaleza y las finanzas y obtiene una ley de formación para el término general.

**B2.C3.3.** Identifica progresiones aritméticas y geométricas, expresa su término general, calcula la suma de los “n” primeros términos, suma los infinitos términos de una progresión geométrica de razón menor que 1 y emplea estas fórmulas para resolver problemas.

Resumen del tema:

### 1. Sucesiones generales

- Una sucesión es un conjunto ordenado de números reales  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ . A cada número de la sucesión se le llama término.

Ejemplos:

- a) 1, 2, 3, 4, 5, ... // b) 3, 7, 11, 14, 17, ...  
c) 3, 6, 12, 24, ... // d) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...  
e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... (Sucesión de Fibonacci)

- A la fórmula que nos permite calcular cualquier término de la sucesión le llamamos **término general**.

### 2. Cálculo de términos de una sucesión a partir de su término general.

- **Término general como fórmula:**

$$a_n = n^2 - 1 \rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0, a_2 = 2^2 - 1 = 3, a_3 = 3^2 - 1 = 8, \dots$$

- **Término general expresado de forma recurrente**

$$a_1 = 2, a_2 = 5, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 15 - 4 = 11$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 33 - 10 = 23$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 23 - 2 \cdot 11 = 69 - 22 = 47$$



### 3. Sucesiones aritméticas

- Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumándole o restándole una cantidad fija llamada diferencia (d)  
Ejemplo: a) 3, 5, 7, 9, 11, ... (d=2)  
b) 10, 7, 4, 1, -2, ... (d=-3)

- El **término general** de una sucesión aritmética se calcula con la siguiente fórmula donde  $a_1$  es el primer término de la sucesión y d la diferencia.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- **Suma de n términos** de una sucesión aritmética:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

### 4. Sucesiones geométricas

- Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando una cantidad fija llamada razón (r)  
Ejemplo: a) 1, 2, 4, 8, 16, ... (r=2)  
b) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ... (r=1/2)

- **Término general** de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- **Suma de n términos** de sucesión geométrica

$$S_n = a_1 \cdot \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$$

- **Suma de infinitos términos** sucesión geométrica

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-r}, \quad -1 < r < 1$$

**B2.C3.1. , B2.C3.2.** Sucesiones generales

**TEORÍA:** ¿Qué es una sucesión o progresión?. ¿A qué se llama término general de una sucesión?

1. Dadas las siguientes sucesiones calcula para cada una de ellas los términos indicados:



a) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...       $a_2 =$  \_\_\_\_\_       $a_5 =$  \_\_\_\_\_       $a_8 =$  \_\_\_\_\_       $a_9 =$  \_\_\_\_\_

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...       $a_2 =$  \_\_\_\_\_       $a_5 =$  \_\_\_\_\_       $a_8 =$  \_\_\_\_\_       $a_9 =$  \_\_\_\_\_

c) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...       $a_2 =$  \_\_\_\_\_       $a_5 =$  \_\_\_\_\_       $a_8 =$  \_\_\_\_\_       $a_9 =$  \_\_\_\_\_

d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...       $a_2 =$  \_\_\_\_\_       $a_5 =$  \_\_\_\_\_       $a_8 =$  \_\_\_\_\_       $a_9 =$  \_\_\_\_\_

1. Indica que regla siguen las siguientes sucesiones para la construcción de sus siguientes términos:



1,4,7,10,13,16,19... \_\_\_\_\_

1,2,4,8,16,32,... \_\_\_\_\_

1,4,9,16,25,36,... \_\_\_\_\_

1,-3,9,-27,81,... \_\_\_\_\_

2,4,6,10,16,26,... \_\_\_\_\_

110,90,70,50,30,... \_\_\_\_\_

6,8,16,18,26,28,36,38,... \_\_\_\_\_

2. Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:



Término general	Cálculo de sus 5 primeros términos
$a_n = 5+3(n+1)$	
$b_n = 2n^2 + 1$	

$c_n = (n+1)(n+2)$	
$d_n = \frac{2n-3}{3n}$	
$e_n = n^3$	
$f_n = 3n - 1$	
$g_n = 2n - 6$	

3. Dadas las siguientes sucesiones recurrentes, escribe sus 5 primeros términos:



$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , $a_1=2$ , $a_2=7$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$	$d_n = 5d_{n-1} - d_{n-2}$ , $d_1=2$ , $d_2=4$ $d_3 =$ $d_4 =$ $d_5 =$
$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ , $b_1=1$ , $b_2=1$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$	$e_n = 3e_{n-1} - 2e_{n-2}$ , $e_1=1$ , $e_2=1$ $e_3 =$ $e_4 =$ $e_5 =$
$c_n = 3c_{n-1} + 2c_{n-2}$ , $c_1=1$ , $c_2=2$ $c_3 =$ $c_4 =$ $c_5 =$	$f_n = 2f_{n-1} + n$ , $f_1=1$ $f_3 =$ $f_4 =$ $f_5 =$

4. Imagina que eres un investigador y que has estado estudiando el crecimiento de 4 plantas. Al final has obtenido las siguientes 4 fórmulas te dan la altura en centímetros de las plantas en función de “n” que representa el número de días de vida de la planta. A los 6 días de vida, ¿Cuál de las cuatro plantas es más alta?.



$a_n = n^2 - n$	$b_n = 5n - 2$	$C_n = 3 \cdot 2^n$	$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ , $d_1 = 1, d_2 = 3$
-----------------	----------------	---------------------	---

**B2.C3.3. Sucesiones aritméticas**

**TEORÍA. Sucesiones aritméticas**

¿Qué es una sucesión aritmética?

¿Cuál es el término general de una sucesión aritmética?

¿Cómo se calcula la suma de n términos de una sucesión aritmética?

5. Determina si las siguientes sucesiones son o no aritméticas:



- a) 2, 5, 8, 11, 14, ... \_\_\_\_\_
- b) 1, 10, 100, 1000, ... \_\_\_\_\_
- c) 2, 4, 8, 16, 32, ... \_\_\_\_\_
- d) 2, 4, 6, 8, 10, ... \_\_\_\_\_
- e) 8, 4, 0, -4, -8, ... \_\_\_\_\_
- f) 1, 3, 6, 10, 15, ... \_\_\_\_\_

6. En una progresión aritmética donde  $a_1=4^2$  y  $a_2=4^9$ , calcula el valor de “d” y el término  $a_5$ .



7. En una progresión aritmética donde  $a_5=8$  y  $d=-3$ , calcula el valor de  $a_1$  y  $a_9$ .



8. Calcula el término general de las siguientes sucesiones aritméticas:



a) 5, 6, 7, 8, 9, ...	$a_n =$
b) -2, 0, 2, 4, 6, ...	$b_n =$
c) -1, 1, 3, 5, 7, 9, ...	$c_n =$
d) 3, 6, 9, 12, 15, ...	$d_n =$

9. Calcula el término treinta de las siguientes sucesiones aritméticas



a) 8, 11, 14, 17, 20, ...	$a_n =$	$a_{30} =$
b) 9, 5, 1, -3, -7, ...	$b_n =$	$b_{30} =$
c) 2, 6, 10, 14, 18, ...	$c_n =$	$c_{30} =$

10. Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que  $a_{10}=34$  y  $d=3$ .



11. Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que  $a_{15}=40$  y  $d=2$ .



12. Calcula el primer término de una sucesión aritmética sabiendo que  $a_{12}=50$  y  $d=-4$ .



13. Calcula la diferencia  $d$  de una sucesión aritmética sabiendo que  $a_1=6$  y  $a_3=9$ .

14. Comprobamos que nosotros gastamos una media de 14 euros al mes en móvil. Al comprar el móvil nos gastamos 59€. ¿Cuánto nos habremos gastado en 3 años y 3 meses? ¿Y en 5 años y 7 meses?. Plantea la solución mediante sucesiones.



15. Nos hemos comprado una casa y hemos tenido que contratar una hipoteca. De entrada dimos 30000€ y de cuota mensual pagamos 550€. ¿Cuánto nos habremos pagado en 4 años y 5 meses?. Plantea este problema mediante sucesiones.



16. Si contratamos con la compañía de telefonía Symio nos cuestan las llamadas a 9 céntimos el minuto y con Yoigo a 12 céntimos cada minuto. En ambas el establecimiento de llamada es 15 céntimos. Este mes hemos hablado 1050 minutos. ¿Cuánto nos costaría con cada compañía?


17. Halla la suma de los 20 primeros términos de la sucesión 1,7,13,19,25, ...



18. Halla la suma de los 30 primeros términos de la sucesión 1,4,7,10,13, ...



19. ¿Cuántas cartas necesitamos para construir un castillo de 4 pisos como el de la imagen?. ¿Y para construir un castillo de 12 pisos?. El record del mundo se consiguió con un castillo de 60 pisos. ¿Cuántas cartas se necesitaron?. Plantea tu solución mediante sucesiones.



20. Halla la suma de los 150 primeros números pares.

21. Un nadador, se somete al siguiente entrenamiento: 11 largos de piscina el primer día y cada día que pasa aumenta en tres largos. ¿Cuántos largos hará en total en 40 días?



22. Se quiere construir un tejado de forma que en la primera fila haya 10 tejas, en la segunda 11, y así sucesivamente, hasta un total de 20 filas de tejas. ¿Cuántas tejas se necesitan?



23. ¿Cuánto dinero llevaba a sus vacaciones una persona si el primer día gastó 210 €, fue disminuyendo gastos en 10 € por día y el dinero le duró 20 días?



### B2.C3.3. Sucesiones geométricas

#### TEORÍA. Sucesiones geométricas

¿Qué es una sucesión geométrica?

¿Cuál es el término general de una sucesión geométrica?

¿Cómo se calcula la suma de  $n$  términos de una sucesión geométrica?

¿Y la suma de infinitos términos?

24. Determina si las siguientes sucesiones son o no geométricas:

- a) 2, 5, 8, 11, 14, ... \_\_\_\_\_
- b) 1, 10, 100, 1000, ... \_\_\_\_\_
- c) 2, 4, 8, 16, 32, ... \_\_\_\_\_
- d) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ... \_\_\_\_\_
- e) 2, 6, 12, 36, ... \_\_\_\_\_
- f) 1, -2, 4, -8, 16, ... \_\_\_\_\_





25. Calcula el término general de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 3,6,12,24,48 ...	$a_n =$
b) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ...	$b_n =$
c) 2, 10, 50, 250, ...	$c_n =$
d) 27, 9, 3, 1, 1/3, ...	$d_n =$



26. Calcula el término octavo de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 5, 2'5, 1'25, ...	$a_n =$	$a_8 =$
b) 1, 2, 4, 8, 16, ...	$b_n =$	$b_8 =$
c) 7, 14, 28, 56, ...	$c_n =$	$c_8 =$



27. Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que  $a_1=5$  y  $r=4$ .



28. Calcula los seis primeros términos de una sucesión geométrica sabiendo que  $a_1=5$  y  $a_2=3$ .



29. En una sucesión geométrica  $a_5=2$  y  $a_7=8$  . Halla la razón y los 5 primeros términos

30. Una célula se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?

Célula madre
Dos células hijas

31. Un coche va perdiendo un 11% de su valor cada año. Si al principio costaba 30000€, ¿Cuánto valdrá dentro de 7 años?. Plantea el problema en términos de sucesiones.

32. A Isabel y Andrés les han confiado, a las nueve de la mañana, un secreto. Cada uno de ellos, al cuarto de hora, se lo han contado a tres amigos. Estos a otros tres,...,etc. ¿Cuánta gente lo sabrá a las 2 de la tarde?

33. Si hay un crecimiento anual de un 6% y una población de 40 millones de personas. ¿Cuál será la población dentro de 10 años?

34. Una vivienda de  $90 \text{ m}^2$  en Albacete costaba  $90000\text{€}$  hace 10 años. Teniendo en cuenta que el crecimiento medio anual en esos 10 años ha sido de un 14%. ¿Qué precio tendría ahora esa casa?





35. Calcula la suma de los 10 primeros términos de la sucesión 2, 6, 12, 24, 48, ...



36. Calcula la suma de los 6 primeros términos de la sucesión que tiene  $a_1=4^6$  y  $r=2^5$ .



37. Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con  $a_1=6$  y  $r=0^5$ .



38. Calcula la suma de los infinitos términos de una sucesión con  $a_1=60$  y  $r=-0^2$ .



## HOJA DE REPASO PARA EL EXAMEN

Sucesiones Aritméticas	Sucesiones Geométricas
<b>Término general</b> $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	<b>Término general</b> $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$
<b>Suma de n términos</b> $S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$	<b>Suma de n términos</b> $S_n = a_1 \cdot \frac{(r^n - 1)}{r - 1}$
	<b>Suma de <math>\infty</math> términos si <math>-1 &lt; r &lt; 1</math>,</b> $S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-r}$

### Progresiones Aritméticas

1. Hallar los términos que se indican de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) El término 20 en: 1, 6, 11, 16...    b) El término 6 en: 3, 7, 11, 15...  
c) El 12 en: -4, 0, 4, 8...    d) El término 10 en: 2, 5, 8, 11...

Sol: a) 96; b) 23; c) 40; d) 29

2. Calcula el término general de las siguientes sucesiones:

- a) -1,1,3,5,7,9    b) 3,6,9,12,15,18  
c) 5,6,7,8,9    d) -2,0,2,4,6

Sol: a)  $2n-3$ ; b)  $3n$ ; c)  $n+4$ ; d)  $2n-4$

3. Calcula el primer término de una progresión aritmética que consta de 10 términos, si se sabe que el último es 34 y la diferencia es 3. Sol: 7

4. Halla la suma de los términos de una progresión aritmética en los siguientes casos:

- a) De los 10 primeros términos de: 1, 6, 11...  
b) de los 20 primeros términos de: 22, 23, 24...  
c) De los 30 primeros términos de:  $1/2, 3/4, 1...$

Sol: a)  $a_{10}=46, S=235$ ; b)  $a_{20}=41, S=630$ ; c)  $a_{30}=31/4, S=495/4$ .

5. Halla la suma de los números pares: 2, 4, 6, ..., 100. Sol: 2550

6. El número de usuarios de un polideportivo los fines de semana comenzó siendo de 150 personas y aumentó en 30 personas cada fin de semana a partir de entonces. ¿Cuántas personas asistieron al polideportivo a los 6 meses? Sol:  $a_{24}=840$

7. Mar ahorra cada mes 5€ más que el mes anterior. En 5 años sus ahorros sumarán 9330€. Determina lo que ahorró el primer mes y lo que ahorró el último mes. Sol:  $a_1=8$  ;  $a_{60}=303$

8. La población mundial ha pasado en 40 años de 2500 millones a 5500 millones de habitantes. Calcula la diferencia anual si suponemos que sigue una progresión aritmética e indica que población habrá dentro de 20 años. Sol:  $d=75$  ; 7000

9. Imagina que te ofrecen un contrato de trabajo con las siguientes condiciones: el primer día cobras 15 € y cada día aumentas 60 céntimos. ¿Cuánto te pagarán por trabajar el día 30 del mes?. ¿Cuánto cobras en total si el mes tiene 30 días? Sol:  $a_{30}=32,4€$ ,  $S_{30}=711€$

10. ¿Pertenece el número capicúa 373 a la sucesión 9, 13, 17, 21, ... ? ¿Qué lugar ocupa? Sol: Sí, lugar 92

## Progresiones Geométricas

1. Prueba cuales de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no. Y de las que sean calcula su razón.

a) 5, 5/3, 5/9, 5/27, ...    b) 3, 12, 60, ...    c) 54, 36, 24, 16, ...

Sol: a) Si  $r=1/3$ ; b) No; c) Si  $r=2/3$

2. El número de bacterias de un cultivo está aumentando un 25 % cada hora. Si al principio había 300000 ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 5 horas? Sol: 915527 bacterias

3. Un padre decide colocar en una hucha 1€ el día que su hijo cumpla un año, e ir duplicando la cantidad sucesivamente en todos los cumpleaños para hacerle un buen regalo a la mayoría de edad. ¿Cuánto tendrá que colocar el día que su hijo cumpla 18 años? ¿Cuánto habrá en la hucha en total? Sol:  $2^{17}€$ , 262143€

4. El valor de un auto se deprecia 18 % cada año. Su precio original fue 19000 €. ¿Cuánto valdrá al cabo de 9 años? Sol:  $a_{10}=3185 €$

5. Una máquina costó 9000 €. Se calcula que al final de cada año sufre una depreciación igual al 15 % del valor que tiene al principio de ese año. ¿Cuál será su valor al cabo de 5 años? Sol:  $a_6=3993,35€$

6. La población de una ciudad aumenta en 35 % cada 10 años. Si su población en 1940 era de 40000 habitantes, ¿cuál será su población en el año 2020? Sol:  $a_9=441296$  habitantes

7. Antonio dispone de 500 € para el próximo viaje de estudios. Decide ingresarlo en un banco que le ofrece un 2,5 % de interés continuo mensual, es decir que cada mes se incrementa su dinero y se le aplica el %. Si todavía faltan 15 meses para el viaje, ¿cuanto dinero tendrá para entonces? Sol:  $a_{13}=724,14€$

8. Un piloto de coches quiere llegar a la meta en un circuito de 200 Km. Cuando lleva recorridos 90 Km se le para el coche pero consigue que le vuelva arrancar. Conforme avanza el coche se le vuelve a parar 45 Km después y vuelve a arrancar. Así le ocurre sucesivamente cuando lleva recorrida la mitad de la distancia de la parada anterior. ¿Conseguirá llegar a la meta? Sol: No, si lo hiciera infinitas veces recorrería 180 km.

9. Un amigo te comenta que hay un puesto vacante en el Concesionario en el que trabaja. Te dice que cobrarás una parte fija y una comisión. Él cobró en Enero 2460 € por vender 14 coches y en Febrero 3630 € por vender 23 coches. Te pones tan eufórico que se te olvidan pedirle los detalles del sueldo.

a) Con los datos que te ha dado sobre su sueldo, calcula cuál será su parte fija y cuál la comisión por coche.

b) ¿Cuánto cobrarás tu si consigues vender 17 coches? Sol: a)  $d=130$  y  $a_1=640€$ , b)  $a_{18}=2850€$

10. Dibuja un cuadrado de 8 cm. de lado. Uniendo los puntos medios se obtiene otro cuadrado inscrito en el anterior. Repitiendo este proceso se obtiene una sucesión de infinitos cuadrados. Comprobar que los valores de las áreas de los infinitos cuadrados forman una progresión geométrica y calcular la suma de todas las áreas. Sol:  $16 \text{ cm}^2$

## UNIDAD 4. LENGUAJE ALGEBRAICO. POLINOMIOS

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

**B2.C4.1.** Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.

**B2.C4.2.** Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.

**B2.C4.3.** Factoriza polinomios con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.

Resumen del tema:

### 1. Álgebra y Lenguaje Algebraico

- El **Álgebra** es la parte de las matemáticas que utilizas letras para trabajar con números desconocidos.
- El **Lenguaje Algebraico** es el lenguaje que nos permite traducir situaciones de la vida real a lenguaje matemático mediante el uso de letras en combinación con símbolos y números.
- Una combinación de n<sup>o</sup>s y letras se denomina expresión algebraica.

Ejemplo: Doble de un n<sup>o</sup> más su mitad  $\rightarrow 2x + \frac{x}{2}$

### 4. Operaciones con monomios

- Suma  $3a + 4a = 7a$  ;  $2x + 3x = 5x$  ;  $a + b = \text{No}$
- Resta  $6b - 3b = 3b$  ;  $4x - 2x = 2x$  ;  $x - y = \text{No}$
- Producto  $3x^2 \cdot 5x^3 = 15x^{2+3} = 15x^5$  ;  $4a \cdot 5b = 20ab$  ;
- Cociente  $4a^4 : 2a^2 = (4:2)a^{4-2} = 2a^2$

Nota:  $3x + 4y = \text{No se puede}$ ;  $3x \cdot 4y = 12xy$

### 5. Polinomios. $P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Grado del  $P(x) \rightarrow n$  // Término independiente  $\rightarrow a_0$

#### Operaciones con polinomios

Suma/Resta  $(P(x) \pm Q(x))$  // Producto  $(P(x) \cdot Q(x))$  //

División  $(P(x) : Q(x))$

<https://www.youtube.com/watch?v=sqSzkXrbmtA>

### 6. División de Ruffini

<https://www.youtube.com/watch?v=Rp3LEbCfNFs>

#### Sacar factor común

<https://www.youtube.com/watch?v=XvRwXCvZ-Lc>

**Productos notables**  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  //  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

### 2. Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el n<sup>o</sup> que resulta de sustituir las letras por los valores indicados y realizar las operaciones.

Ejemplo: Si  $P(x,y) = x^2 \cdot y + x \rightarrow P(2,1) = 2^2 \cdot 1 + 2 = 6$

### 3. Partes de una expresión algebraica

Una expresión algebraica puede estar formada por uno o varios sumandos llamados **monomios**. Una suma de monomios se llama **polinomio**.

$3x$  ,  $4xy$  son Monomios  $\rightarrow 3x + 4xy$  es Polinomio

Dada el monomio  $3 \cdot x^1 \cdot y^2 = 3xy^2$  , entonces:

**Coficiente:** N<sup>o</sup> de la expresión  $\rightarrow 3$

**Parte literal:** Letras de la expresión  $\rightarrow xy^2$

**Grado:** Suma de exponentes de las letras  $\rightarrow 1+2=3$



**B2.C4.1.** Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana

1. Completa la siguiente tabla:



	<u>Respuestas</u>	<u>Justificación</u>
Piensa un número.		
Súmale 3.		
Multiplica el resultado por 2.		
Ahora súmalo 4.		
Divide entre 2.		
Resta, al resultado obtenido, el nº que habías pensado al principio.		
Resultado: 5		

2. Completa la siguiente tabla:



	<u>Respuestas</u>	<u>Justificación</u>
Piensa un número.		
Muúltiplicálo por 3		
Suma 6		
Divide entre 3		
Resta, al resultado obtenido, el nº que habías pensado al principio.		
Resultado: 2		

3. Matemáticas chocolateras. El juego para saber lo que te gusta el chocolate.



	<u>Respuestas</u>
¿Cuántas veces por semana te apetece comer chocolate? (Debe ser un número entre 1 y 9 veces)	
Multiplica este número por 2 (para que sea par)	
Suma 5	
Multiplica el resultado por 50.	
Si ya has cumplido años en el 2021 suma 1771. Si aún no ha sido tu cumple este año suma 1770.	
Ahora resta el año en que naciste (número de cuatro dígitos).	

4. Completa la siguiente tabla con la expresión algebraica correspondiente a cada frase:

1) Doble de un número menos su cuarta parte.		30) Dividir 25 en dos partes.	
2) Años de Ana dentro de 12 años.		31) Suma número al cuadrado y su consecutivo	
3) Años de Isabel hace tres años.		32) La suma de un $n^2$ y su siguiente al cuadrado	
4) La cuarta parte de un $n^2$ más su siguiente.		33) El cociente entre un número y su cuadrado.	
5) Perímetro de un cuadrado.		34) La diferencia de dos impares consecutivos.	
6) Un número par.		35) El producto de un $n^2$ con su consecutivo.	
7) Un número impar.		36) Diferencia de 2 $n^2$ consecutivos al cuadrado	
8) Un múltiplo de 7.		37) Triple de un número elevado al cuadrado.	
9) Dos números enteros consecutivos.		38) Restar 7 al duplo de un $n^2$ al cuadrado.	
10) Dos $n^2$ que se diferencian en dos unidades.		39) Roberto es cinco años más joven que Arturo	
11) El doble de un $n^2$ menos su quinta parte.		40) Antonio tiene 20 euros más que Juan.	
12) El quíntuplo de un $n^2$ más su quinta parte.		41) Carmen supera a Concha en tres años.	
13) La edad de una señora es el doble de la de su hijo menos 5 años.		42) El precio de "m" libros a 49 euros cada uno.	
14) Dos $n^2$ se diferencian en 13 unidades.		43) El $n^2$ que es la cuarta parte del número "y".	
15) Dos números suman 13.		44) Dos múltiplos de tres consecutivos.	
16) Un hijo tiene 22 años menos que su padre.		45) El 25% de un número.	
17) Dos números cuya suma es 25.		46) Lo que cuestan "c" metros de cuerda si cada metro cuesta 8 euros.	
18) La cuarta parte de la mitad de un número.		47) Beneficio al vender un artículo que cuesta "a" euros por "b" euros.	
19) Dimensiones de un rectángulo en el que su largo tiene 6 metros más que el ancho.		48) Lo que cuesta un lápiz si 15 cuestan "p" euros.	
20) Un tren tarda tres horas menos que otro en ir de Madrid a Barcelona.		49) El número que representa 12 unidades más que el número "x".	
21) Repartir x manzanas entre seis personas.		50) La edad de Juan es ocho veces la de Rafael.	
22) Un $n^2$ es 10 unidades mayor que otro.		51) $n^2$ que representa 20 unid. menos que "h"	
23) Un número menos su mitad más su doble.		52) $n^2$ que es tres veces mayor que "n".	
24) Un número 5 unidades menor que otro.		Rebaño de "x" ovejas: 53) $n^2$ de patas.	
25) El cuadrado de un número.		54) Número de patas si se mueren 6 ovejas.	
26) Un número y su opuesto.		55) $n^2$ de ovejas después de nacer 18 corderillos	
27) Un número y su inverso.		56) Número de ovejas después de dos años si el rebaño crece un cuarto al año.	
28) Veinticinco menos el cuadrado de un $n^2$ .		57) Ana tiene "x" €. Enrique tiene 100€ más.	
29) El cuadrado de un $n^2$ menos su cuarta parte.		58) Susana tiene el doble de Enrique.	
30) Dividir 25 en dos partes.		59) Charo tiene 400 euros menos que Susana.	

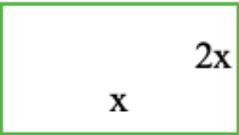
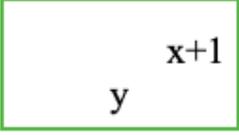
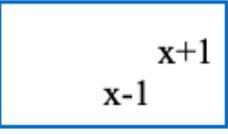
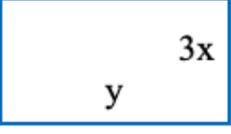
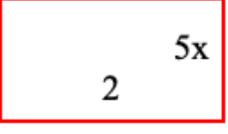
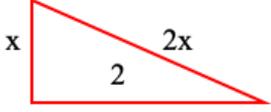


5. Traduce las siguientes frases a lenguaje algebraico:

a) El quíntuplo de un número menos 6 unidades.	
b) El cuádruple del resultado de sumar 3 unidades a un número.	
c) Si ando $\frac{2}{7}$ del camino más 3 km habré andado la tercera parte del camino.	
d) El perímetro de un rectángulo cuyo largo es el doble que el alto.	
e) El triple de un número menos la mitad del número.	
f) El doble del resultado de restar 5 al número.	
g) El producto de dos números seguidos.	
h) Un múltiplo de 5 mas 4.	
i) La mitad del cuadrado de un número más 5 unidades.	
j) La suma de la edad de un padre y un hijo hace 3 años.	
k) La edad de María dentro de 5 años será el triple que la de su hermano.	
l) Envasar 1500 litros de vino en botellas de 1 litro y de 2 litros.	
m) El cuadrado de la diferencia de 2 números es 4.	



6. Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estas figuras.

 <p>Perímetro: Área:</p>	 <p>Perímetro: Área:</p>
 <p>Perímetro: Área:</p>	 <p>Perímetro: Área:</p>
 <p>Perímetro: Área:</p>	 <p>Perímetro: Área:</p>

7. Inventa un problema cuya solución sea la siguiente ecuación  $x+(x+1)+(x+2)= 63$

8. Inventa un problema cuya solución sea la siguiente ecuación  $x+x/3= 40$

9. Inventa un problema cuya solución sea  $x \cdot (x+3)=240$

10. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones de la vida real:

a) De un barril de vino sacan  $1/3$  de lo que le cabe, luego  $2/5$  de lo que le queda y al final 10 litros. ¿Qué expresión representa el vino que han sacado?

b) Compré dos abrigos por 80€. Uno estaba rebajado un 20% y el otro un 30%. Indica la expresión algebraica que representa el precio de cada uno.

c) Un bocadillo vale 1€ más que una botella de agua. Por 3 bocadillos y dos aguas he pagado 8€.

11. Traduce a lenguaje algebraico las siguientes situaciones de la vida real:

a) La expresión  $10a+b$  representa un número de 2 cifras. Escribe en forma algebraica un número de 3 cifras.

b) Un grupo de amigos quiere comprar un regalo a María y tocan a 12€ cada uno. Si fueran 3 amigos más tocarían a 4€ menos cada uno. ¿Qué expresión algebraica representa la igualdad entre las dos frases anteriores?.

12. Inventa un problema de la vida real cuya solución sea  $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 3y = 20 \end{cases}$

13. Inventa un problema de la vida real cuya solución sea  $\begin{cases} x + y = 20 \\ 0,4x - 0,2y = 40 \end{cases}$

**TEORÍA. Monomios. Coeficiente, parte literal y grado.**

14. Completa la siguiente tabla:



Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variables	Grado
$-9x^4$				
$2x^4y^3$				
$4wt^2$				
$4x^2y$				
	23	$ab^2$		
$-6hg$				
7...		qg		

**TEORÍA. Operaciones con monomios.**

15. Opera con los siguientes monomios:



a) $x + x =$	b) $3x^3 - 2x^3 - 5x^3 =$	c) $a + 4a =$	d) $4n - 6n =$
e) $2m^5 + m^5 + 4m^5 =$	f) $6c - 8c + 2c =$	g) $6a - 3b + 2a + 7b =$	h) $3t - 5t + t =$

16. Opera con los siguientes monomios:



a) $3x \cdot 5x =$	b) $(-a) \cdot 4a =$	c) $\frac{x^2}{2} \cdot 6x =$	d) $\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^3}{3} =$
e) $(-3x^2) \cdot 6x =$	f) $-xy^3 \cdot 5y^2 =$	g) $14a^6 : 2a^2 =$	h) $3t - 5t + t =$

17. Opera con los siguientes monomios:



a) $6x^2 - 4x + 5 - 7x^2 - 6x - 9 =$	b) $8 - 2a + a^2 - 9a + 5 =$
c) $(2x + 3) - (5x - 6) =$	d) $(5x^2 - 3x) - (-3x^2 + 2x - 5) =$
e) $(-5xyz) \cdot 6x^2z =$	f) $\left(-\frac{3}{5}x^4\right) \cdot 20x^2 =$
	g) $\frac{2}{3}a^3 : \frac{3}{4}a =$

18. Simplifica los siguientes cocientes entre monomios:



a) $\frac{8x^3y^2}{2xy} =$	b) $\frac{6a^4b^3}{3ab^2} =$
c) $\frac{18x^7y^4}{6x^2y} =$	d) $\frac{15x^3y^2}{3x^4y} =$

**TEORÍA. Polinomios. Grado y término independiente.**

19. Indica el grado y el término independientes de los siguientes polinomios:



Polinomio	Grado	Término independiente
$-3x^2y^3 - 4x^4 + 3x^2y + 6xy$		
$x^3 - 4x^2 - x + 7 + 2x^3y^3$		
$x^3y^6 - 11x^2 - x^2y^8 + 6$		

**TEORÍA. Valor numérico de un polinomio.**

20. Halla el valor numérico de las siguientes expresiones en los números que se indican:



a) $P(x) = \frac{x-2}{x+5}$ en $x=1$	b) $Q(x) = x^2 - 2x + 6$ en $x=0$	c) $R(x) = \frac{x+2}{x-4}$ en $x=2$
--------------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------------

d) $S(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ en $x=1, y=2$	e) $T(x)=xy^2-xy$ en $x=2, y=-1$	f) $U(x)=\frac{x-3}{x+1}$ en $x=-2$
g) $V(a,b)=\frac{a+b-2}{b+5}$ en $a=1, b=-1$	h) $W(x)=\frac{10}{x} + x$ en $x=5$	i) $Z(x)=x^3-4x^2-x$ en $x=-1$

21. Dados  $P(x)=2x^3 -x^2 +4x-1$ ,  $Q(x)=-x^4 -x-5$  y  $R(x)=x^2 -3x+2$  . Calcular:



a) $P+Q+R$
b) $P-Q$
c) $P \cdot R$
d) $Q \cdot R - P$



22. Calcula los siguientes productos de polinomios:

a) $3 \cdot (2x + 5) =$	b) $7 \cdot (x - 3x^2) =$
c) $x^2 \cdot (5x - 3) =$	d) $3x \cdot (x^2 - 2x) =$
e) $(4 + x) \cdot (3x - 2) =$	f) $(2x - 3) \cdot (x + 4) =$
g) $(4 - x) \cdot (2x - 1) =$	h) $(x^2 + 2x - 3) \cdot (3x^2 + 5x - 4) =$

23. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:



a) $(x + 1) \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (x^2 + 1)$
b) $(2x - 5) \cdot (x + 2) + 3x \cdot (x + 2)$
c) $(x - 3) \cdot (x + 1) - (x + 5) \cdot (x - 2)$

**TEORÍA. Productos notables.**

24. Desarrolla los siguientes productos notables:



a) $(x+2)^2=$	b) $(2y-1)^2=$
c) $(x-3)(x+3)=$	d) $(2a+3b)^2=$
e) $(3b-7)^2=$	f) $(2x+5)(2x-5)=$
g) $(3x+4)^2=$	h) $(1-2x)^2=$
i) $(\frac{x}{3} + 6)^2=$	j) $(2x-\frac{1}{2})(2x+\frac{1}{2})=$

25. Transforma en productos notables las siguientes expresiones:



a) $4x^2 + 8x + 4 =$	b) $x^2 - 6x + 9 =$
c) $9x^2 - 36 =$	d) $a^2 - 2a + 1 =$
e) $x^2 + 2xy + y^2 =$	f) $b^2 - 25 =$
h) $x^4 + 2x^2 + 1 =$	g) $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$

26. Realiza las siguientes operaciones en las que intervienen productos notables:



a) $(x+1)^2 - (x+1)(x-1)=$
b) $(3x-2)^2 - (3x+2)^2 =$
c) $(2x-1)(2x+1) - (2x-1)^2 =$

**TEORÍA. Sacar factor común.**

27. Extrae factor común:



a) $18x^4 + 32x^2 =$	b) $6x^2 + 12x - 24 =$
c) $6x^3 - 10x^2 - 8x =$	d) $2xy + 6x^2y - 4x^2y^2 =$
e) $9a + 6a^2 + 3a^3 =$	f) $2x - 6xy - 4zx =$
g) $2x^2 - 4x^3 + 8x^4 =$	h) $6x^2(x+1) - 3x^2(x-1) =$
i) $2xyz + 10xz + 4yz =$	j) $3(x+1) + 6(x+1)^2 =$

**TEORÍA. División de polinomios**

$(2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4) : (x^2 - 2x + 1)$

28. Realiza la siguiente división de polinomios para obtener el cociente y el resto:



$(5x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 4) : (x^3 - 4)$

### TEORÍA. Método de Ruffini para divisiones del tipo $P(x):(x-a)$

$$(2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 5x + 4) : (x - 1)$$

29. Realiza las siguientes divisiones por el método de Ruffini para obtener el cociente y el resto:



a)  $(5x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 4) : (x - 2)$

b)  $(x^3 - x^2 + 3x - 9) : (x + 1)$

c)  $(5x^3 - 3x^2 - 4) : (x - 3)$

d)  $(x^5 - 2x^4 + 3x - 1) : (x + 2)$

### TEORÍA. Método de Ruffini para descomponer polinomio como producto de factores

Descomponer  $x^3-4x^2+x+6$

30. Descompón los siguientes polinomios como producto de factores:



a)  $x^3-3x+2$

b)  $x^4-x$

c)  $x^3-7x+6$

## UNIDAD 5. ECUACIONES Y SISTEMAS.

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

**B2.C5.1.** Plantea y resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

**B1.C1.1, B1.C2.1** Resuelve problemas de álgebra

Resumen del tema:

### 1. Resolución de ecuaciones de 1º grado

Para aprender a resolverlas las clasificamos en tipos

- Tipo 1 ( $x \pm a = b$ ). Ej:  $x - 2 = 3 \rightarrow x = 3 + 2 \rightarrow x = 5$
- Tipo 2 ( $ax = b$ ). Ej:  $2x = 8 \rightarrow x = 8/2 = 4$
- Tipo 3 ( $x/a = b$ ). Ej  $x/2 = 6 \rightarrow x = 2 \cdot 6 = 12$
- Tipo 4 ( $ax + b = c$ ). Ej:  $2x + 3 = 5 \rightarrow 2x = 5 - 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$
- Tipo 5 (varias x). Agrupamos las x en un lado, las unimos y se nos convierte en un tipo anterior.
- Tipo 6 (con paréntesis). Quitar los paréntesis y se convertirá en una ecuación de tipo 5.
- Tipo 7 y 8 (con denominadores). Poner común denominador a toda la ecuación y tacharlo para obtener finalmente una ecuación de un tipo anterior.

### 2. Resolución de ecuaciones de grado $\geq 2$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

#### Ecuaciones incompletas

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow x = 0 ; x = -b/a$$

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

<https://drive.google.com/file/d/1JCOlrHY39q8274fXvFzMGcXyULNe3-ut/view?usp=sharing>

<https://drive.google.com/file/d/14tMQGqYx8whcRWrfyLdYXu2dgWehs16/view?usp=sharing>

#### Ecuaciones Bicuadradas

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \rightarrow \text{Cambio } y = x^2. \text{ Resolver } ay^2 + by + c = 0$$

Con las soluciones  $y_0, y_1$ , despejar  $x^2 = y_0 ; x^2 = y_1$

<https://www.youtube.com/watch?v=GpsgWkhieC8>

#### Ecuaciones de grado $\geq 3$

Expresar  $P(x) = 0$  y factorizar utilizando Ruffini.

<https://drive.google.com/file/d/1ewCcwIW7aA3qPmhWzEHHcupd6jUamRLq/view?usp=sharing>

### 3. Sistemas de ecuaciones

Casos al resolver un sistema de ecuaciones:

- Sistema Compatible Determinado (SCD)  $\rightarrow$  Tienen una única solución
- Sistema Compatible Indeterminado (SCI)  $\rightarrow$  Tiene infinitas soluciones (alguna ecuación se convierte en  $0=0$ )
- Sistema Incompatible (SI)  $\rightarrow$  Sin soluciones (alguna ecuación se convierte en  $n^\circ = 0$ )

Métodos de resolución:

Sustitución, igualación y reducción.

Método gráfico:

Despejar y en ambas ecuaciones, crear tablas de valores y representar gráficamente.



**B2.C5.1. Ecuaciones de grado 1**

**TEORÍA. Recordamos como resolver ecuaciones de grado 1**

	Visualiza el vídeo 1 de Álgebra “Ecuaciones de grado 1” y completa los siguientes apartados:	 
---	--	---

i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $3(x+1)-4(x-2)=x+7$

ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $\frac{3x-1}{20} - \frac{2(x+3)}{5} = \frac{4(x+2)}{15} - 5$



b)  $2(1+x)-3(x-1)-6=x-11$

(Sol:5)

c)  $-5(2-x)+3(2x+4)=(4x-2)\cdot 5$

(Sol: 4/3)

d)  $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

(Sol: -2)

e)  $\frac{x+1}{5} + \frac{x-2}{6} = 1$

(Sol: 34/11)

f)  $\frac{2x+4}{4} - 2(x-3) = 5 - \frac{7x}{2}$

(Sol: -1)

$$g) \frac{x-2}{6} - \frac{3-2x}{5} = 6 - x$$

(Sol: 208/47)

$$h) \frac{-1}{3} \left( 8 - \frac{4x}{2} \right) + x = -3 \left( \frac{7+x}{3} \right)$$

(Sol: -13/8)

**B1.C1.1., B1.C2.1** Problemas de ecuaciones de grado 1

4. Calcula un número que sumado con su anterior y con su siguiente dé 114. (Sol: 38)



5. Halla un número que multiplicado por 3, sumándole luego 10, multiplicando lo obtenido por 5, agregándole 10 y multiplicando finalmente el resultado por 10 da 750. ¿Qué número es?. (Sol:1)



6. La suma de tres números es 72. El segundo es  $\frac{1}{5}$  del tercero y el primero excede al tercero en 6. Hallar dichos números. (Sol: 6, 36 y 30)

7. Halla 3 números impares consecutivos que sumen 105. (Sol: 33, 35 y 37)

8. Una madre tiene el cuádruplo de la edad de su hijo, y dentro de cinco años, tendrá el triple de años que él. Indicar que edad tienen ambos. (Sol: Madre 40 años e hijo 10 años)

9. Un padre tiene 47 años y su hijo 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea triple que la del hijo?. (Sol: 7 años)

10. En un rectángulo la base mide 18 cm más que la altura y el perímetro mide 76 cm ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo? . (Sol: 10x28 cm)

11. Un abrigo ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma el precio inicial ha disminuido 4,8€. ¿Cuál era el precio inicial? (Sol: 60€)

12. ¿Cuántos litros de vino de 1,60€/l tenemos que añadir a 60 litros de vino de 2,80 €/l para obtener una mezcla de 2,50 €/l?. (Sol: 20 litros)

### B2.C5.1. Ecuaciones de grado 2

#### TEORÍA. Resolver ecuaciones de grado 2



Visualiza el vídeo 2 de Álgebra “Ecuaciones de grado 2” y completa los siguientes apartados:



(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $x^2-5x+6=0$

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $x^2+x-12=0$

(iii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $x^2-5x=0$

(iv) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $2x^2-18=0$

(v) Inventa una ecuación de 2º grado que tenga como soluciones 7 y 8



13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

(Sol: 3 y 4)

b)  $x^2 + x + 1 = 0$

(Sol: Sin solución)

c)  $x^2 - 6x = -9$

(Sol: -3)

d)  $x^2 = 5x + 6$

(Sol: 6 y -1)

e)  $2x^2 + 7x + 6 = 0$

(Sol: -2 y  $3/2$ )

f)  $3x^2 - 16x + 5 = 0$

(Sol: 5 y  $1/3$ )

g)  $x^2-4=0$

(Sol: 2 y -2)

h)  $x^2+3x=0$

(Sol: 0 y -3)

i)  $3x^2-27=0$

(Sol: 3 y -3)

j)  $2x^2-4x=0$

(Sol: 0 y 2)

k)  $6x^2-42x=0$

(Sol: 2 y -2)



Visualiza el vídeo 3 de Álgebra “Ecuaciones de grado 2 con operaciones” y completa los siguientes apartados:



(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $(x+1)^2-(x-3)\cdot(x+3)=0$

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $(2x+2) \cdot (x-6) - (x+3) \cdot (x-5) = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:



a)  $(x+4)^2 - (x-3)^2 = -7$

(Sol: -1)

b)  $7(x-3) - 5(x^2-1) = x^2 - 5(x+2)$

(Sol: 1)

c)  $1 - \frac{x^2}{3} - \frac{3x+2}{3} = 1$

(Sol: -2 y -1)

d)  $(x+2)^2 - (x-1)^2 = x(3x+4) + 8$

(Sol:  $-1/2$  y  $-1/3$ )

e)  $\frac{x^2}{3} + 2 = \frac{5x}{3}$

(Sol: 2 y 3)

f)  $(5x-4)^2 - (3x+5)(2x-1) = 20x(x-2) + 27$

(Sol:  $-1$  y  $-6$ )

g)  $(x-3)(x-2) + \frac{x(x-3)}{2} = (x-2)^2$

(Sol: 1 y 4)

**B1.C1.1., B1.C2.1** Problemas de ecuaciones de grado 2

15. La suma de un número y su cuadrado es 30. Hallar dicho número. (Sol: 5)

16. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 m menos que la hipotenusa y 3 m más que el otro. Hallar los lados y el área del triángulo. (Sol: 12, 9, 15. Área=54 m<sup>2</sup>)

17. Un campo rectangular tiene 80 m<sup>2</sup> de área y 2 m de largo más que de ancho. Halla los lados. (Sol:8 y 10)

18. Halla el perímetro de un cuadrado sabiendo que su área es 64 m<sup>2</sup>. (Sol: 32 m)

**B2.C5.1.** Ecuaciones de grado  $>2$

**TEORÍA.** Ecuaciones bicuadradas.

19. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:



a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(Sol: 1, -1, 2 y -2)

a)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(Sol: 1, -1, 3 y -3)

a)  $x^4 - 4x - 5 = 0$

(Sol:  $\sqrt{5}$  y  $-\sqrt{5}$ )

**TEORÍA. Ecuaciones de grado  $>2$  por el método de Ruffini.**

	Visualiza el vídeo 4 de Álgebra “Regla de Ruffini” y completa los siguientes apartados:	 
--	---	---

1. Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $x^3-4x^2+x+6=0$

2. Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $x^4+2x^3-x-2=0$



20. Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de Ruffini:

a)  $x^3 - 3x + 2 = 0$

b)  $x^4 + 3x^2 - 4x = 0$

**B2.C5.1. Sistemas de ecuaciones**

**TEORÍA. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.**



Visualiza el vídeo 5 de Álgebra “Sistemas de ecuaciones” y completa los siguientes apartados:



(i) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$  por sustitución.

(ii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$  por reducción.

(iii) Incluye la resolución que aparece en el vídeo de la ecuación  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$  por igualación.

(iv) Comprueba que  $x=1$ ,  $y=1$  es solución del sistema  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - y = 5 \end{cases}$  tal y como se hace en el vídeo.

(v) Comenta los dos casos especiales de los que se habla en el vídeo a la hora de resolver sistemas...

21. Resuelve los siguientes sistemas por sustitución:



a)  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

(Sol:  $x=1$ ,  $y=1$ )

b)  $\begin{cases} 7x - 2y = 3 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

(Sol:  $x=1$ ,  $y=2$ )

$$c) \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 5x - 3y = 19 \end{cases}$$

(Sol:  $x=2, y=-3$ )



22. Resuelve los siguientes sistemas por igualación:

$$a) \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$

(Sol:  $x=4, y=5$ )

$$b) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 6y = -1 \end{cases}$$

(Sol:  $x=1/2, y=1/4$ )

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 1 \\ \frac{x}{4} - y = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

(Sol:  $x=1, y=1/2$ )



23. Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

a) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

(Sol:  $x=1, y=1$ )

b) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$$

(Sol:  $x=-2, y=3$ )

c) 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$$

(Sol:  $x=3, y=-1$ )

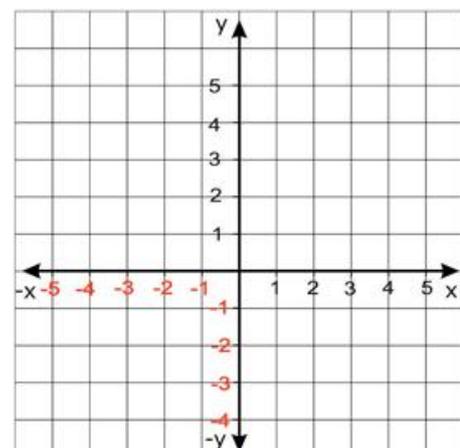
24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:



a) 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

x	y

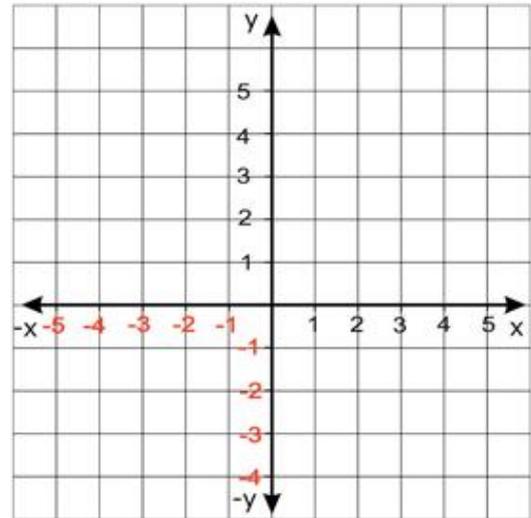
x	y



b) 
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

x	y

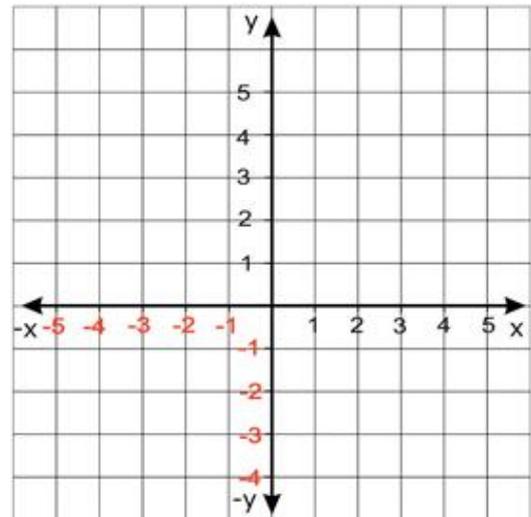
x	y



c) 
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

x	y

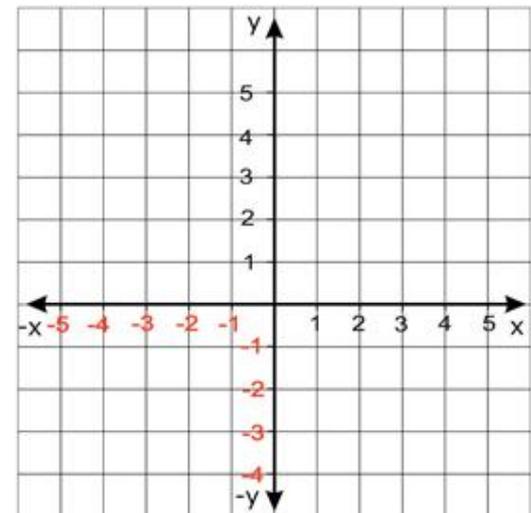
x	y



d) 
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

x	y

x	y



**B1.C1.1., B1.C2.1** Problemas de sistemas

25. Completa la siguiente tabla planteando los sistemas que permiten resolver los siguientes problemas:

Problemas	Planteamiento
a) Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?	{
b) La suma de dos números es 12 y la mitad de uno de ellos es igual al doble del otro. ¿Qué números son?	{
c) Tenemos dos números cuya suma es 0 y si a uno de ellos le sumamos 123 obtenemos el doble del otro. ¿Qué números son?	{
d) Hallar un número de dos cifras que cumpla que la segunda cifra es el doble de la primera y que la suma de las cifras es 12.	{
e) La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.	{
f) En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?	{
g) En un examen tipo test, las preguntas correctas suman un punto y las incorrectas restan medio punto. En total hay 100 preguntas y no se admiten respuestas en blanco (hay que contestar todas). La nota de un alumno es 8.05 sobre 10. Calcular el número de preguntas que contestó correcta e incorrectamente.	{
h) En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.	{
i) Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.	{
j) Con dos tipos de vino de 3,50 €/l y de 1,50 €/l queremos obtener un vino de 2,50 €/l. ¿Cuántos litros de cada vino debemos mezclar para obtener 50 litros del nuevo vino?	{

k) Jorge tiene 27 años más que su hija Pilar. Dentro de 8 años, la edad de Jorge será el doble que la de Pilar. ¿Cuántos años tiene cada uno?	{
l) Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?	{
m) Hemos comprado 3 canicas de cristal y 2 de acero por 1,45€ y, ayer, 2 de cristal y 5 de acero por 1,7€. Determinar el precio de una canica de cristal y de una de acero.	{
n) Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.	{
ñ) Manuel tiene 66 años más que su hermana y sus edades suman 38. ¿Qué edad tiene cada hermano?	{
o) Tomás utiliza en el gimnasio 9 pesas, siendo algunas de 5kg y otras, de 10kg. ¿Cuántas pesas de cada utiliza si en total levanta 65kg?.	{
p) En un concierto benéfico se venden todas las entradas y se recaudan 23000€. Los precios de las entradas son 50 € las normales y 300 € las vip. Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si el aforo del establecimiento es de 160 personas.	{
q) Hemos comprado 18 litros de pintura en una tienda de bricolaje donde el precio de la pintura azul es 12€/L y el de la pintura verde es 13.5€/L. ¿Cuántos litros de pintura de cada color hemos comprado gastando 234€?	{
r) Con una cuerda de 34 metros se puede dibujar un rectángulo (sin que sobre cuerda) cuya diagonal mide 13 metros. Calcular cuánto mide la base y la altura de dicho rectángulo.	{

26. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de cada uno de los artículos por separado? (Sol: 5€ y 12€)




27. En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que las moscas tienen 6 patas y las arañas 8 patas). (Sol: 30 moscas y 12 arañas)

28. La suma de las edades de mi abuelo y mi hermano es de 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edades tienen cada uno de ellos?. (Sol: Abuelo 53 años y hermano 3 años)

29. Tengo 30 monedas. Unas son de cinco céntimos y otras son de un céntimo. ¿Puedo tener en total 78 céntimos?. (Sol: 12 monedas de 5 céntimos y 18 de 1 céntimo)

30. Paco tiene 80 años y me contó que entre nietas y nietos suman 8 y que si les diese 100€ a cada nieta y 50€ a cada nieto, repartiría 650 €. ¿Cuántos nietos y nietas tiene Paco?. (Sol: 5 nietas y 3 nietos)

## UNIDAD 6. FUNCIONES

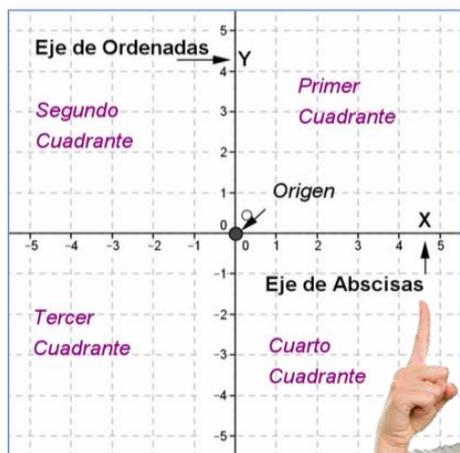
### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

- B4.C1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente e identifica sus características.
- B4.C1.2. Asocia y construye gráficas a partir de enunciados de problemas y viceversa.
- B4.C2.1. Ecuaciones de una recta, puntos de corte y pendiente, y representación gráfica.
- B4.C2.2. De un enunciado obtiene una fórmula polinómica de grado 1 y la representa.
- B4.C2.3. Calcula elementos característicos de una función polinómica de 2º grado, de proporcionalidad inversa y las representa gráficamente.
- B4.C2.4. Interpreta el comportamiento que representa una gráfica y obtiene su expresión algebraica
- B4.C2.5. Identifica y describe situaciones de la vida modelizadas mediante funciones cuadráticas o hiperbólicas, las estudia y las representa.

Resumen del tema:

### 1. Sistema de referencia cartesiano.

- Un sistema de referencia cartesiano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes. El punto en el que se cortan los ejes se denomina origen de coordenadas (O).
- Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos eje de abscisas (eje OX) y al vertical eje de ordenadas (eje OY).
- Al cortarse los 2 ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas denominadas cuadrantes.
- Llamaremos coordenadas de un punto A a un par ordenado de números (x,y) donde x indica la posición en el eje OX e y la posición en eje OY.



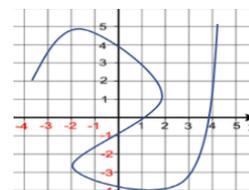
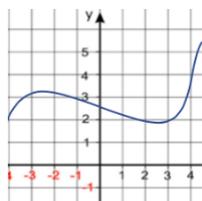
### 2. Concepto de función.

Una función es una relación que asocia a cada valor de una magnitud inicial un único valor de otra magnitud final.

Los valores de dichas magnitudes se denominan variables. La primera magnitud  $x$  es la variable independiente y la segunda  $y$  la variable dependiente.

Ejemplo gráfico: Gráficamente podremos distinguir una función porque a cada valor de la  $x$  le corresponde un único valor de la  $y$ .

Sí es función      No es función (varias  $y$  para un  $x$ )



### 3. Características de una función:

- **Dominio** (valores de  $x$  que tienen gráfica)
- **Recorrido** (valores de  $y$  que tienen gráfica)
- **Continuidad.**
- **Monotonía** (Crecimiento y decrecimiento)
- **Extremos relativos y absolutos** (máximos y mín)
- **Puntos de corte / Periodicidad / Simetría**

#### 4. Formas de representar una función.

- **Descripción verbal** que describe una situación.
- **Tabla de valores** que nos indica los valores.
- **Gráfica** que nos visualiza la situación.
- **Expresión algebraica.** Fórmula que nos relaciona las dos magnitudes.

#### 5. Ecuación de una recta $y=mx+n$ ( $m$ pendiente, $n$ ordenada en el origen).

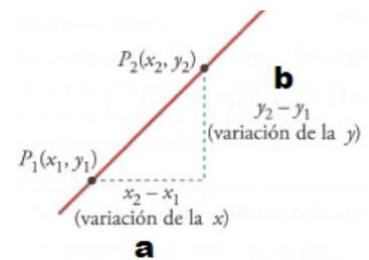
- ¿Cómo calcular  $m$  y  $n$ ? Dados dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ ,

$n$  se calcula sustituyendo  $x=0$  ;  $m = \frac{b}{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- ¿Cómo calcular  $m$  y  $n$  en una gráfica?.

$n$  es el valor donde corta la recta al eje OY y  $m$  se obtiene cogiendo dos puntos de la recta, trazando un triángulo rectángulo como el de la imagen y calculando el cociente entre su altura y su base.

- Ecuación punto-pendiente.  $y - y_0 = m(x - x_0)$

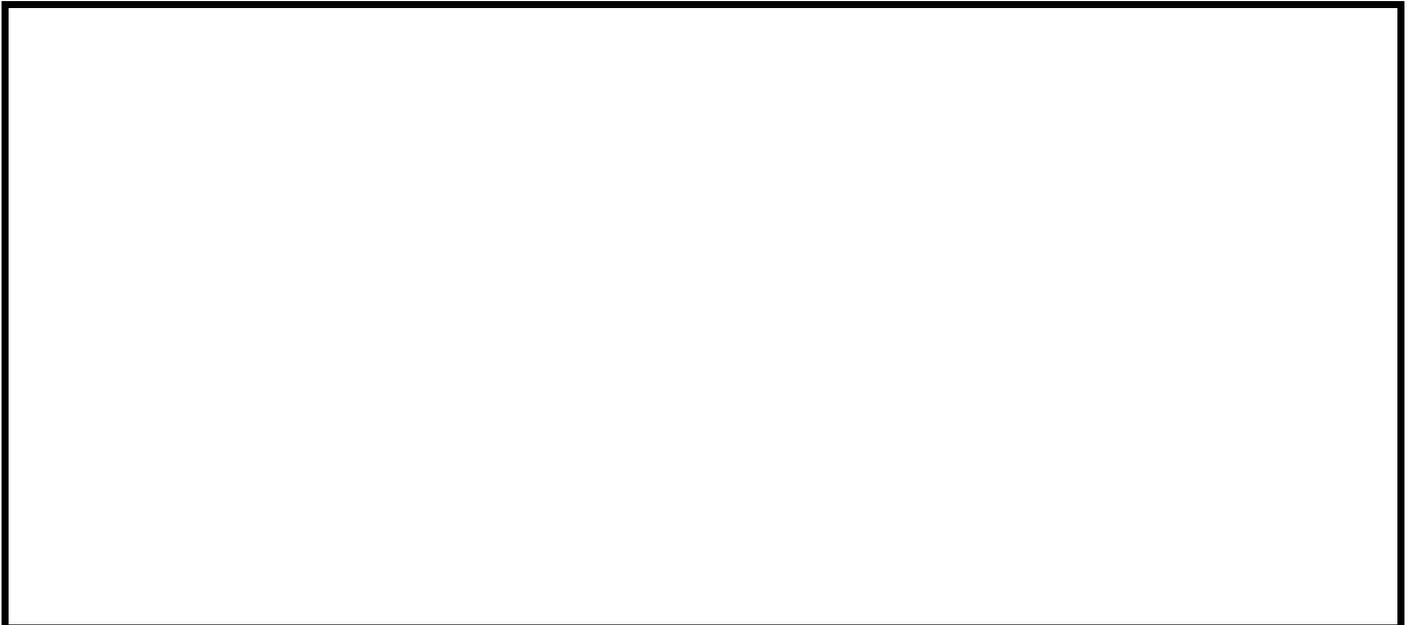


#### 6. Estudio y representación de parábolas ( $y=ax^2+bx+c$ )

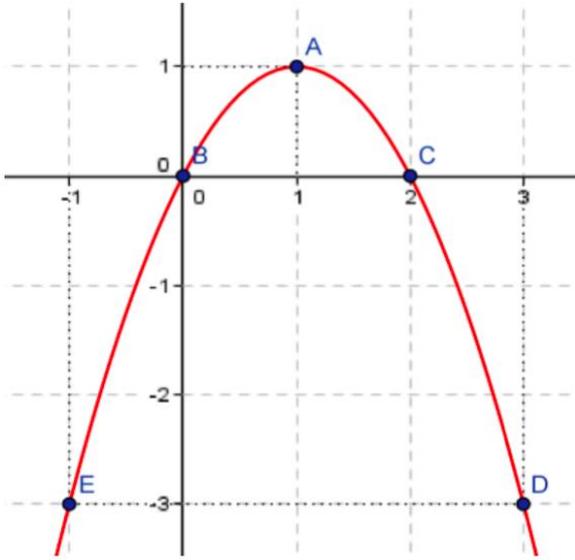
- Si  $a > 0$  tiene forma de  $\cup$  y si  $a < 0$  tiene forma invertida  $\cap$
- El vértice de la parábola se encuentra en  $x_0 = -b/2a$
- Calcular los puntos de corte con el eje OX, resolviendo  $ax^2+bx+c=0$
- Construir tabla valores incluyendo el vértice y los puntos de corte. Además incluir valores a ambos lados del vértice.

**B4.C1.1, B4.C1.2** Interpreta el comportamiento de funciones a partir de su gráfica e identifica sus características. Construye gráficas a partir de enunciados y viceversa.

#### TEORÍA. Sistema de referencia cartesiano. Coordenadas de un punto.



1. Indica cuales son las coordenadas de los siguientes puntos marcados en el gráfico:



A → (     ,     )

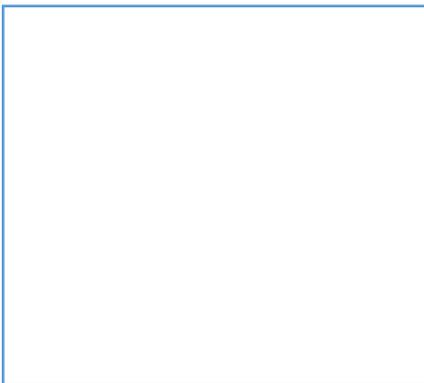
B → (     ,     )

C → (     ,     )

D → (     ,     )

E → (     ,     )

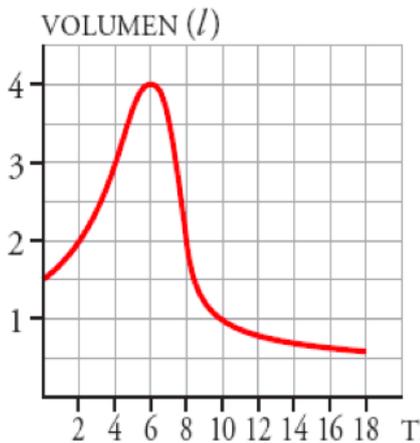
2. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:



A = (-4, 2); B = (-3, -3); C = (-0'5, 0'5) y D = (0, -2)

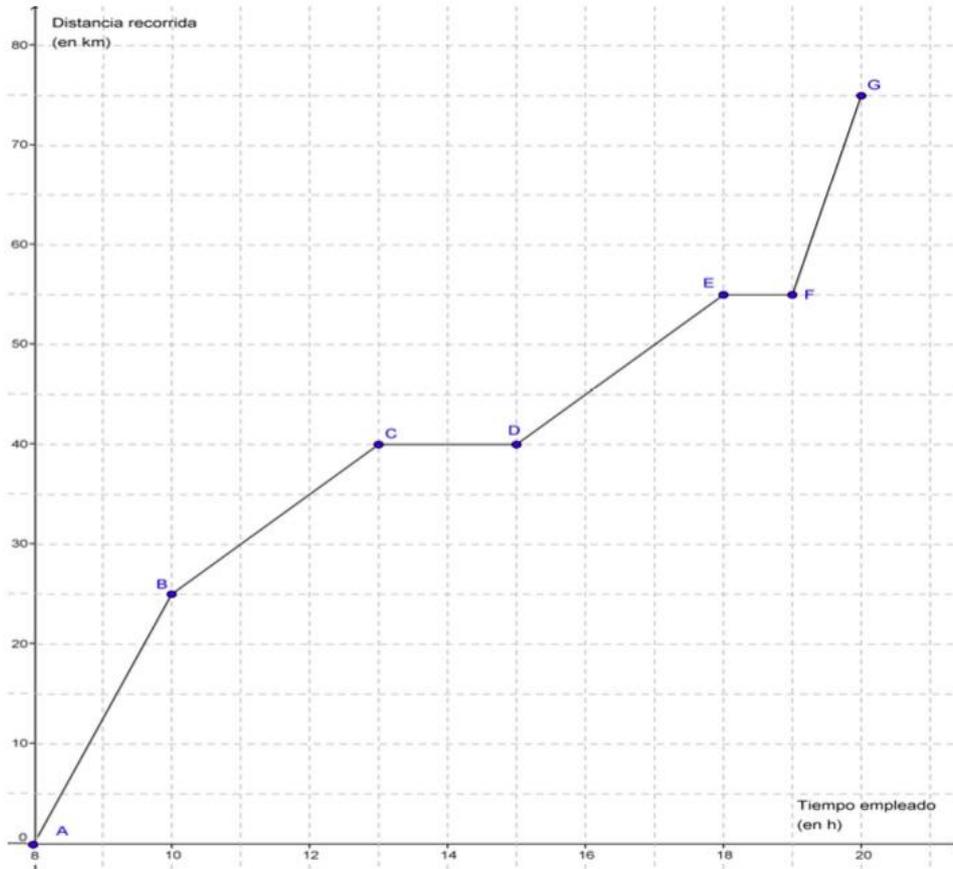
**Interpretación de funciones:**

3. Para medir la capacidad espiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y, después, espirar tan rápido como se pueda en un aparato llamado espirómetro. Esta curva indica el volumen de aire que entra y sale de los pulmones.



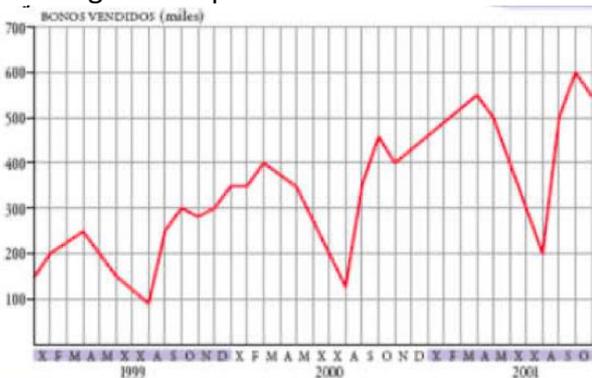
- a) ¿Cuál es el volumen en el momento inicial? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuánto tiempo duró la observación? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona? \_\_\_\_\_
- d) ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba? \_\_\_\_\_
- e) ¿Y cuándo termina? \_\_\_\_\_

4. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos hecho a la Sierra:



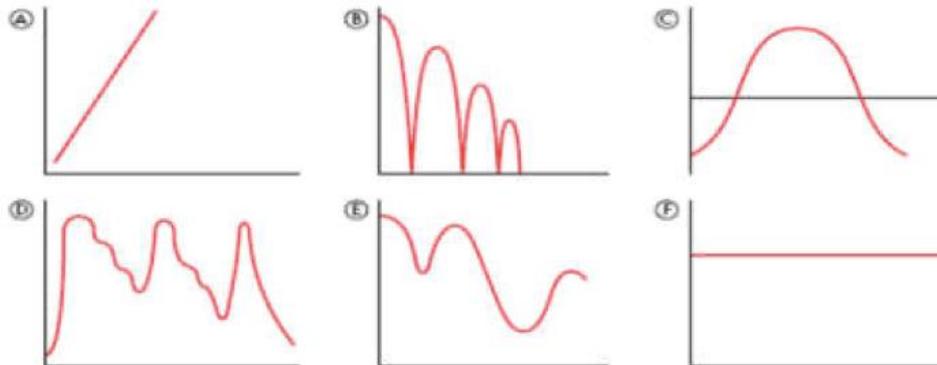
- a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas? \_\_\_\_\_
- c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron? \_\_\_\_\_
- d) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

5. Esta gráfica representa los bonos vendidos por una empresa durante 3 años:



- a) ¿Durante cuántos meses se hizo este estudio? \_\_\_\_\_
- b) ¿En qué mes de 1999 se vendieron menos bonos? \_\_\_\_\_
- c) ¿En qué mes del año 2001 se produce la máxima venta? \_\_\_\_\_
- d) ¿En qué estación del año es decreciente la venta? \_\_\_\_\_

6. Asocia cada gráfica con las situaciones descritas más abajo, y di en cada caso que representan los ejes de abscisas (OX) y los de ordenadas(OY):

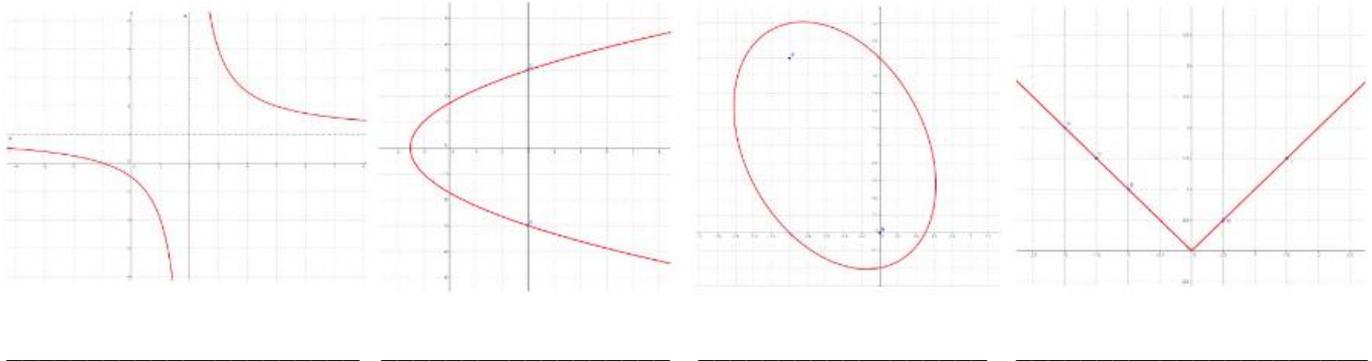


Situación	Eje OX	Eje OY	Letra
1) Altura de una pelota que bota al pasar el tiempo			
2) Edad de una persona con el paso del tiempo.			
3) Temperaturas mínimas diarias en Segovia en un año			
4) Precio de las bolsas de patatas fritas			
5) Nivel de agua de un pantano a lo largo de un año			
6) Evolución de la prima de riesgo española			

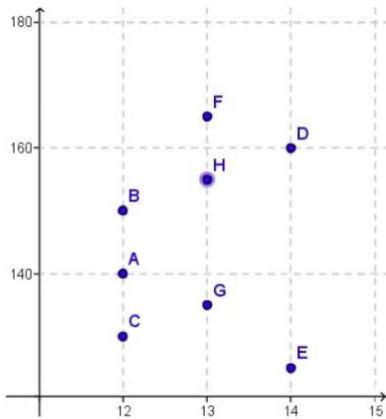
**TEORÍA. Concepto de función.**

7. Escribe a continuación una gráfica que sea función y otra que no sea función

8. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuales no:

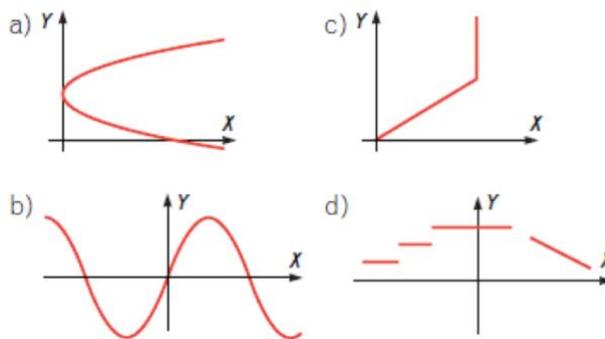


9. La altura y la edad de un equipo de baloncesto están relacionados según muestra la siguiente gráfica:



- a) Si Juan tiene 14 años, ¿cuál puede ser su altura? \_\_\_\_\_
- b) Si María mide 165 cm, ¿cuál puede ser su edad? \_\_\_\_\_
- c) Si Fran mide 140 cm, ¿cuál puede ser su edad? \_\_\_\_\_
- d) La relación entre la edad y la altura de los jugadores del equipo, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? \_\_\_\_\_

10. Indica cuáles de las siguientes gráficas representan una función y cuales no:



- a) \_\_\_\_\_
- b) \_\_\_\_\_
- c) \_\_\_\_\_
- d) \_\_\_\_\_

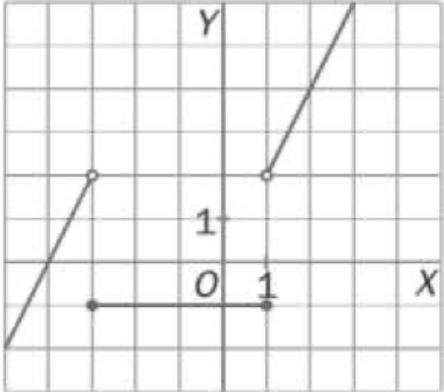
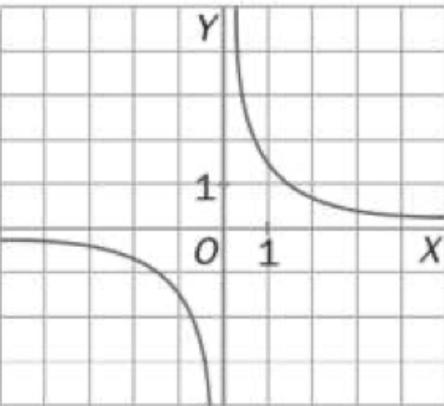
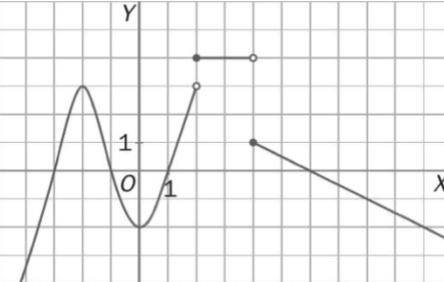
11. Rodea la única tabla que no puede ser una relación funcional:

<p>a)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	x	y	0	1	1	2	2	3	3	4	<p>b)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>-3</td></tr> <tr><td>0</td><td>-3</td></tr> <tr><td>1</td><td>-3</td></tr> <tr><td>2</td><td>-3</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-1	-3	0	-3	1	-3	2	-3	<p>c)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-3</td><td>9</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-3	9	-1	1	0	0	2	4	<p>d)</p> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	x	y	0	2	1	3	4	6	0	3
x	y																																										
0	1																																										
1	2																																										
2	3																																										
3	4																																										
x	y																																										
-1	-3																																										
0	-3																																										
1	-3																																										
2	-3																																										
x	y																																										
-3	9																																										
-1	1																																										
0	0																																										
2	4																																										
x	y																																										
0	2																																										
1	3																																										
4	6																																										
0	3																																										

TEORÍA. Dominio y recorrido de una función



12. Calcula el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

<p>a)</p> 	<p>Dominio=</p>    <p>Recorrido=</p>
<p>b)</p> 	<p>Dominio=</p>    <p>Recorrido=</p>
<p>c)</p> 	<p>Dominio=</p>    <p>Recorrido=</p>

**TEORÍA. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos y absolutos.**

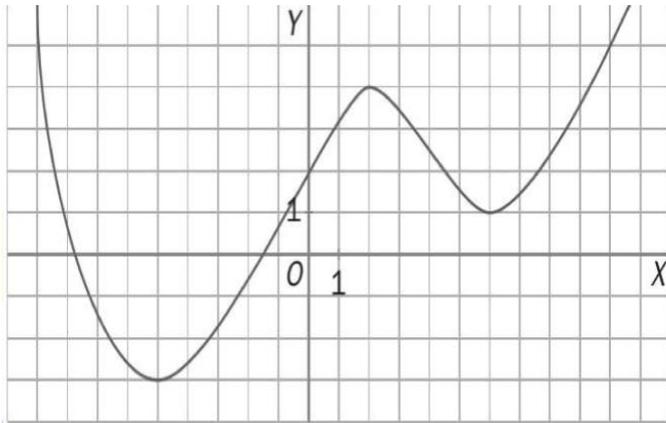


13. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico... La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



- a) ¿Es una función la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad? \_\_\_\_\_
- b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente? \_\_\_\_\_
- c) Dominio: \_\_\_\_\_ Recorrido: \_\_\_\_\_
- d) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? \_\_\_\_\_
- e) ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h? \_\_\_\_\_
- f) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Ha sido constante en algún momento? \_\_\_\_\_  
 Crece: \_\_\_\_\_ Decrece: \_\_\_\_\_ Constante: \_\_\_\_\_
- g) Indica cuales han sido los máximos y mínimos relativos y absolutos  
 Max. Relativos: \_\_\_\_\_ Min. Relativos \_\_\_\_\_  
 Max. Absolutos: \_\_\_\_\_ Min. Absolutos \_\_\_\_\_

14. Estudia el crecimiento y los extremos relativos y absolutos de la siguiente función:



Crece: \_\_\_\_\_

Decrece: \_\_\_\_\_

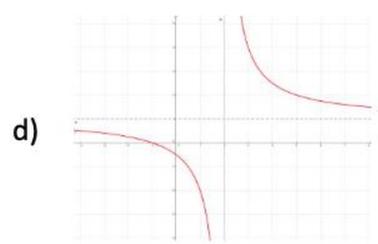
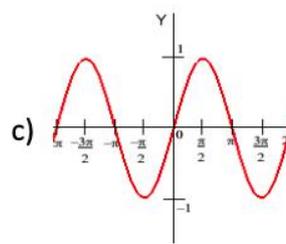
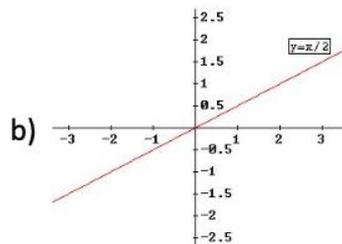
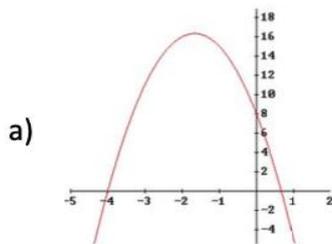
Max.Relativos: \_\_\_\_\_

Min.Relativos: \_\_\_\_\_

Max.Absolutos: \_\_\_\_\_

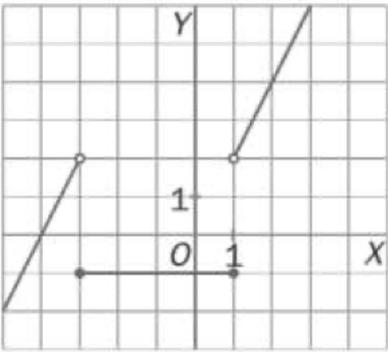
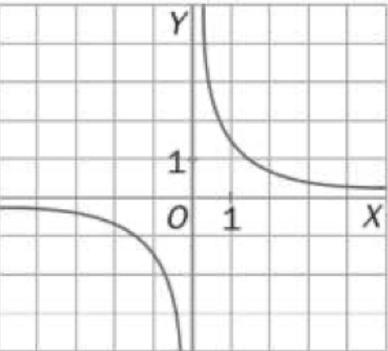
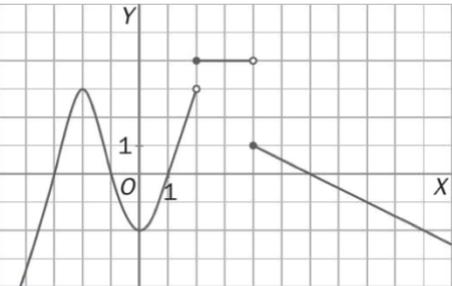
Min.Absolutos: \_\_\_\_\_

15. Rodea aquella función que es siempre creciente hasta  $x=-2$ ,



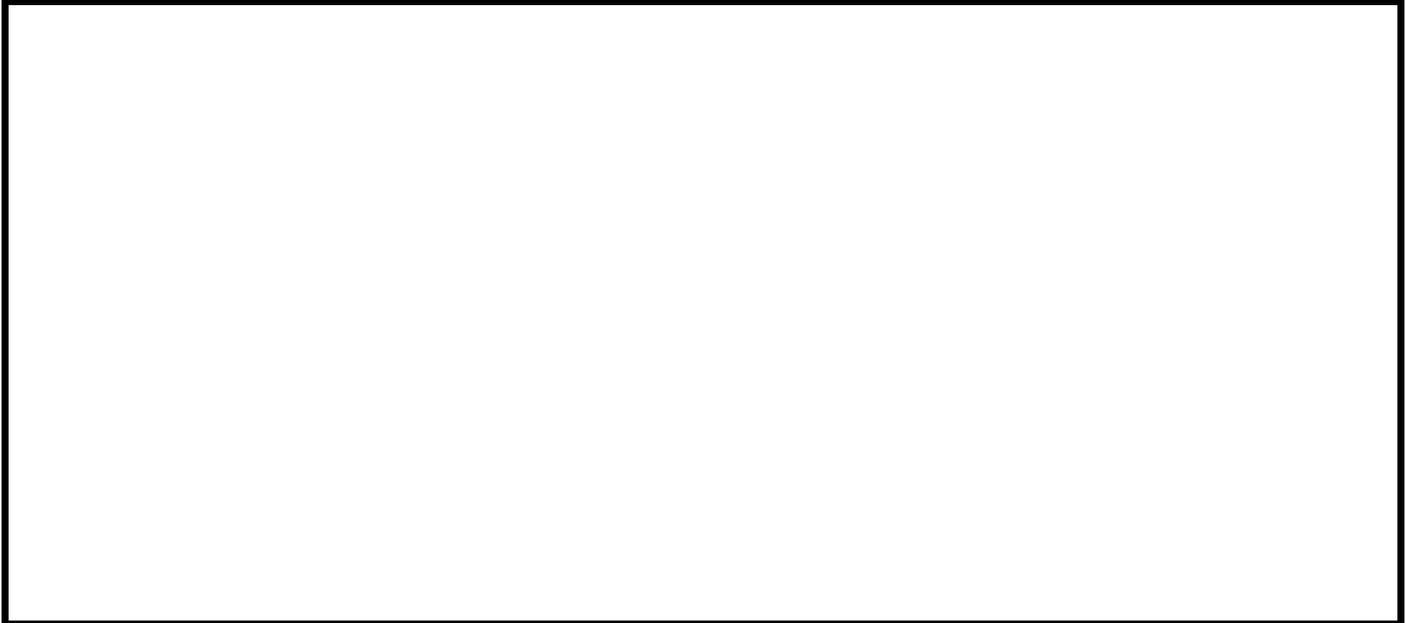
**TEORÍA. Continuidad. Tipos de discontinuidades.**

16. Estudia la continuidad y especifica los tipos de discontinuidades de estas funciones:

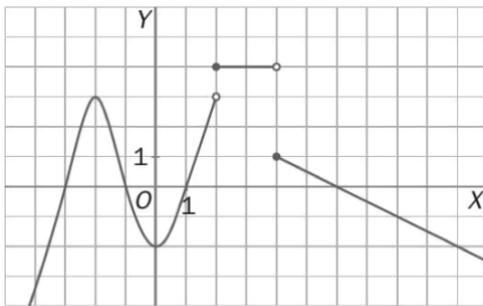
<p>a)</p> 	<p>Discontinua en:</p>
<p>b)</p> 	<p>Discontinua en:</p>
<p>c)</p> 	<p>Discontinua en:</p>

17. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años?. Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua?. Indica los puntos de discontinuidad y su tipo.

**TEORÍA. Puntos de corte con los ejes.**



18. Dada la siguiente gráfica, indica los puntos de corte con los ejes



Puntos de corte con OX →

Puntos de corte con OY →

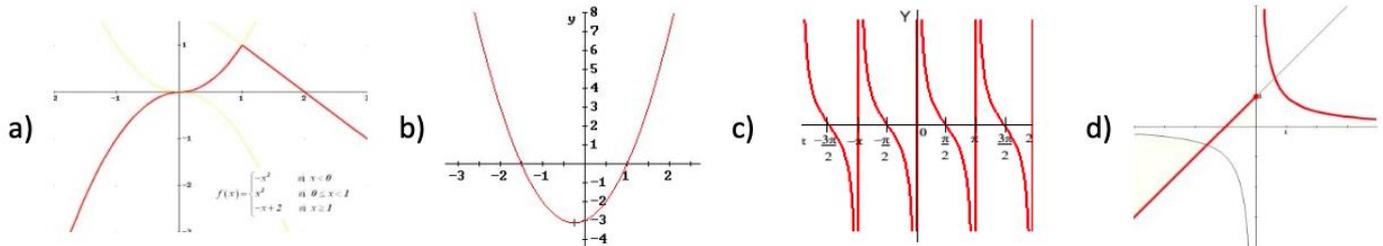
19. Dada la función  $y=2x+1$ , calcula sus puntos de corte con los ejes.

20. Dada la función  $y=x^2-4x+3$ , calcula sus puntos de corte con los ejes

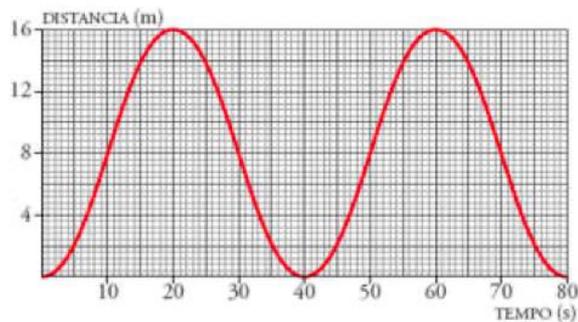
**TEORÍA. Periodicidad. Simetría.**



19. Rodea aquellas gráficas que correspondan a una función periódica:



20. Los cestos de una noria van subiendo y bajando a medida que la noria gira. Esta es la representación gráfica de la función tiempo - distancia al suelo de un cesto.



a) ¿Cuánto tarda en dar una vuelta completa? \_\_\_\_\_

b) Indica cuál es la altura máxima y cuál es el radio de la noria. \_\_\_\_\_

c) ¿Es esta una función periódica? \_\_\_\_\_

d) ¿Cuál es el período? \_\_\_\_\_

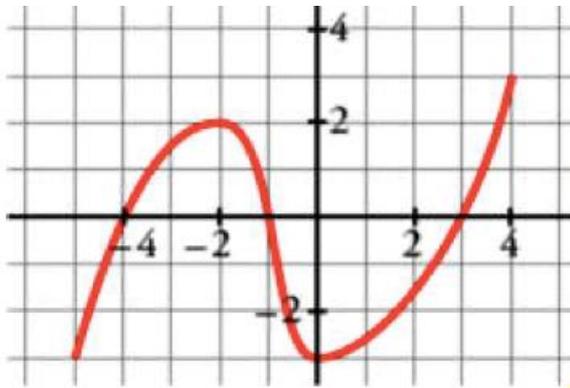
e) Calcula la altura a los 130 segundos sin necesidad de continuar la gráfica \_\_\_\_\_

21. Estudia la simetría (par/impar) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^4$	b) $f(x)=x^3$	c) $f(x)=4$
----------------	---------------	-------------

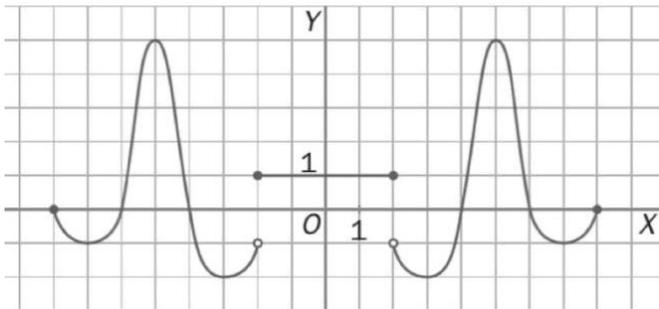
**Estudio completo de las características de una función:**

22. Estudiar de la siguiente función el dominio, recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.



Dominio=  
Recorrido=  
Crecimiento=  
Decrecimiento=  
Máximos relativos=  
Mínimos relativos=  
Máximo absoluto=  
Mínimo absoluto=  
Continuidad→  
Puntos de corte con los ejes→

23. Estudiar de la siguiente función el dominio, recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad, simetría y los puntos de corte con los ejes.



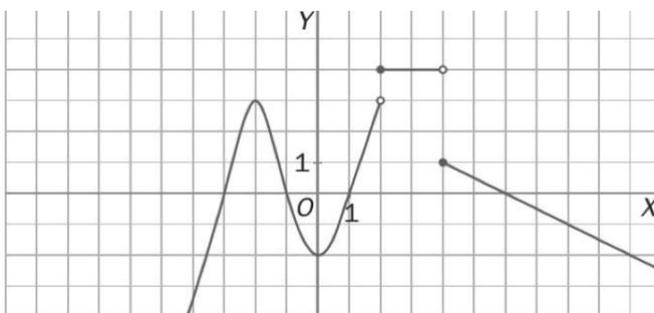
Dominio=  
Recorrido=  
Crecimiento=  
Decrecimiento=  
Máximos relativos=  
Mínimos relativos=  
Máximo absoluto=  
Mínimo absoluto=

Discontinuidades→ \_\_\_\_\_

Simetría → \_\_\_\_\_

Puntos de corte con los ejes→ \_\_\_\_\_

24. Estudiar de la siguiente función el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, la continuidad y los puntos de corte con los ejes.



Dominio=  
Crecimiento=  
Decrecimiento=  
Máximos relativos=  
Mínimos relativos=  
Máximo absoluto=  
Mínimo absoluto=

Discontinuidades→ \_\_\_\_\_

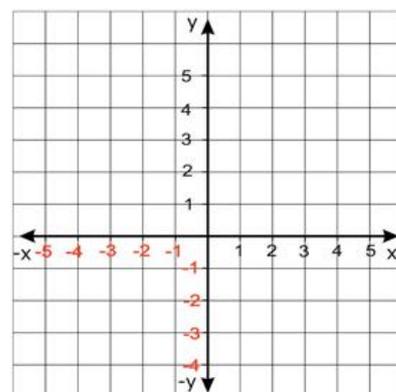
Puntos de corte con los ejes→ \_\_\_\_\_

**TEORÍA. Formas de representar una gráfica.**



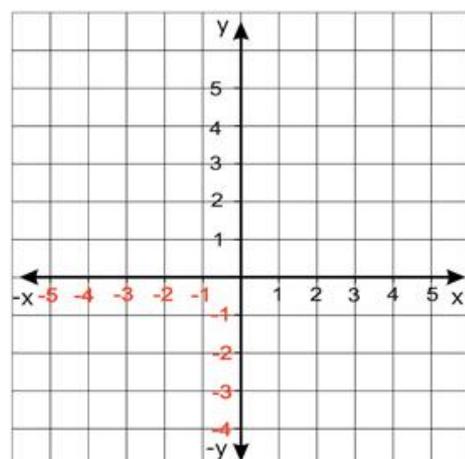
25. Dada la función  $f(x) = 2x-1$ , completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

x	y=f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



26. Dada la función  $f(x) = x^2-3$ , completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

x	y=f(x)
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



27. Dada las siguiente situación: “Este verano Juan fue en bicicleta a casa de sus abuelos que vivían en un pueblo cercano, a 35 kilómetros del suyo. A los 20 minutos había recorrido 10 km; en ese momento comenzó a ir más deprisa y tardó 15 minutos en recorrer los siguientes 15 km. Paró a descansar durante 10 minutos y, después, emprendió la marcha recorriendo los últimos 10 km en 15 minutos”. Completa la tabla de valores y construye la gráfica asociada.

Tiempo (min)	Distancia (km)



28. La tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño durante los primeros meses de vida:

Tiempo (meses)	0	3	9	15	21	27	33
Perímetro (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.

b) ¿Qué tendencia se observa en el crecimiento del cráneo de un niño?

c) ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años (36 meses)?

29. La distancia ( $d$ ) recorrida por un tren depende del número de vueltas ( $n$ ) que da cada rueda.

a) Escribe la fórmula que permite obtener  $d$  conocido  $n$ , sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Completa la tabla y dibuja la gráfica que representa dicha función.

$n$	$d$
1	
2	
3	
4	
5	



c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma  $\pi = 3,14$ ).

d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?.

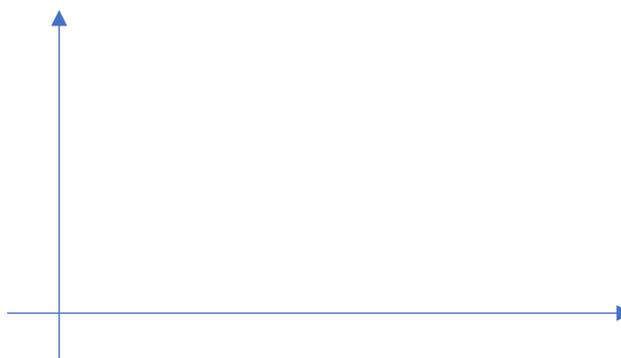
30. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierta día la temperatura en la superficie es de  $9^{\circ}\text{C}$ . Determina:

a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de  $-30^{\circ}\text{C}$ ?

c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura  $T$  conociendo la altura  $A$ . Confecciona una tabla y dibuja la gráfica.

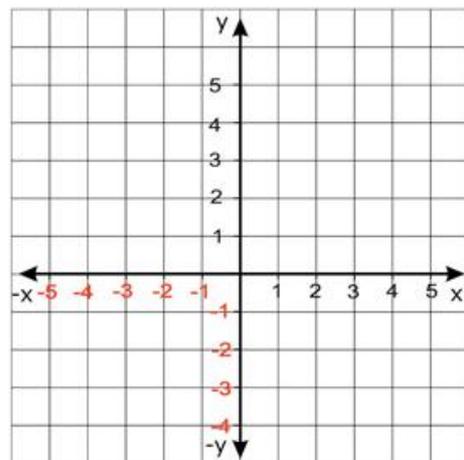
$A$	$T$
180	
360	
540	
720	
900	



31. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama “ $x$ ” a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de “ $x$ ”. Dibuja su gráfica.

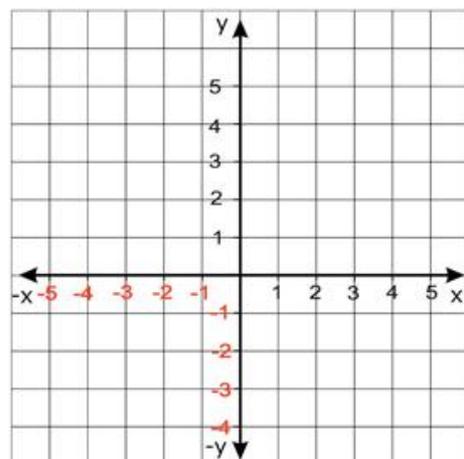
32. Representa una función que cumpla las siguientes características:

- Dominio:  $[-4,5]$
- Pasa por los puntos  $(-4,0)$  y  $(2,0)$
- Tiene un mínimo en  $(-2,-3)$  y un máximo en  $(4,4)$
- Es continua.

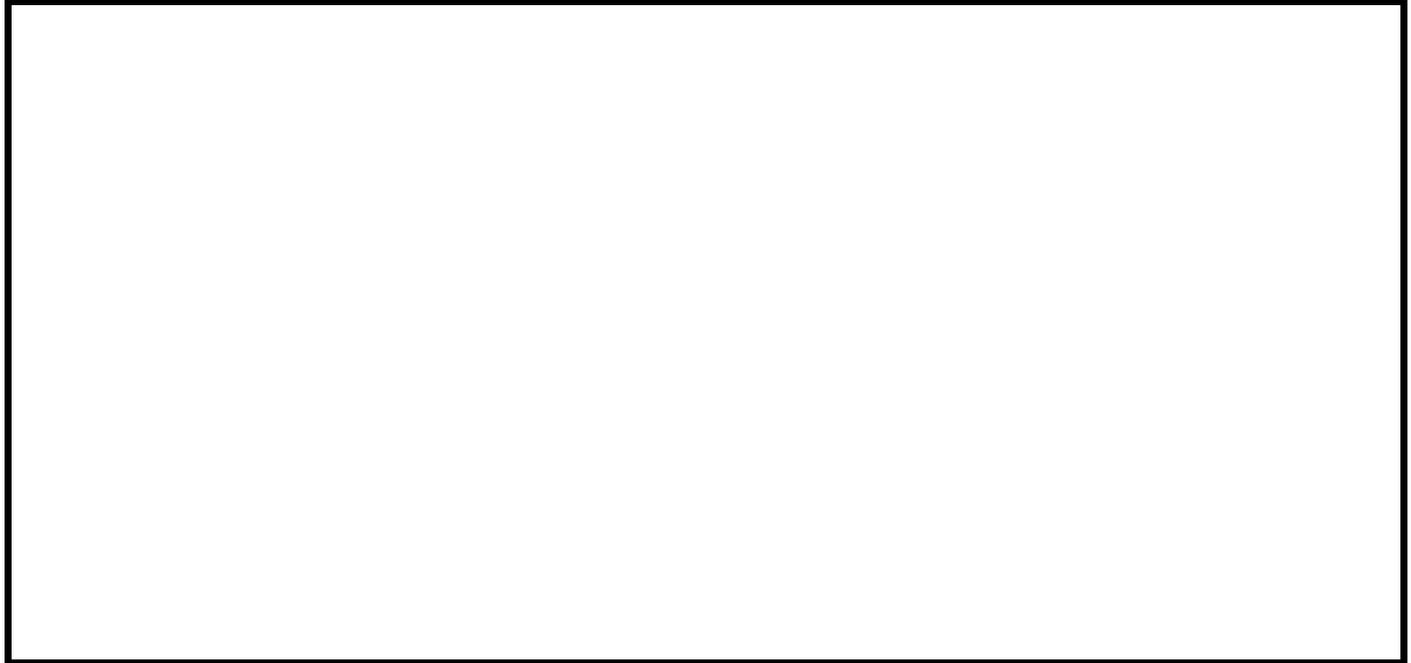


33. Representa una función que cumpla las siguientes características:

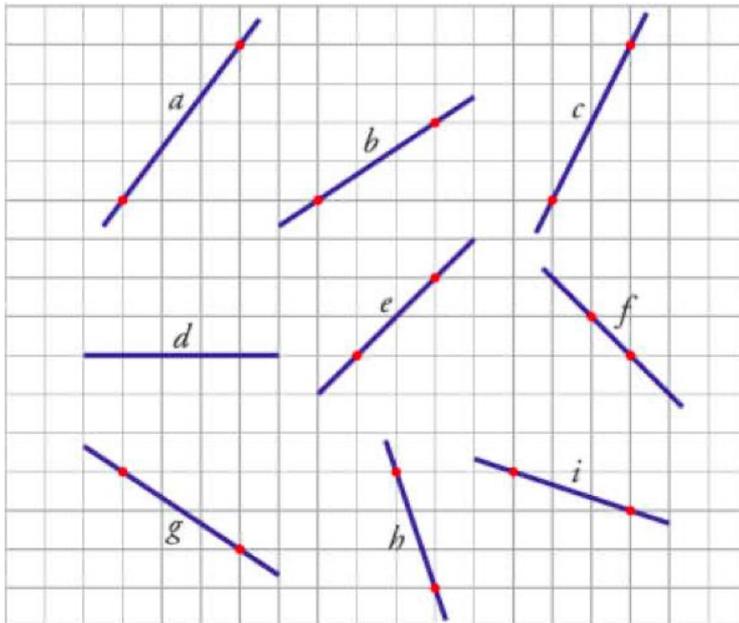
- Dominio:  $[-5,4]$
- Pasa por los puntos  $(-3,0)$  y  $(0,3)$
- Tiene un máximo en  $(-2,5)$  y  $(4,4)$
- Es discontinua en  $x=1$ .



TEORÍA. Ecuación de una recta  $y=mx+n$

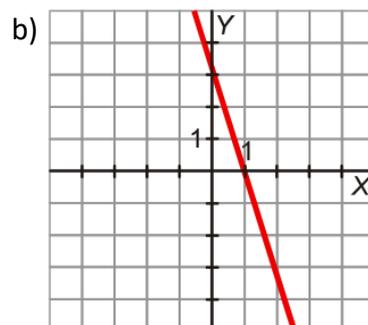
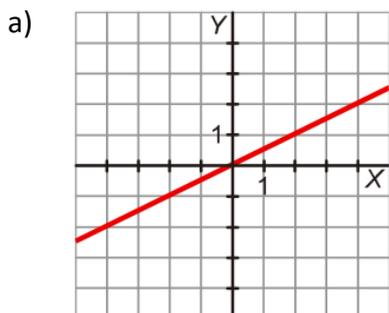


34. Halla la pendiente de los siguientes segmentos:

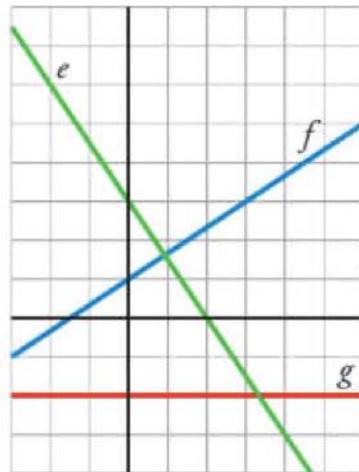
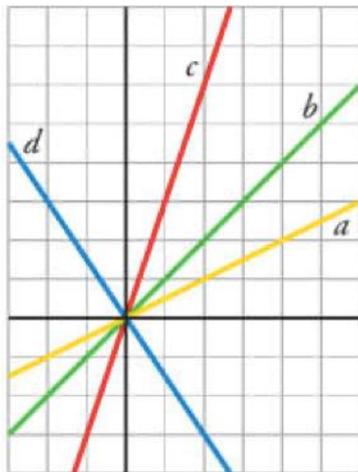


- a=
- b=
- c=
- d=
- e=
- f=
- g=
- h=
- i=

35. Escribe la ecuación de estas rectas:



36. Escribe las ecuaciones de estas rectas:



- a)
- b)
- c)
- d)
- e)
- f)
- g)

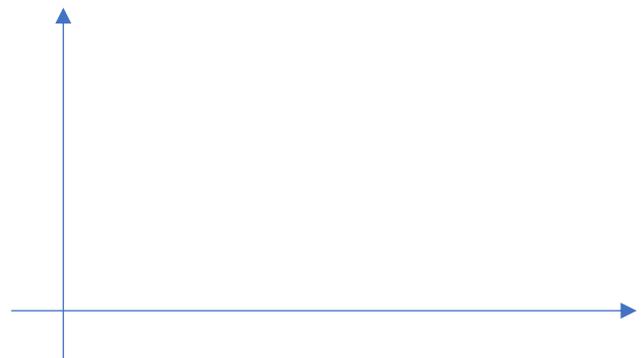
37. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(1,2)$  y tiene pendiente  $m=3$ .

38. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(0,5)$  y tiene pendiente  $m=-2$ .

39. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(1,2)$  y  $B(3,4)$ .

40. Una bolsa de patatas fritas cuesta 1'50€. Completa la tabla que relaciona el Número de Bolsas – Precio y represéntala gráficamente. Obtén la fórmula que relaciona el nº de bolas con el precio que cuestan.

NºBolsas	Precio
1	
2	
3	
4	
5	



**TEORÍA. Representación de parábolas ( $y=ax^2+bx+c$ )**

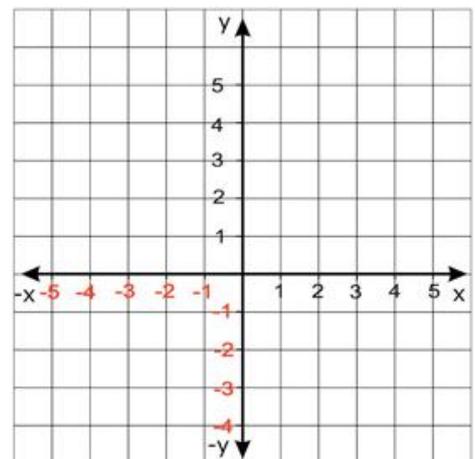


41. Dada la función  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

- (1) Vértice →
- (2) Puntos de corte →

(3) Tabla de valores

x	y=f(x)

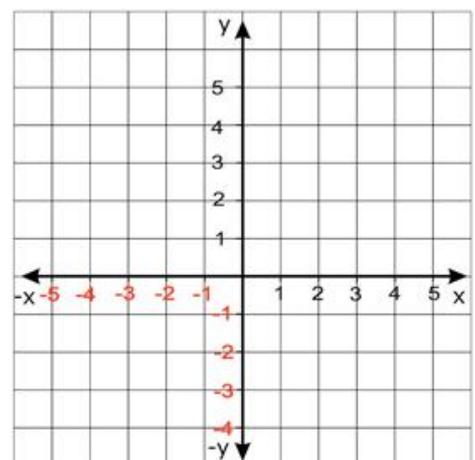


42. Dada la función  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$ , completa la siguiente tabla de valores y represéntala gráficamente:

- (1) Vértice →
- (2) Puntos de corte →

(3) Tabla de valores

x	y=f(x)



## UNIDAD 7. LUGARES GEOMÉTRICOS. POLÍGONOS. SEMEJANZAS. CUERPOS GEOMÉTRICOS

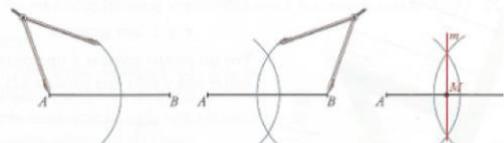
### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

- B3.C1.1. Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo. Resolución de problemas.  
 B3.C1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.  
 B3.C2.1. Perímetros y áreas de polígonos y de figuras circulares.  
 B3.C2.2. B3.C2.3. B3.C3.1. Semejanzas. Triángulos semejantes. Teorema de Tales. Aplicaciones.  
 B3.C5.1. B3.C5.2. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas.

### Resumen del tema:

**Lugar geométrico.** Se llama lugar geométrico al conjunto de todos los puntos que cumplen una determinada propiedad geométrica.

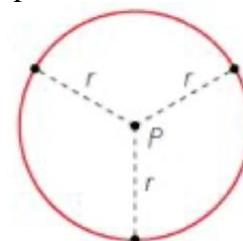
**Mediatriz:** Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los extremos de un segmento es la misma.  
 La Mediatriz es la perpendicular al segmento en punto medio



**Bisectriz:** Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a los lados de un ángulo es la misma.  
 La Bisectriz es la semirecta que divide al ángulo en 2 partes iguales.

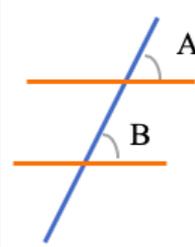
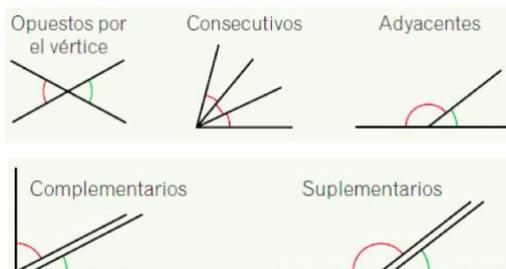


**Circunferencia:** Es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto P es r.



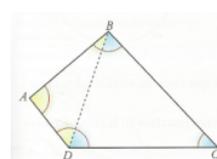
### Relaciones angulares

- Ángulo nulo 
- Ángulo recto 
- Ángulo llano 
- Ángulo agudo 
- Ángulo obtuso 



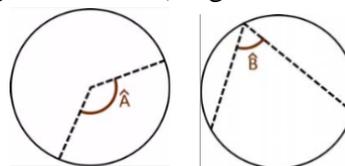
Si 2 paralelas son cortadas por una recta transversal, los ángulos que determinan se denominan ángulos correspondientes.  
 A y B son **ángulos correspondientes iguales**

**Suma ángulos interiores de polígono convexo**  
**Suma ángulos interiores n-ágono =  $180^\circ(n-2)$**



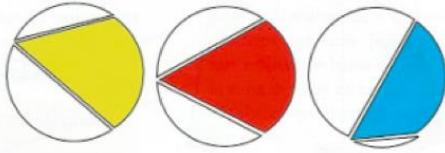
Ejemplo:  $n=4$  lados  
 Los ángulos interiores suman  $180^\circ(4-2)=360^\circ$

**Ángulo central** (Ángulo con vértice en el centro circunfer.)  
**Ángulo inscrito** (Ángulo con vértice en la circunferencia)

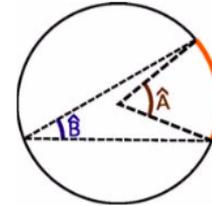


A es ángulo central  
 B es ángulo inscrito

Los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco miden lo mismo.



La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que determina.

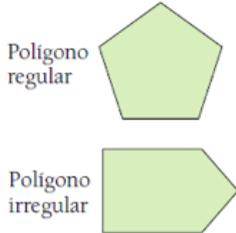


$$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$$

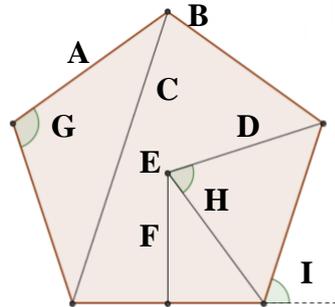
### Polígonos

**Polígono:** Figura plana y cerrada limitada por segmentos.

**P.Regular** (lados y ángulos iguales).



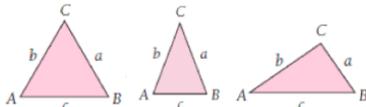
**Elementos de un polígono**



- A - Lado
- B - Vértice
- C - Diagonal
- D - Radio
- E - Centro
- F - Apotema
- G - Ángulo interior
- H - Ángulo central
- I - Ángulo exterior

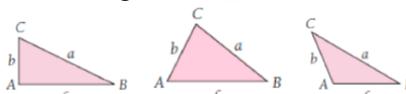
**Tipos triángulos según lados**

- Equilátero (3 lados iguales)
- Isósceles (2 lados iguales)
- Escaleno (lados distintos)



**Tipos triángulos según ángulos**

- Rectángulo (ángulo recto)
- Acutángulo (ángulos agudos)
- Obtusángulo (ángulo obtuso)



**Propiedad triángulos:** Cada lado es menor que la suma de los otros dos. ¿Se puede construir triángulo de lados 3, 5 y 10 cm?.

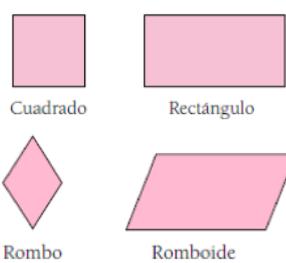
**Cuadriláteros** (Polígonos 4 lados)

Se clasifican en:

- Paralelogramos (lados paralelos 2 a 2)
- Trapecios (solo 2 lados paralelos)
- Trapezoides (ningún lado paralelo)

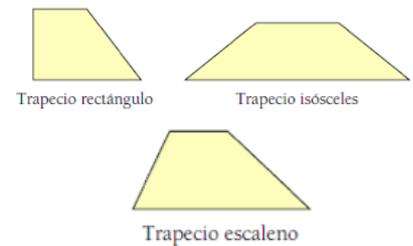
**Paralelogramos**

Los paralelogramos se clasifican en:



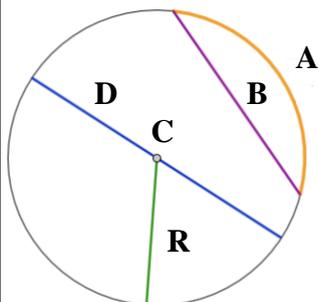
**Trapecios**

Los trapecios pueden ser:



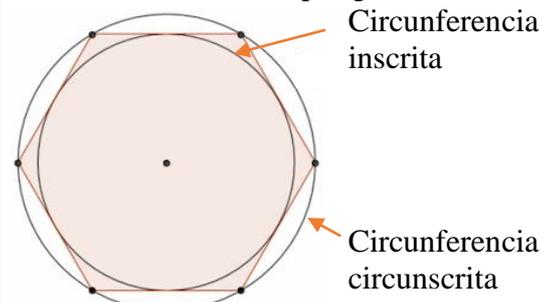
### Circunferencia y Círculo

**Elementos de una circunferencia**



- A - Arco
- B - Cuerda
- C - Centro
- D - Diámetro
- R - Radio

**Circunferencias en un polígono**



Sector y Corona Circular

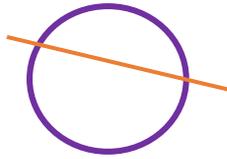


Sector Circular

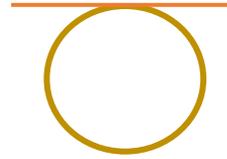


Corona Circular

Posiciones de una recta y un circunferencia



Recta Secante



Recta Tangente

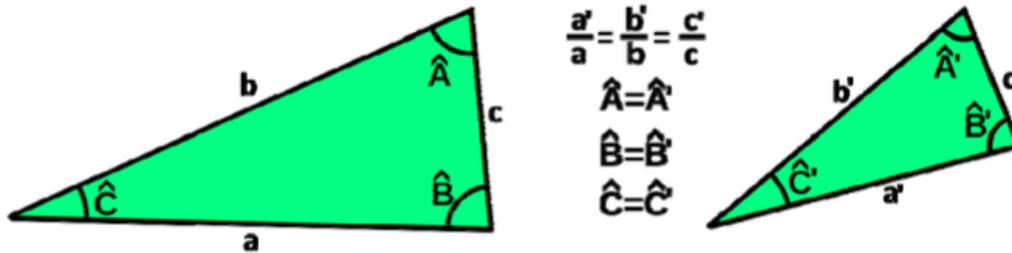


Recta Exterior

Semejanzas

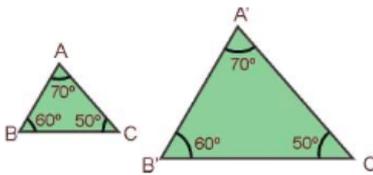
**Polígonos semejantes.** Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales.

**Triángulos semejantes.** Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales ( $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ) y sus ángulos iguales ( $A=A'$ ,  $B=B'$  y  $C=C'$ )

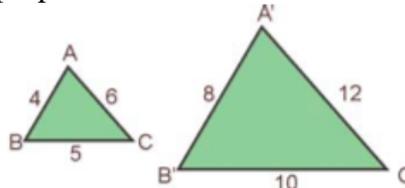


Criterios de semejanza de triángulos:

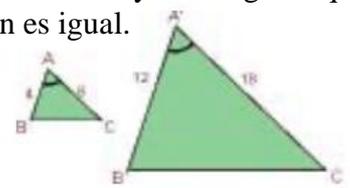
**Criterio 1.** Dos triángulos son semejantes si tienes 2 ángulos iguales.



**Criterio 2.** Dos triángulos son semejantes si tienes los 3 lados proporcionales.

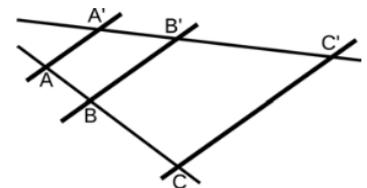


**Criterio 3.** Dos triángulos son semejantes si tienen 2 lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.



**Teorema de Tales.** Si dos rectas son cortadas por varias paralelas, los segmentos que determinan son proporcionales.

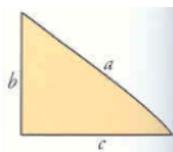
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$



Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

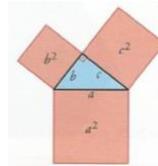
$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Criterio clasificación triángulos

Triángulo acutángulo

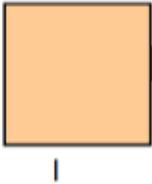
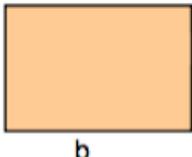
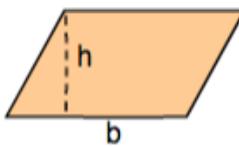
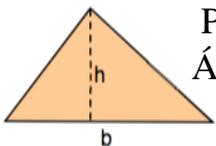
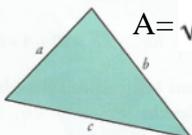
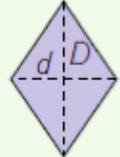
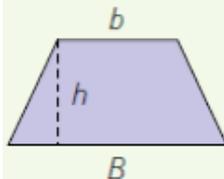
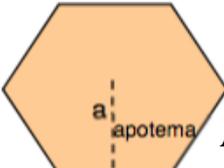
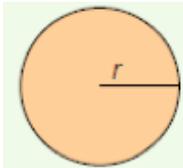
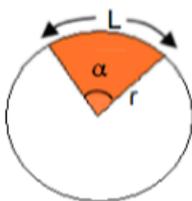
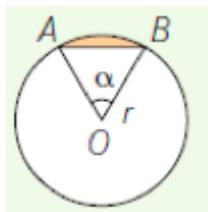
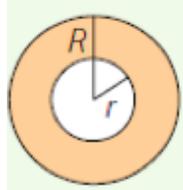
$$(a^2 < b^2 + c^2)$$

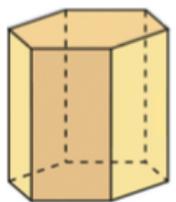
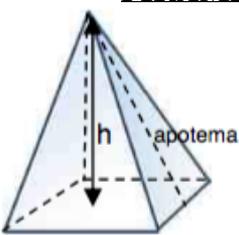
Triángulo rectángulo

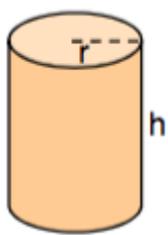
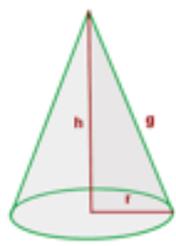
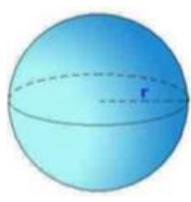
$$(a^2 = b^2 + c^2)$$

Triángulo obtusángulo

$$(a^2 > b^2 + c^2)$$

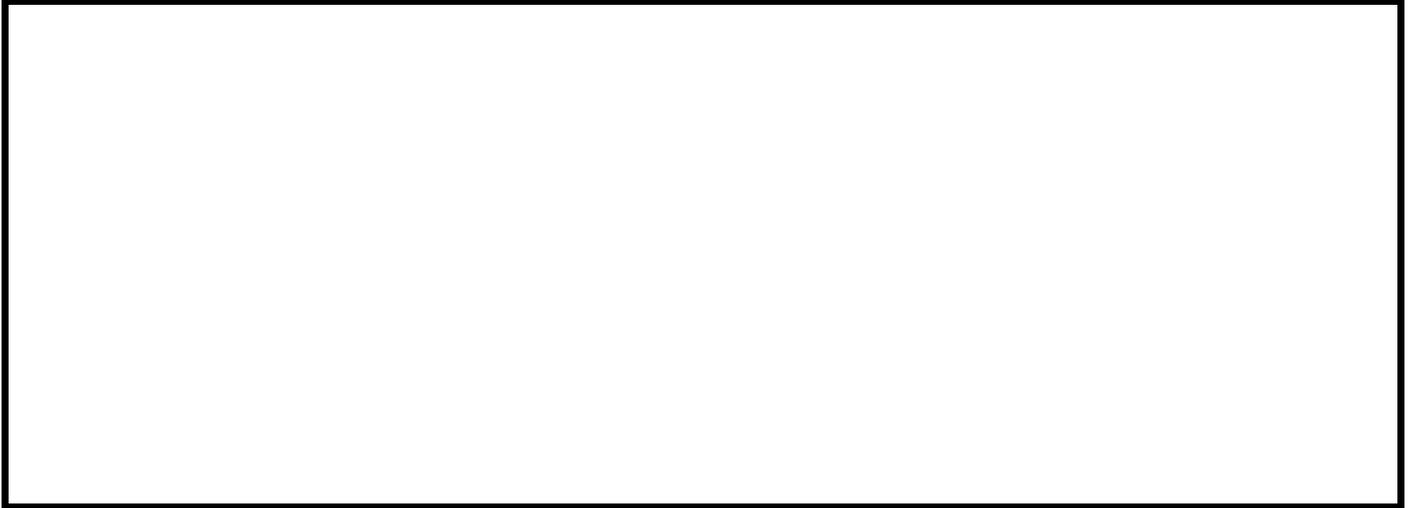
Perímetros y Áreas de figuras planas		
<p><b>CUADRADO</b></p>  <p><math>P = 4l</math> <math>\text{Área} = l^2</math></p>	<p><b>RECTÁNGULO</b></p>  <p><math>P = 2b + 2h</math> <math>\text{Área} = b \cdot h</math></p>	<p><b>PARALELOGRAMO</b></p>  <p><math>P = \text{Suma Lados}</math> <math>\text{Área} = b \cdot h</math></p>
<p><b>TRIÁNGULO</b> (con la altura)</p>  <p><math>P = \text{Suma Lados}</math> <math>\text{Área} = b \cdot h / 2</math></p>	<p><b>TRIÁNGULO</b> (con los 3 lados)</p>  <p><math>A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}</math> <math>s = (a+b+c)/2</math> Fórmula de Herón</p>	<p><b>ROMBO</b></p>  <p><math>P = \text{Suma Lados}</math> <math>\text{Área} = D \cdot d / 2</math></p>
<p><b>TRAPECIO</b></p>  <p><math>P = \text{Suma Lados}</math> <math>A = (B+b) \cdot h / 2</math></p>	<p><b>POLÍGONO REGULAR</b></p>  <p><math>P = \text{Suma Lados}</math> <math>A = \text{Perímetro} \cdot a / 2</math></p>	<p><b>CIRCUNFERENCIA</b></p>  <p><math>P = 2 \cdot \pi \cdot r</math> <math>\text{Área} = \pi \cdot r^2</math></p>
<p><b>SECTOR CIRCULAR</b></p>  <p><math>A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}</math> <math>L = \frac{2\pi r \alpha}{360}</math></p>	<p><b>SEGMENTO CIRCULAR</b></p>  <p><math>A = A_{\text{sector}} - A_{\text{OAB}}</math></p>	<p><b>CORONA CIRCULAR</b></p>  <p><math>A = A_{\text{Grande}} - A_{\text{Pequeño}}</math></p>

Poliedros		
<p><b>PRISMAS</b></p>  <p><math>V = A_{\text{base}} \cdot h</math> <math>A = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}</math></p>	<p><b>PIRÁMIDES</b></p>  <p><math>V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h</math> <math>A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}</math></p>	<p><b>SÓLIDOS PLATÓNICOS</b> Sólido Platónico (caras polígonos regulares y cada vértice concurre con el mismo número de caras) <b>Tetraedro(4), Cubo(6), Octaedro(8), Dodecaedro (12), Icosaedro(20)</b></p> 

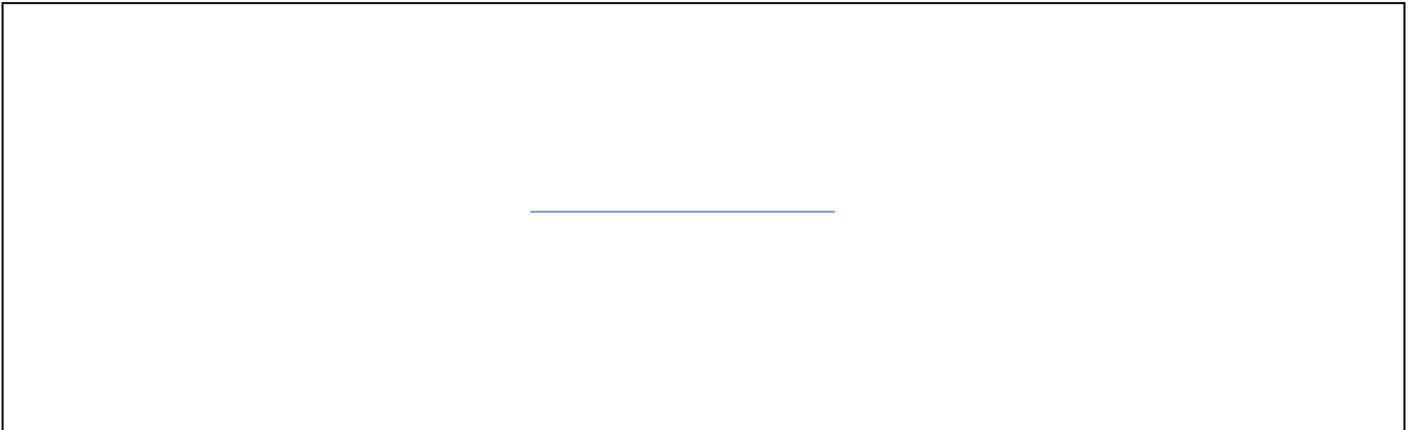
Cuerpos de Revolución		
<p><b>CILINDRO</b></p>  <p><math>V = A_{\text{base}} \cdot h</math> <math>A = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}</math></p>	<p><b>CONO</b></p>  <p><math>V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h</math> <math>A = A_{\text{lateral}} + A_{\text{Base}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2</math></p>	<p><b>ESFERA</b></p>  <p><math>V = \frac{4}{3} \pi r^3</math> <math>A = 4 \pi r^2</math></p>

**B3.C1.1. , B3.C1.2., B3.C1.3., B3.C1.4., B3.C1.5.** Reconoce tipos de polígonos y elementos, tipos triángulos, cuadriláteros, círculo, conceptos de rectas y ángulos

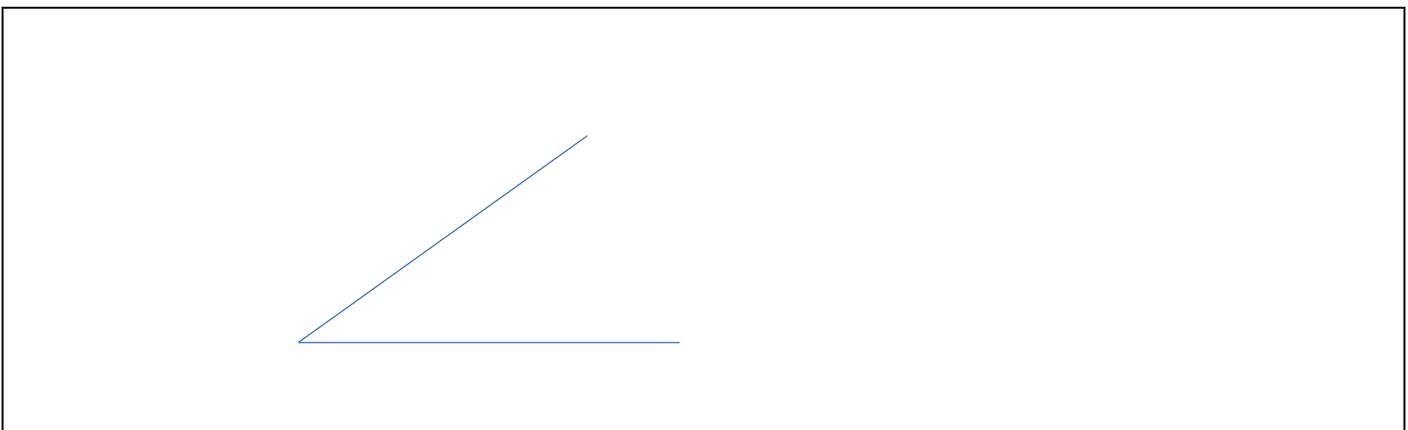
**TEORÍA. Lugares geométricos.**



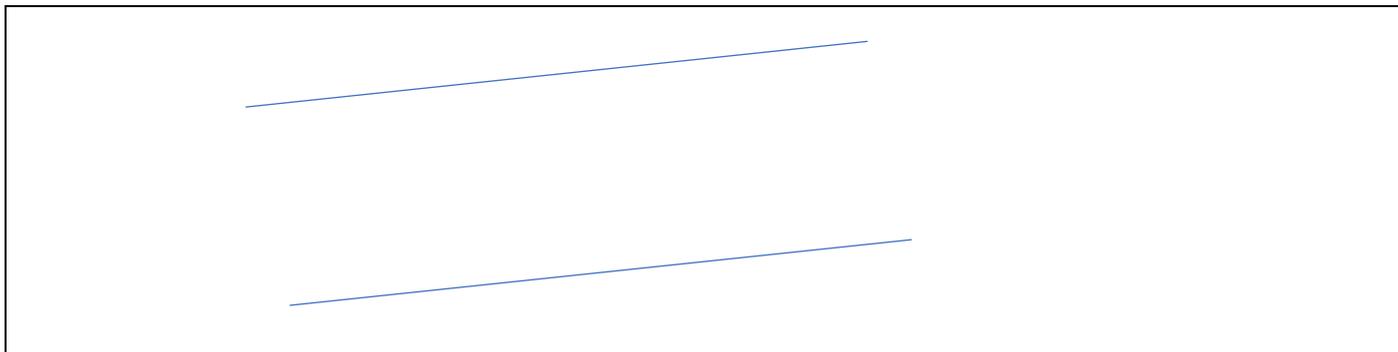
1. Construye el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del siguiente segmento:



2. Construye el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del siguiente ángulo:



3. Dadas dos rectas paralelas  $r$  y  $s$ , calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.



4. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?

**Relaciones angulares**

5. Representa los siguientes ángulos:

Ángulo Nulo	Ángulo Recto	Ángulo Llano
Ángulo Completo	Ángulo Agudo	Ángulo Obtuso
Dos ángulos consecutivos	Dos ángulos adyacentes o suplementarios	Dos ángulos opuestos por el vértice
Dos ángulos complementarios	Dos ángulos correspondientes	Tres ángulos consecutivos que formen un ángulo recto

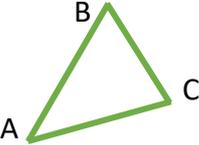
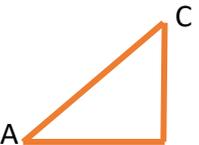
6. Responde a las siguientes preguntas:



- a) Ángulos opuestos por el vértice: \_\_\_\_\_
- b) Ángulos correspondientes: \_\_\_\_\_
- c) Ángulos alternos internos: \_\_\_\_\_
- d) Ángulos alternos externos: \_\_\_\_\_
- e) Si  $(1) = 115^\circ$ , calcula:  
 $(2) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(3) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(4) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(5) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(6) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(7) = \underline{\hspace{1cm}}$   $(8) = \underline{\hspace{1cm}}$

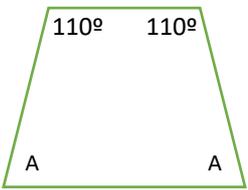
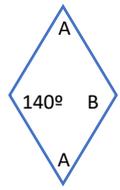
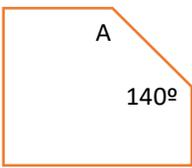
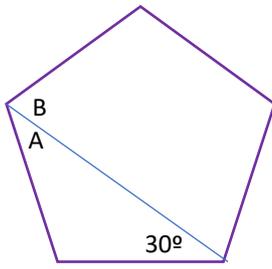
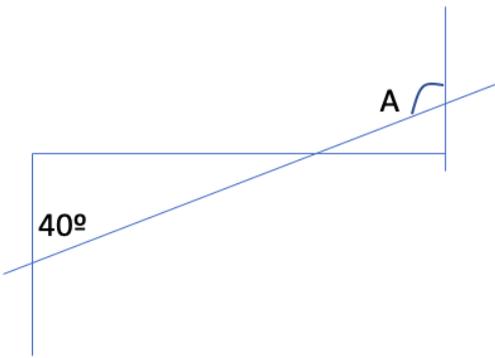
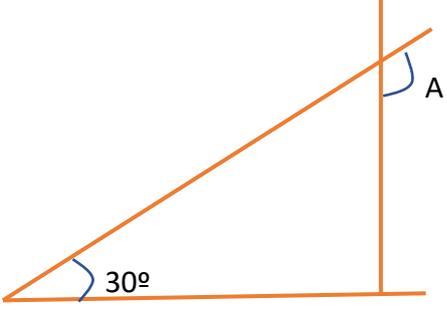
**TEORÍA. Suma de los ángulos interiores de un polígono.**

7. Responde a las siguientes cuestiones:

<p>a) Si dos de los ángulos interiores de un triángulo miden <math>\hat{A}=40^\circ</math> y <math>\hat{B}=65^\circ</math>. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?</p>	
<p>b) En un triángulo rectángulo, si <math>\hat{A}=40^\circ</math>, ¿cuánto mide <math>\hat{C}</math> ?</p>	
<p>c) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un rectángulo?</p>	
<p>d) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un pentágono regular?</p>	
<p>e) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un heptágono regular?</p>	

<p>f) ¿Cuánto miden los dos ángulos iguales de esta cometa?</p> 	
<p>g) ¿Es posible construir un cuadrilátero que tenga sólo 3 ángulos rectos?. Justifica tu respuesta.</p>	

8. Calcula los valores de los ángulos desconocidos:

### TEORÍA. Ángulos centrales e inscritos en la circunferencia.

- a) Dibuja un ángulo central en una circunferencia.
- b) Dibuja un ángulo inscrito en una circunferencia.
- c) ¿Qué tienen en común todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco?.
- d) ¿Cuánto mide un ángulo inscrito respecto al ángulo central que determina?.

9. Dibuja y Justifica basándote en las propiedades del ejercicio anterior que todo ángulo inscrito en la circunferencia cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro es un ángulo recto (mide  $90^\circ$ ).

10. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?.

11. Calcula los ángulos desconocidos en los siguientes dibujos:

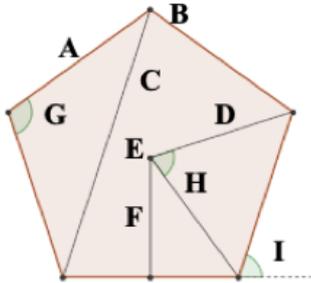
<p>A = _____</p>	<p>B = _____</p>	<p>C = _____</p>	
<p>D = _____</p>	<p>E = _____</p>	<p>F = _____</p>	
<p>G = _____ H = _____</p>		<p>I = _____ J = _____</p>	
<p>N = _____ O = _____</p>		<p>K = _____ L = _____ M = _____</p>	

**TEORÍA. Polígonos. Elementos y tipos.**

a) ¿Qué es un polígono? \_\_\_\_\_

b) ¿Qué es un polígono regular? \_\_\_\_\_

c) Indica como se llama a cada uno de los elementos de un polígono:



A: \_\_\_\_\_ B: \_\_\_\_\_ C: \_\_\_\_\_

D: \_\_\_\_\_ E: \_\_\_\_\_ F: \_\_\_\_\_

G: \_\_\_\_\_ H: \_\_\_\_\_ I: \_\_\_\_\_

d) Dibuja y escribe lo que caracteriza los siguientes tipos de triángulos:

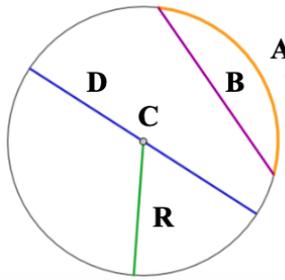
Triángulo escaleno	Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
Triángulo Acutángulo	Triángulo Rectángulo	Triángulo obtusángulo

e) Dibuja los cuadriláteros indicados en la siguiente tabla:

Paralelogramos (lados paralelos 2 a 2)			
Cuadrado	Rectángulo	Rombo	Romboide
Trapecios (sólo 2 lados paralelos)			Trapezoides
Trapezio rectángulo	Trapezio isósceles	Trapezio escaleno	

**TEORÍA. Circunferencia y círculo.**

a) Indica como se llama a cada uno de los elementos de la circunferencia.

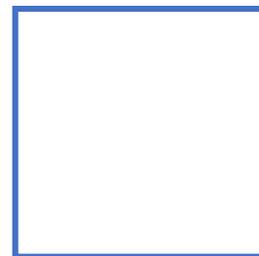
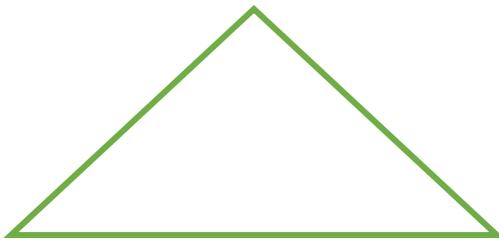


A: \_\_\_\_\_ B: \_\_\_\_\_

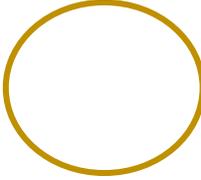
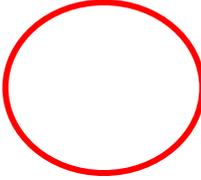
C: \_\_\_\_\_ D: \_\_\_\_\_

R: \_\_\_\_\_

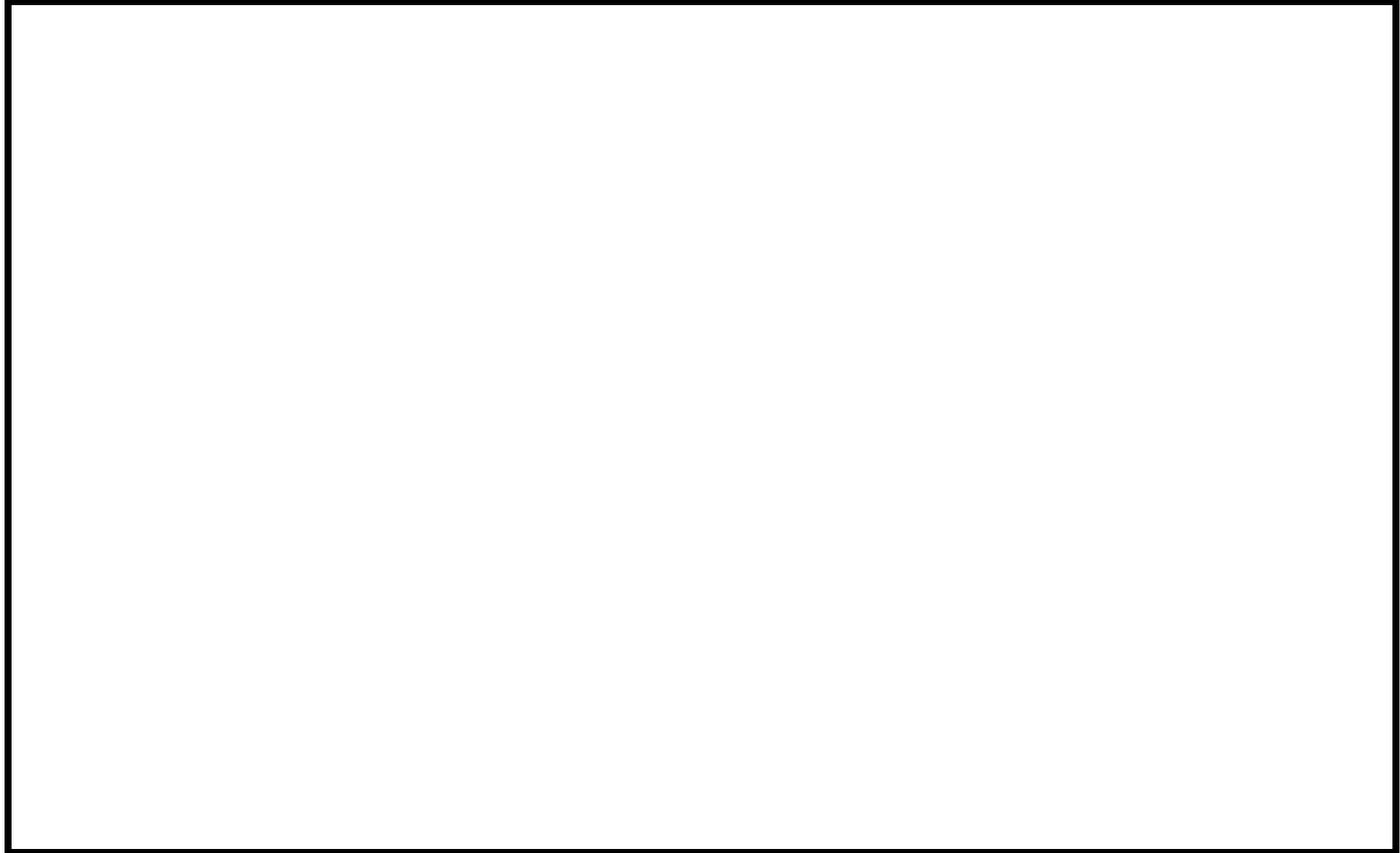
b) Representa una circunferencia inscrita en el triángulo y circunscrita en el cuadrado.



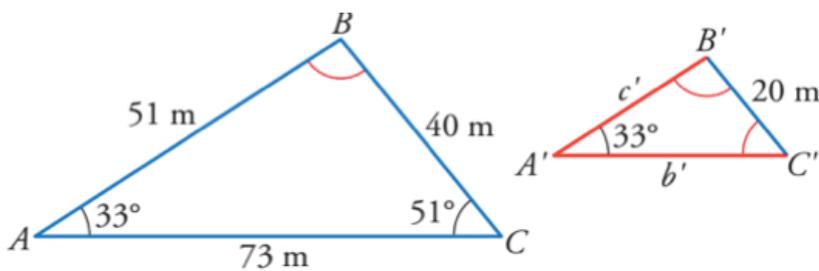
c) Dibuja lo indicado en cada recuadro.

a) Un sector circular	b) Una corona circular	
c) Una recta secante 	b) Una recta tangente 	Una recta exterior 

TEORÍA. Polígonos semejantes. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza de triángulos.



12. Sabiendo que estos 2 triángulos son semejantes, calcula los lados y ángulos que faltan:



B =  
A' =                      B' =                      C' =  
b' =                      c' =

13. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

	¿Semejantes?	Justificación:
a) Triángulo con un ángulo de 80° y otro de 40°. Y otro con un ángulo de 80° y otro de 60°.		
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.		
c) Triángulo con $A = 30^\circ$ , $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. Triángulo con $A' = 30^\circ$ , $b' = 3,5$ cm, $c' = 4,5$ cm		
d) Triángulo con $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. Triángulo con $a' = 10$ cm, $b' = 12,5$ cm, $c' = 24,5$ cm		

14. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) Triángulo 1:  $a = 9$  cm,  $b = 6$  cm,  $c = 12$  cm. Triángulo 2:  $a' = 6$  cm,  $b' = 4$  cm, ¿ $c'$ ?

b) Triángulo 1:  $A = 45^\circ$ ,  $b = 8$  cm,  $c = 4$  cm. Triángulo 2:  $A' = 45^\circ$ ,  $b' = 16$  cm, ¿ $a'$ ?

15. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

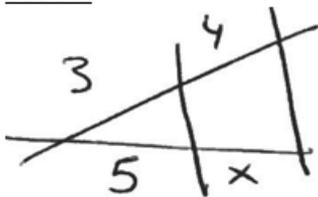
16. Sergio mide una altura de 152 cm y mirando al sol tiene una sombra de 90 cm. Si un árbol en ese mismo momento tiene una sombra de 2'70 m. ¿Qué altura tendrá? .

TEORÍA. Teorema de Tales.

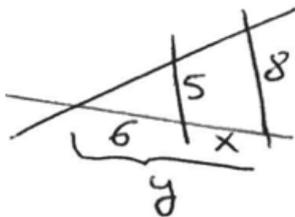


17. Calcula el valor de “x” en los siguientes triángulos en posición de Tales:

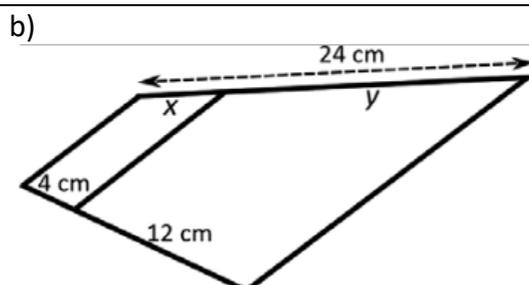
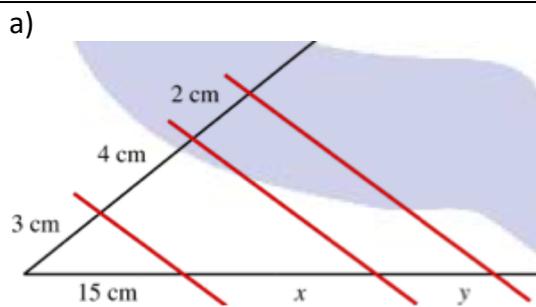
Caso 1

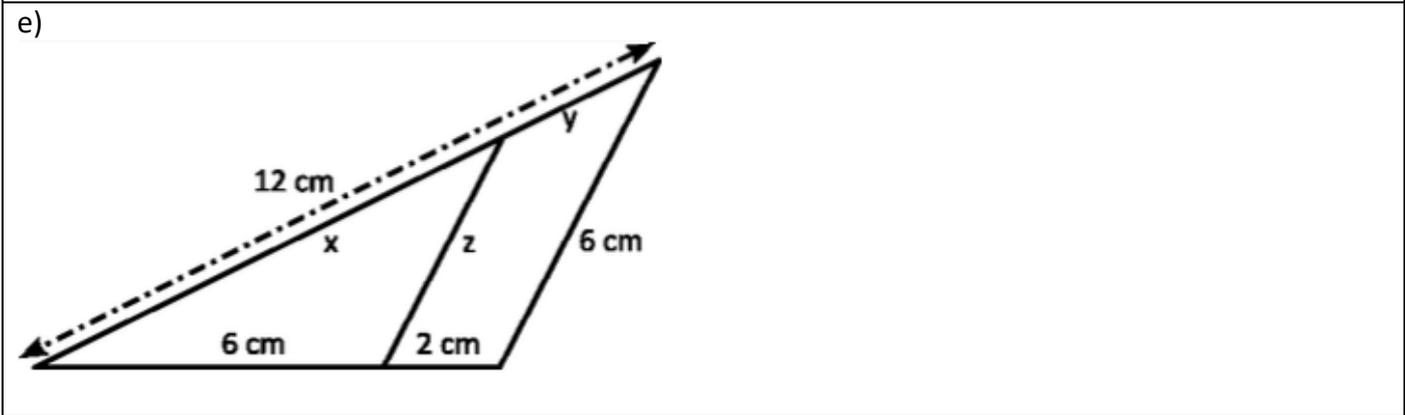
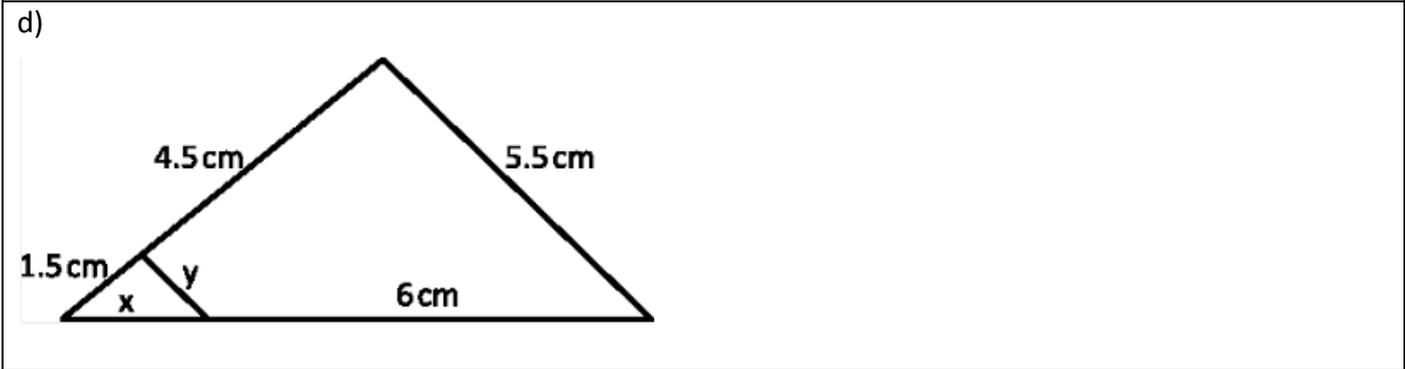
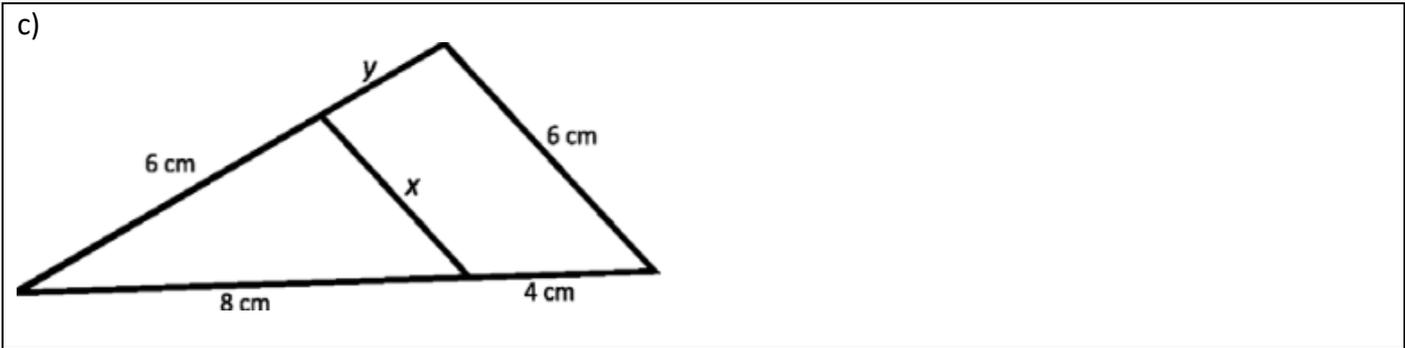


Caso 2



18. Usando el Teorema de Tales calcula el valor de “x” e “y”.





19. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

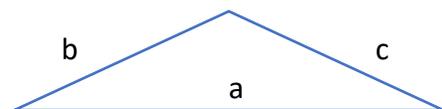
**TEORÍA. Teorema de Pitágoras.**



20. Queremos encargar una barandilla de hierro para una escalera de 3 peldaños de 40 cm de largo y 20cm de alto. Cuánto medirá de arriba a abajo, siendo esta la medida que necesita.

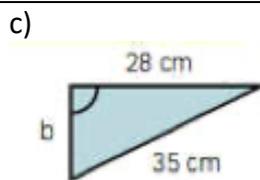
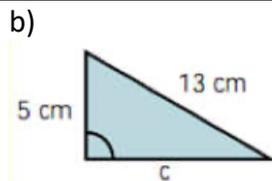
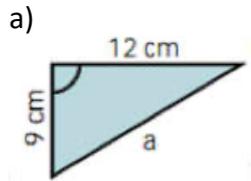


21. Indica si los siguientes triángulos son rectángulos, acutángulos u obtusángulos justificando tu respuesta:



a) $a=15, b=10, c=11$
b) $a=37, b=12, c=35$
c) $a=30, b=23, c=21$
d) $a=25, b=20, c=15$
e) $a=11, b=10, c=7$

22. Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos:



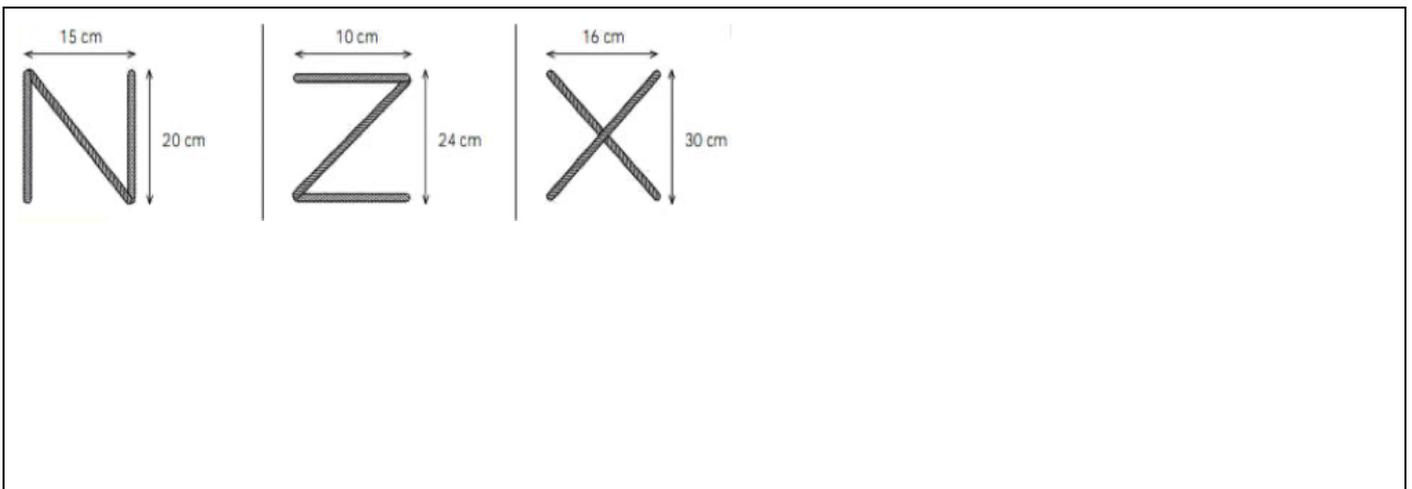
23. Se cae un poste de 14,5 m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?

24. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

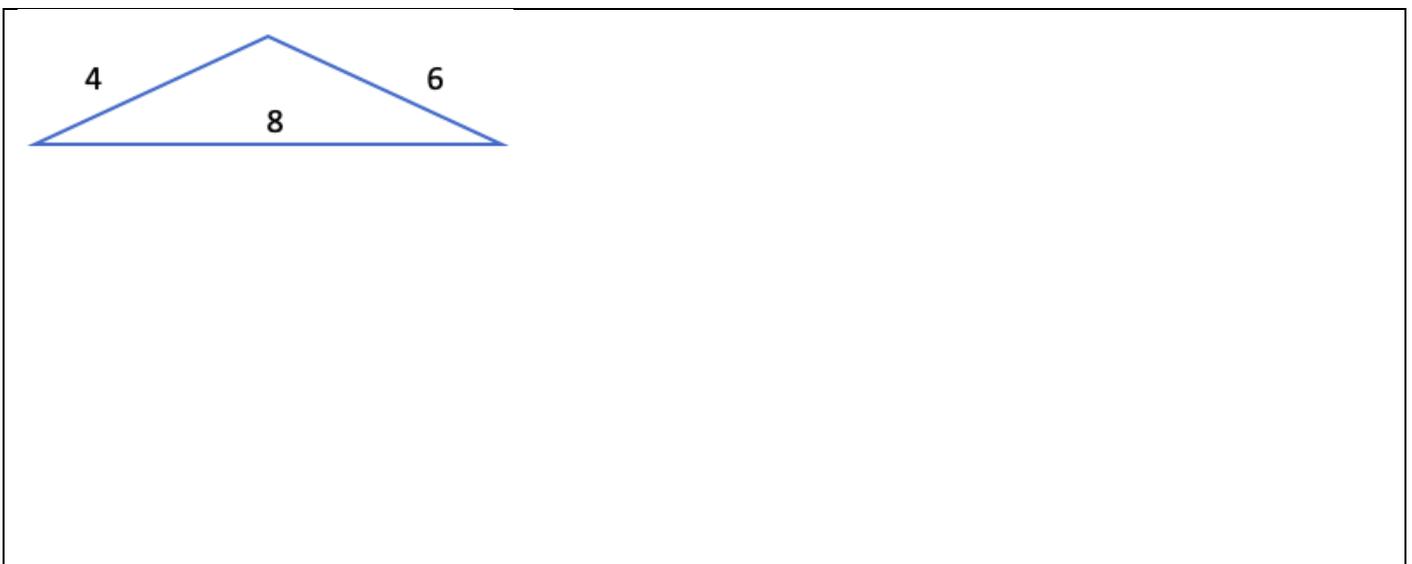
25. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.

26. Una portería de fútbol mide 7,32 m de ancho por 2,44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en: a) Un tiro directo a la base del poste. b) Un tiro directo a la escuadra.

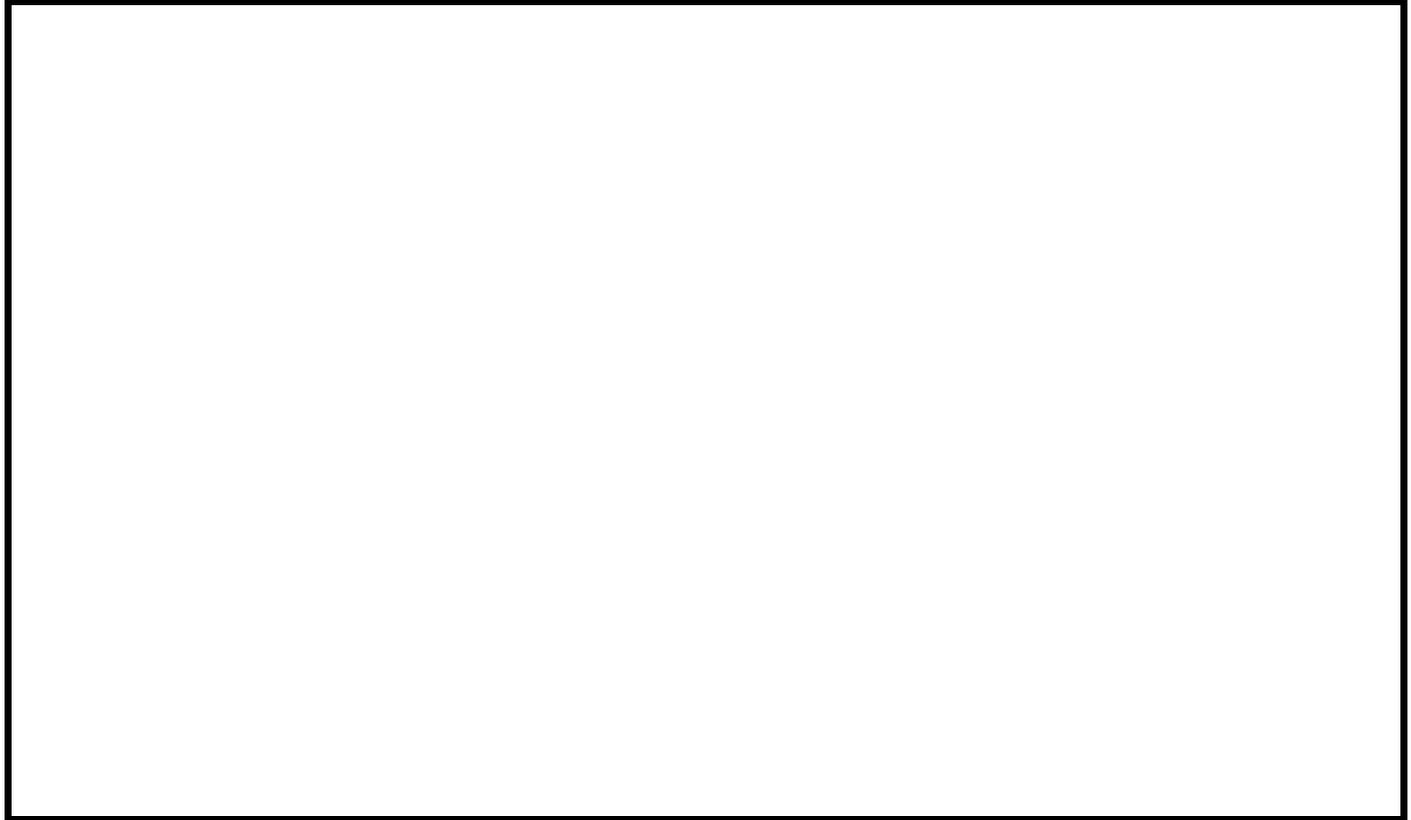
27. Calcula los cm de cuerda que se necesitan para formar las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones.



28. En un triángulo de lados 4, 6 y 8 cm respectivamente, calcular la altura sobre el lado mayor.

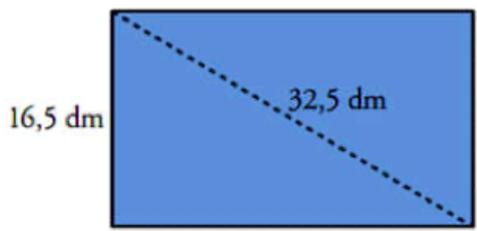


TEORÍA. Perímetros y áreas sobre figuras planas.

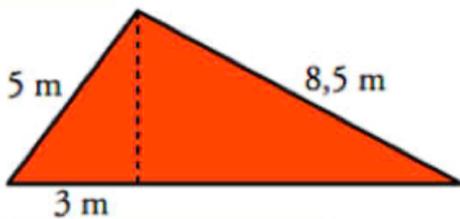


29. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras:

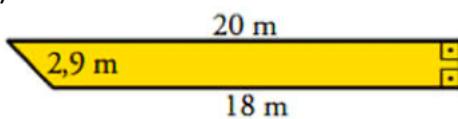
a)



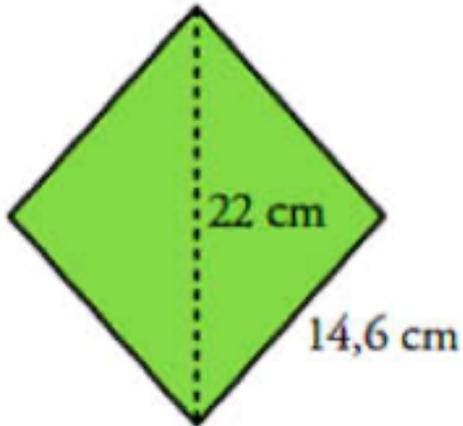
b)



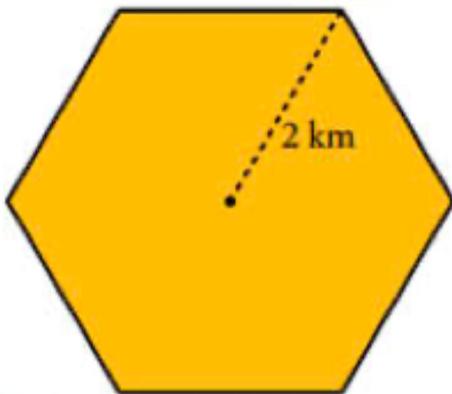
c)



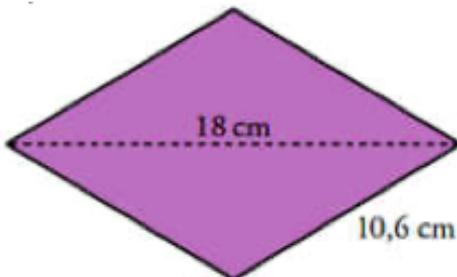
d)



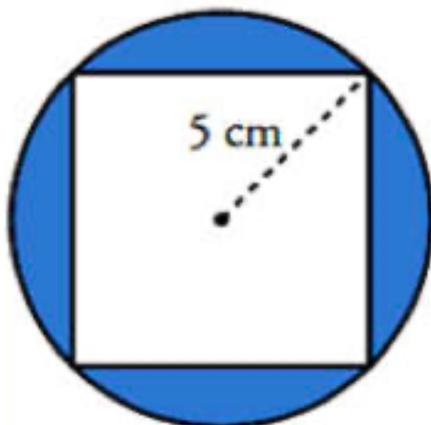
e)



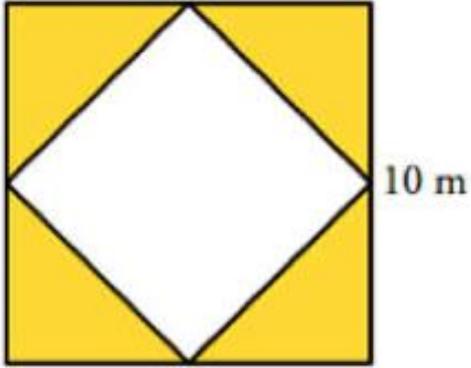
e)



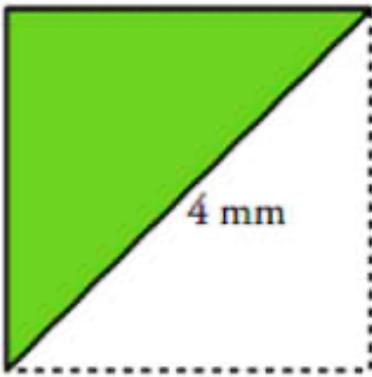
f)



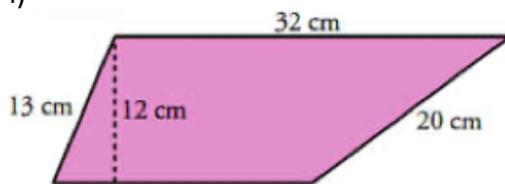
g)



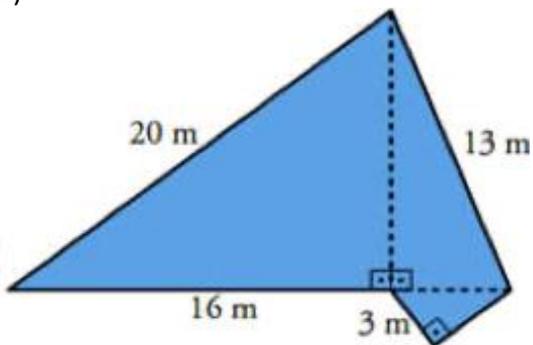
h)



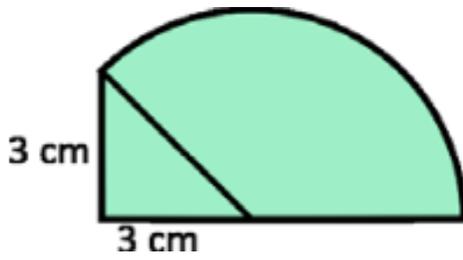
i)



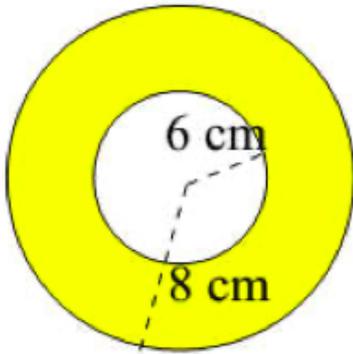
k)



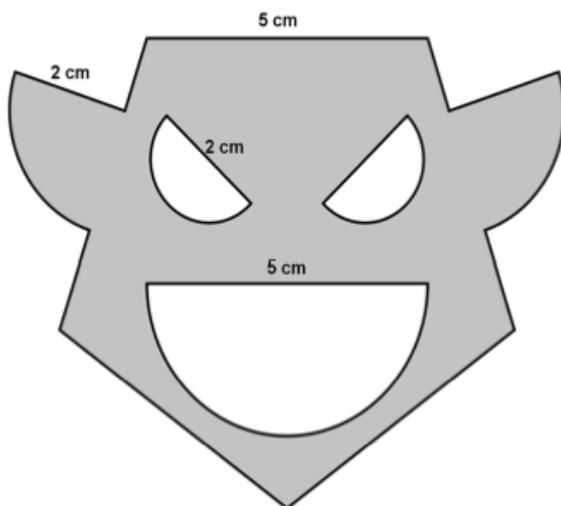
l) (Pista: para calcular el ángulo del sector circular ten en cuenta que el triángulo es isósceles).



m)



n) Calcula el área:



30. **Problema de investigación.** Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de área  $100 \text{ cm}^2$ .

a) Justifica porque las únicas opciones posibles de recubrir el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono.

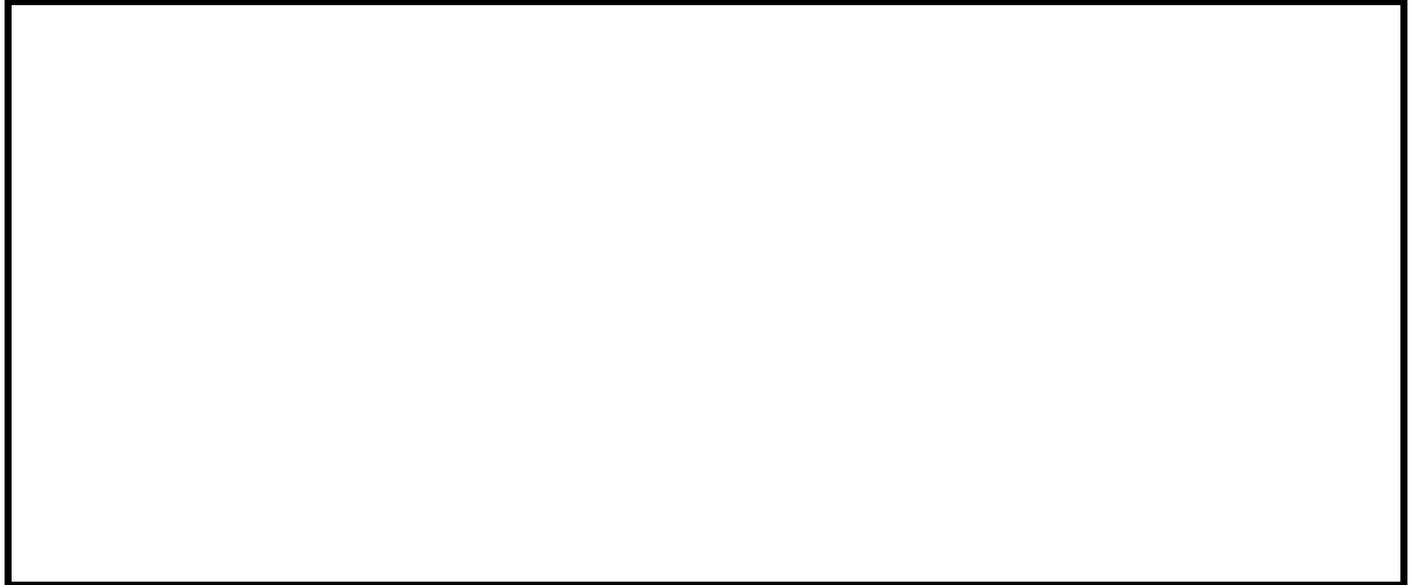
b) Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro teniendo las tres un áreas de  $100 \text{ cm}^2$ . ¿Qué animal aplica este resultado?

**TEORÍA. Clasificación de poliedros y cuerpos de revolución.**

31. Dibuja las siguientes figuras:

a) Prisma pentagonal	b) Pirámide hexagonal	c) Prisma cuadrangular
d) Tetraedro (pirámide triangular con triángulos regulares iguales)	e) Cubo	f) Pirámide cuadrangular
g) Cilindro	h) Cono	i) Esfera

### TEORÍA. Área y volumen de prismas



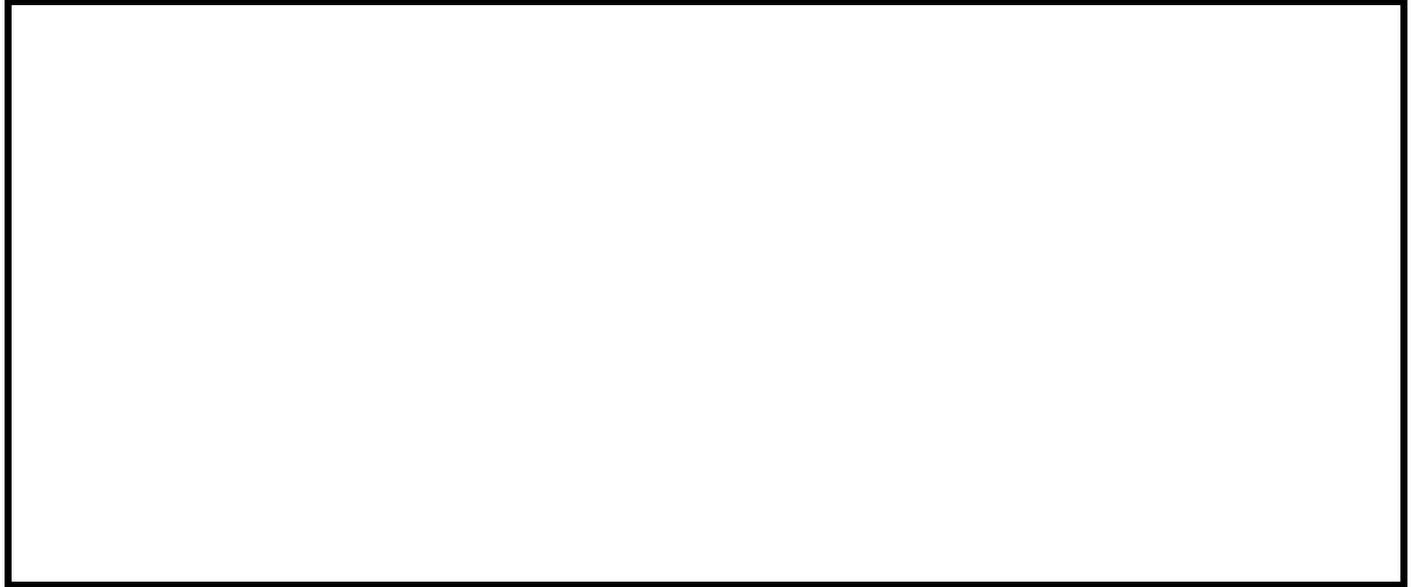
32. Calcula el área y el volumen de un prisma de base rectangular de 3 cm x 4 cm y altura 7 cm.



33. Busca en casa un cartón de leche con forma de prisma como el de la imagen. Toma con una regla sus medidas de ancho, largo y alto y calcula el área y volumen que tiene.



### TEORÍA. Área y volumen de pirámides



34. Calcula el área y el volumen la siguiente pirámide.



35. La Gran Pirámide de Keops (situada a las afueras del Cairo) es, además de la mayor de las pirámides de Egipto, la más antigua de las siete maravillas del mundo y la única que aún perdura. Fue ordenada construir por el faraón Keops de la cuarta dinastía del Antiguo Egipto. Tiene una base cuadrada de 57 metros y una altura de 138 metros aproximadamente. Vamos a calcular que volumen ocupa su interior.



## TEORÍA. Área y volumen de cilindros



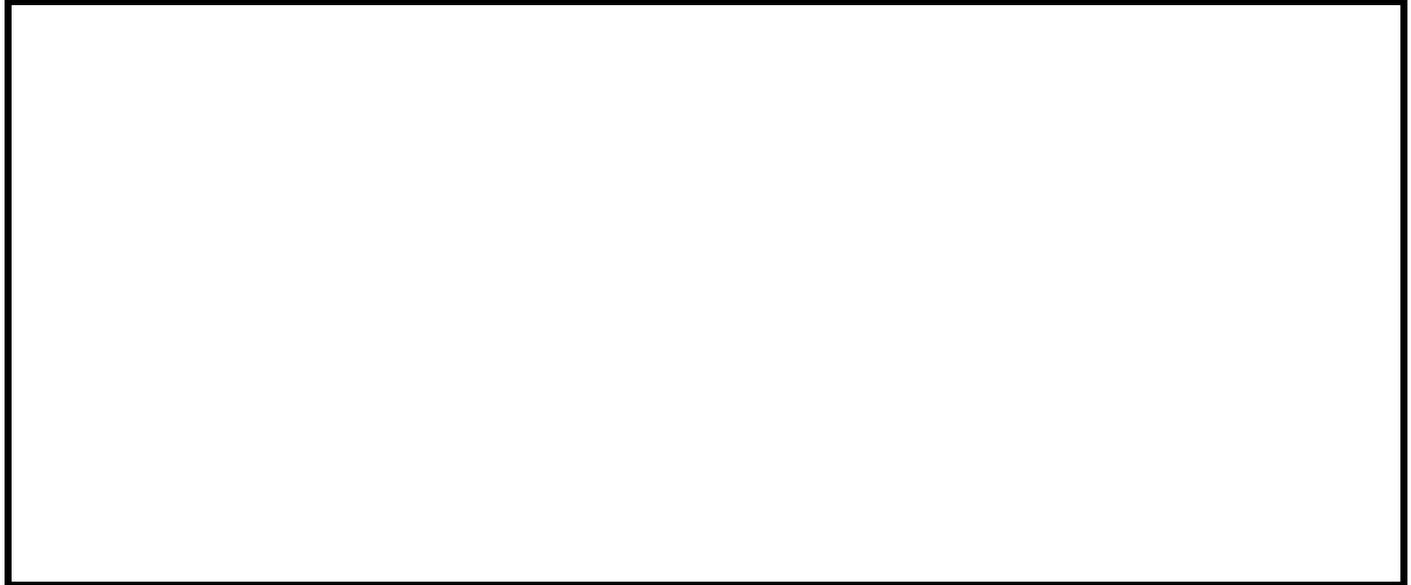
36. Calcula el área y el volumen la siguiente cilindro.



37. Calcula cuántos litros de bebida le caben a un vaso cilíndrico de radio 4 cm y de altura 12 cm.



### TEORÍA. Área y volumen de conos



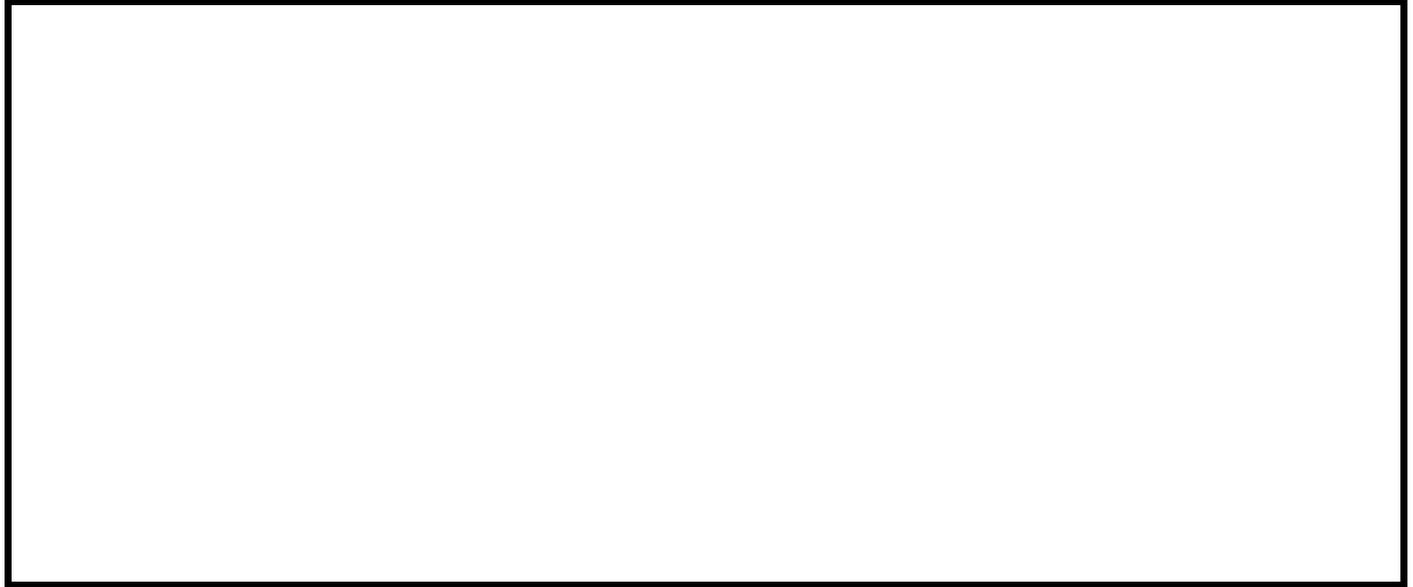
38. Calcula el área y el volumen la siguiente cono.



39. Calcula cuántos mililitros de helado le caben a un cucurucho de radio 3 cm y de altura 10 cm.



## TEORÍA. Área y volumen de la esfera



40. Calcula el área y el volumen la siguiente esfera de radio 8 cm.



41. Calcula líquido le cabe en su interior a una pelota de 10 cm de radio.



## UNIDAD 8. TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

B3.C4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

B3.C4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

B3.C5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

### Resumen del tema:

#### 1. Movimientos del plano.

- Las **isometrías** son transformaciones geométricas en las que las figuras conservan su forma y su tamaño (conservan ángulos y distancias). Las isometrías del plano son traslaciones, giros y simetrías.

Las isometrías son directas cuando conservan el sentido de los ángulos (traslaciones y giros) e inversas cuando cambian el sentido (simetrías).

- Las **homotecias** son transformaciones geométricas que convierten figuras en otras semejantes (ángulos iguales y lados proporcionales).

#### 2. Vectores.

- Una flecha  $\overrightarrow{AA'}$  se llama vector con origen en A y extremo en A'. Se llama módulo a la longitud del vector.



- Las coordenadas de un vector  $\overrightarrow{AA'} = A' - A$

- Diremos que 2 vectores son iguales si tienen mismo módulo, dirección y sentido.

#### 3. Traslaciones.

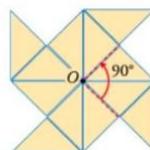
- Dado un vector  $\vec{v}$ , llamaremos traslación T según  $\vec{v}$  a una transformación que a cada punto P le asocia un punto P' cumpliendo que  $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$ .

- Las coordenadas de un vector  $\overrightarrow{AA'} = A' - A$

#### 4. Giros.

Dado un punto O y un ángulo  $\alpha$ , llamaremos giro de centro O y ángulo  $\alpha$  a una transformación que a cada punto P le asigna P' cumpliendo que  $\overline{OP} = \overline{OP'}$  y que  $\alpha = \widehat{POP'}$ .

Diremos que una figura plana tiene un centro de giro O de orden N cuando al girarla alrededor de O parece ella misma igual que estaba N veces.



**Ejemplo:** En esta figura O es un centro de giro de orden 4 porque girándola de  $90^\circ$  en  $90^\circ$  se obtiene ella misma 4 veces.

#### 5. Simetrías axiales.

Dada una recta r, se llama simetría axial de eje r a una transformación que a cada punto P le asigna P' de forma que r es la mediatriz del segmento PP'. A "r" se le llama eje de la simetría.



## TEORÍA. Movimientos en el plano.



1. Lee la siguiente bibliografía de Escher y responde las preguntas que vienen a continuación:

El artista gráfico holandés Maurits Cornelius Escher (1898-1972) es famoso por sus obras en las que utilizó simetrías, traslaciones y giros. Aplicando estas transformaciones a determinadas figuras conseguía llenar el plano.



Escher nació en 1898 en los Países Bajos, siendo el hijo más joven de un ingeniero hidráulico. Aprendió la técnica de los grabados, aunque no fue precisamente un estudiante brillante, y sólo llegó a destacar en las clases de dibujo.

En 1919 y bajo presión paterna empieza los estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, estudios que abandonó poco después para pasar como discípulo de un profesor de artes gráficas, Jessurum de Mesquitas. Adquirió unos buenos conocimientos básicos de dibujo, y destacó sobremanera en la técnica de grabado en madera, la cual llegó a dominar con gran perfección.

Entre 1922 y 1935 se traslada a Italia donde realiza diversos bocetos y grabados principalmente de temas paisajísticos. Abandona Italia debido al clima político de aquellas fechas, trasladándose a Suiza, y pasó algunos años en Suiza, cuyo clima le resultó muy desagradable y poco inspirador.

Añora el sur de Italia y lo frecuenta repetidas veces. También viaja a España, y en particular a Granada. Visita dos veces la Alhambra, la segunda vez de forma más detenida, copiando numerosos motivos ornamentales.

Lo que aprendió allí tendría fuertes influencias en muchos de sus trabajos, especialmente en los relacionados con la partición regular del plano y el uso de patrones que rellenan el espacio sin dejar ningún hueco.

En 1941 se muda a los Países Bajos, después de una estancia difícil en Bélgica (estamos en plena 2ª Guerra Mundial). Parece que debido al habitual mal tiempo de esa región, donde los días soleados se consideran una bendición, es por lo que abandona los motivos paisajísticos como modelos y se centra más en su propia

mente, encontrando en ella una potentísima fuente de inspiración. Hasta 1951 vivió básicamente dependiendo económicamente de sus padres. A partir de entonces fue cuando comenzó a vender sus grabados y obtener un buen dinero por ellos. Esto le permitió vivir sus últimos años con una economía personal excelente. Generalmente hacía copias de las litografías y grabados por encargo. También hizo por encargo diseños de sellos, portadas de libros, y algunas esculturas en marfil y madera. En cierto modo le resulta gratificante y a la vez fácil, y se admiraba de tener en su taller una especie de «máquina de fabricar billetes» reproduciendo sus propias obras. Normalmente no usaba elementos de obras anteriores en las nuevas, excepto en los encargos especiales. Hacía, por ejemplo, esculturas en madera basadas en algunos de sus dibujos, y para algunas peticiones especiales reciclaba parte de las ideas y elementos de obras anteriores.

Quizás por ello en este período su producción sea tan fructífera y regular, y sólo se verá interrumpida por la operación que sufrió en 1962, consecuencia de su debilitada salud.

En 1970 se traslada al norte de Holanda, donde los artistas podían tener estudio propio. En esa ciudad fallece dos años más tarde, en 1972.

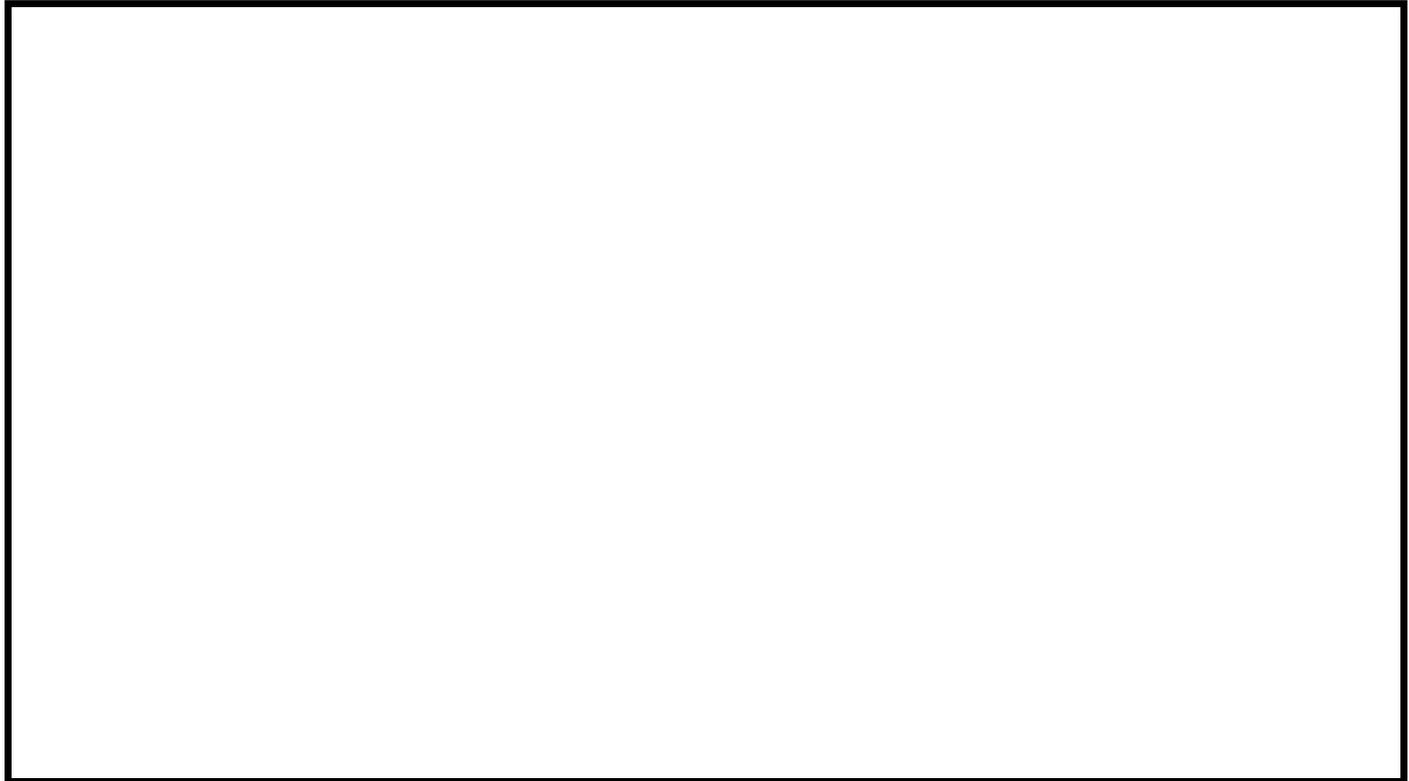
Son muy famosos sus dibujos de figuras imposibles, cuerpos matemáticos extraños, sus estudios del infinito y de la perspectiva, etc .

a) Haz un resumen de 5 o 6 líneas sobre el texto

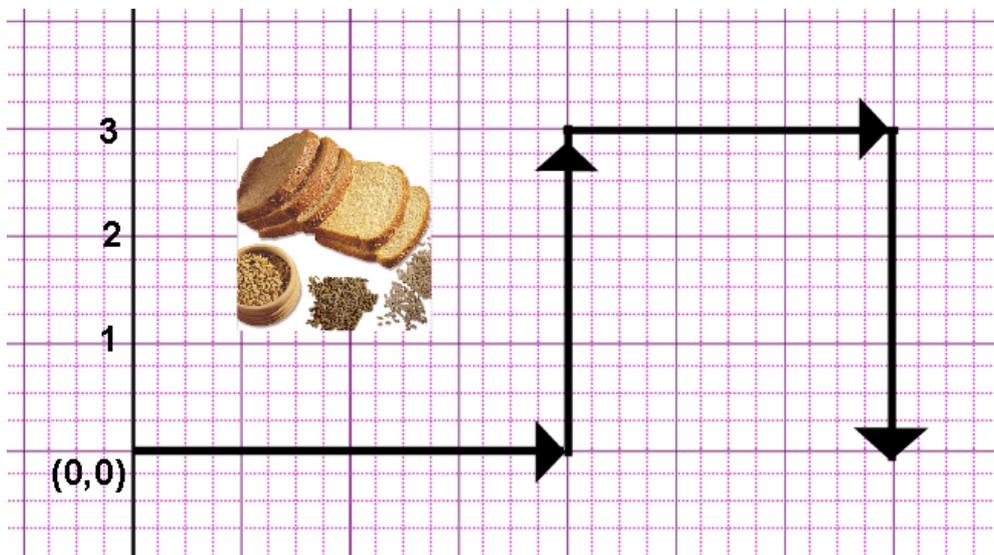
b) ¿Qué contenido de Matemáticas crees que tiene este texto?.

c) Al principio del texto se habla de simetrías, traslaciones y giros. ¿Sabes lo que es cada uno de esos conceptos?.

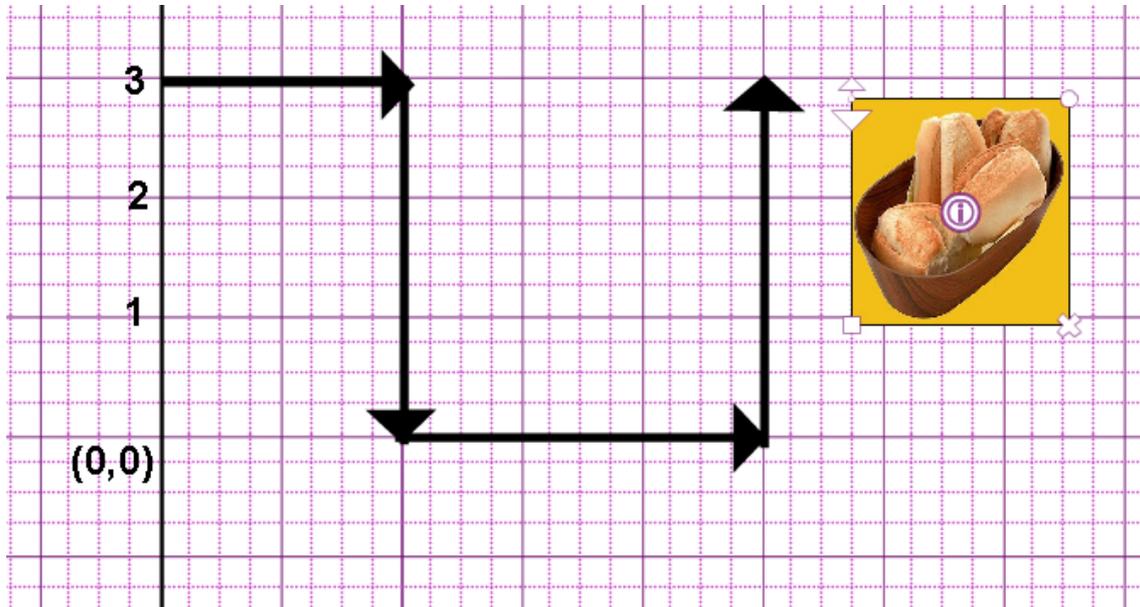
TEORÍA. Vectores. Traslaciones.



2. Imagina que la siguiente imagen (vista desde arriba) determina el movimiento que va haciendo la máquina desde que sale hasta que llega al final de la cadena de envasado. Calcula las coordenadas de cada uno de los vectores que marcan el movimiento.



3. Imagina que la siguiente imagen (vista desde arriba) determina el movimiento que va haciendo la máquina desde que sale hasta que llega al final de la cadena de envasado. Calcula las coordenadas de cada uno de los vectores que marcan el movimiento.



4. Imagina que estudias Informática y acabas de Programador de Software de una máquina que transporta bizcochos de 3 en 3 y tienen que estar alineados.

a) Suponiendo que las posiciones finales de dos de los bizcochos es  $(1,5)$  y  $(3,7)$ . ¿Sabrías inventar una fórmula para que la máquina compruebe si el tercer bizcocho está alineado con los otros dos?.

b) Con esa fórmula comprueba cual de estos dos bizcochos está bien alineado con los otros dos.

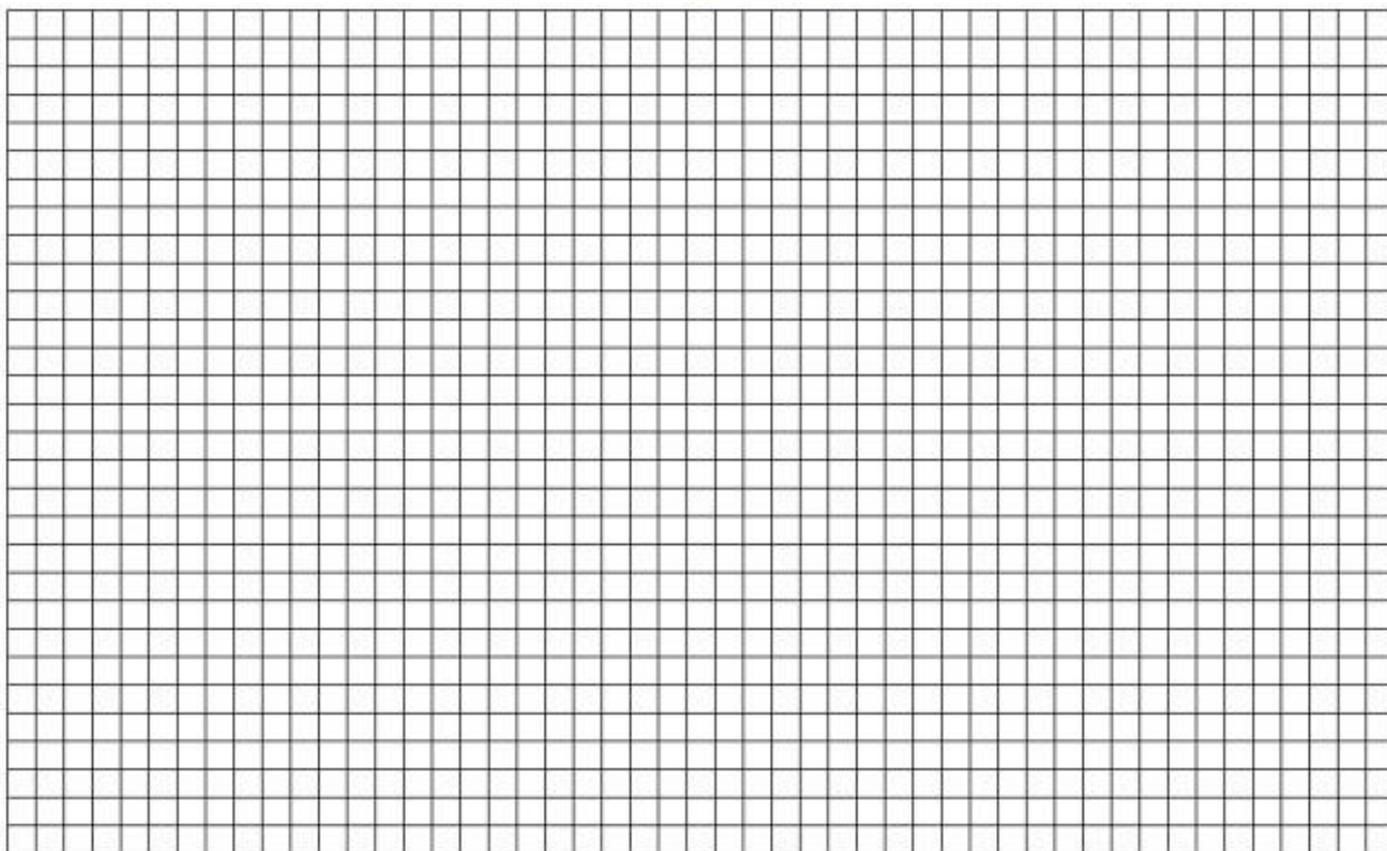
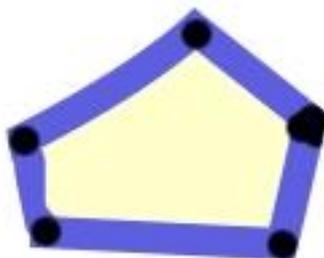


Posición  $(2,7)$



Posición  $(4,9)$

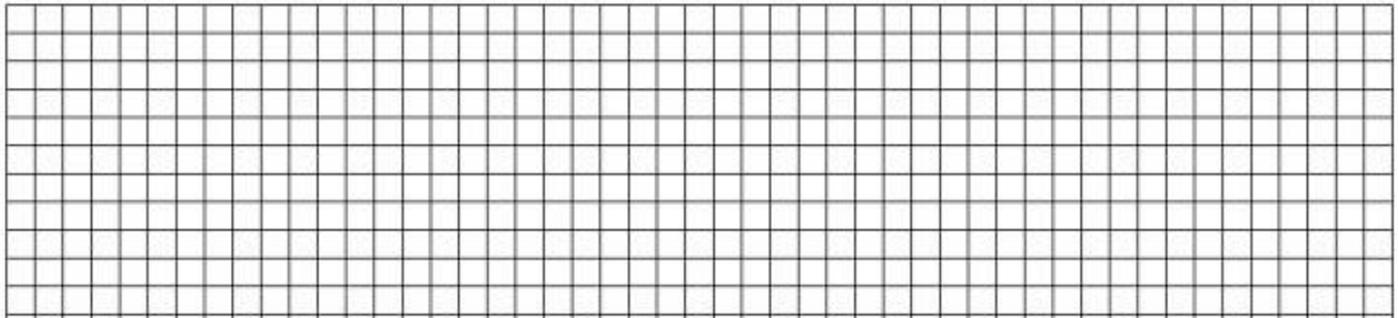
5. En el siguiente espacio cuadrículado, fija un eje de coordenadas y representa una figura uniendo 5 puntos.



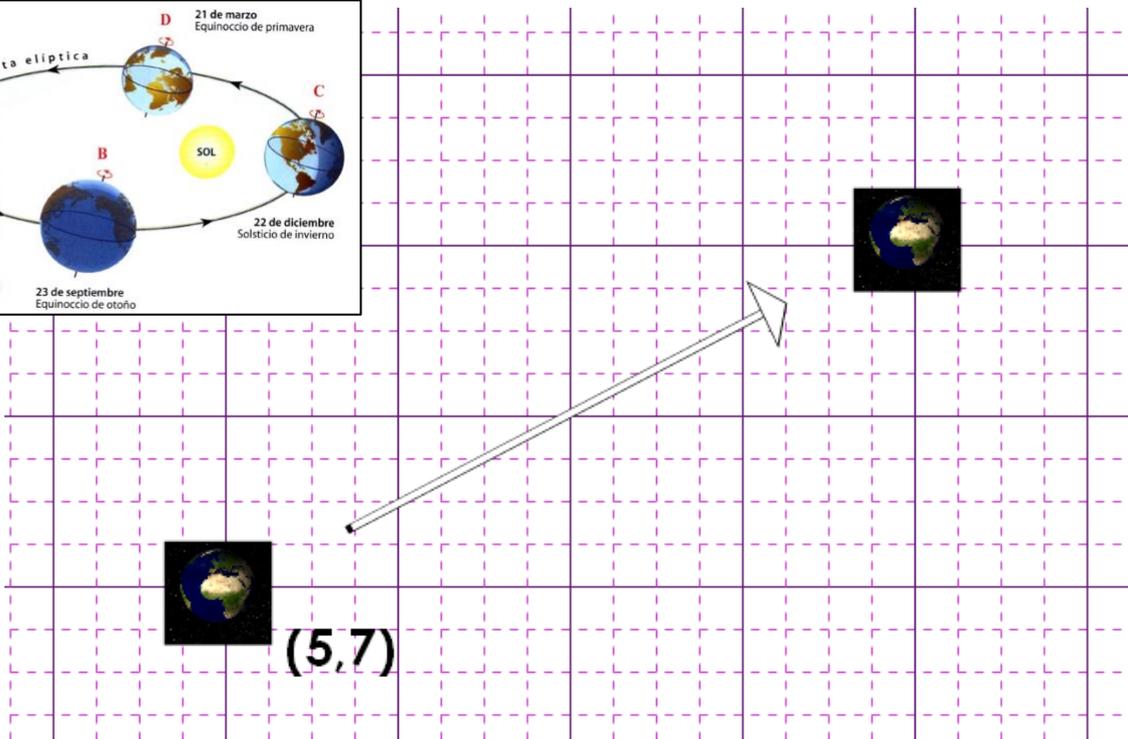
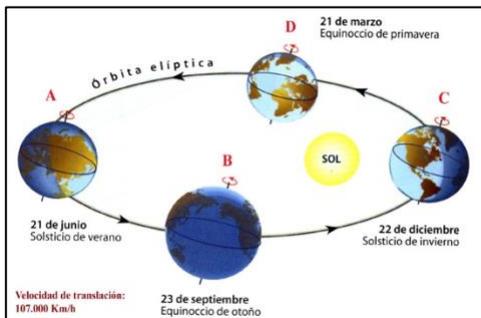
a) Vamos a aplicarle a dicha figura una traslación de vector  $(8,-6)$ . Calcula las coordenadas de los nuevos puntos trasladados.

b) Dibuja los 5 nuevos puntos que hemos calculado en el apartado anterior. Uniéndolos, ¿Qué figura obtienes?. ¿Qué distancia has trasladado la figura?.

6. Supongamos que fijamos un eje de coordenadas y tenemos un bizcocho de centro  $(1,3)$  y radio 2. ¿Qué harías para aplicarle una traslación de vector  $(-5, -3)$ ? Representa la traslación.



7. La traslación de la Tierra es el movimiento que hace alrededor del sol siguiendo un órbita elíptica. La Tierra completa una vuelta en 365 días, 6 horas, 9 minutos y 10 segundos. Supongamos el siguiente fragmento de la traslación de la tierra alrededor del Sol.



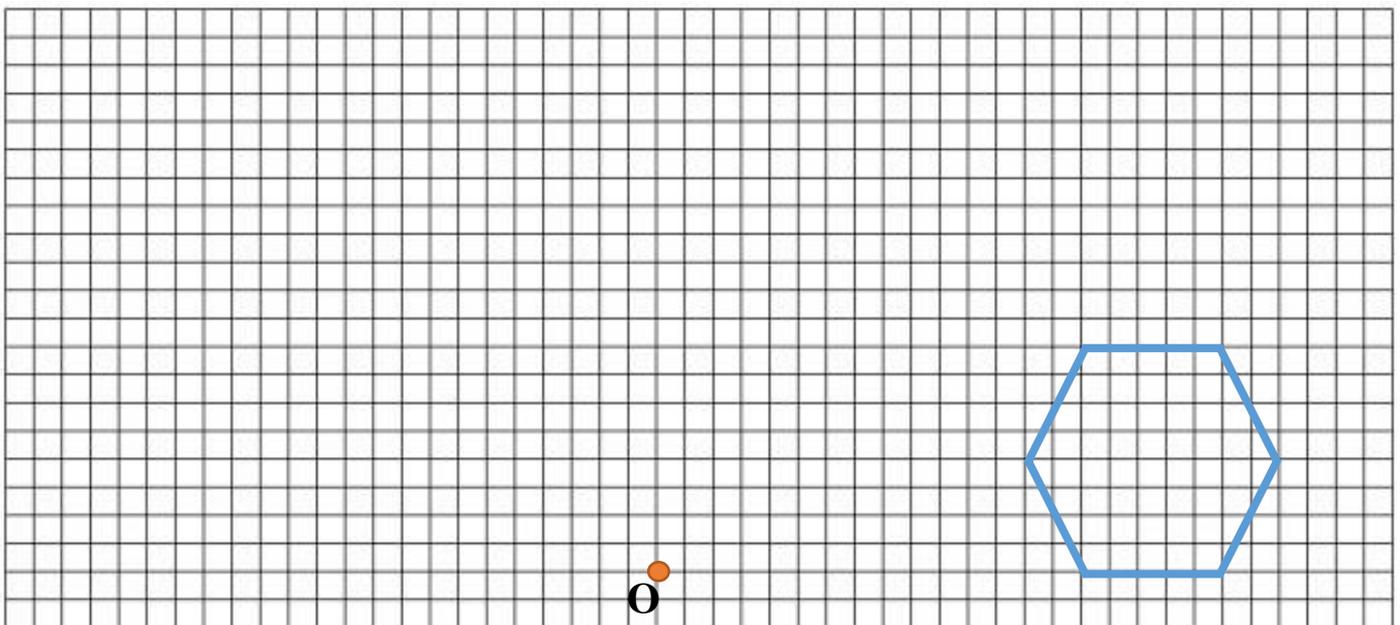
a) ¿Sabrías calcular a partir de la imagen cuál sería el vector que define la dirección que va siguiendo la tierra en ese instante?

b) ¿Podrías descomponer ese vector como suma de otros dos vectores, uno horizontal y otros vertical?. En caso afirmativo, ¿Cuáles serían esos vectores?.

### TEORÍA. Giros.



8. Usando el transportador de ángulos y el compás, representa en tu cuaderno la siguiente figura girándola con respecto al centro de giro O con ángulos de  $35^\circ$ .



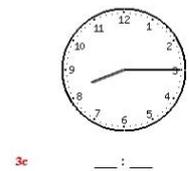
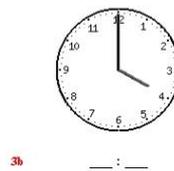
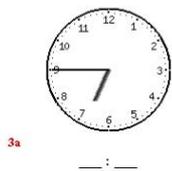
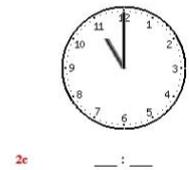
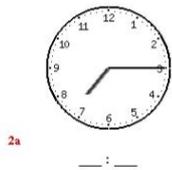
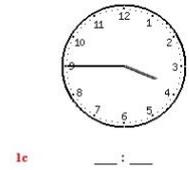
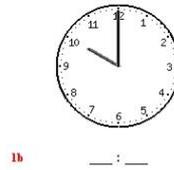
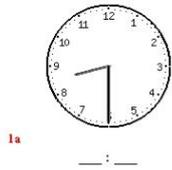
9. Tres de los cuatro anagramas siguientes tienen centro de giro, de cual es el orden y el ángulo mínimo para conseguir que la figura se transforme en ella misma.

10. Observa las siguientes imágenes indicando si tienen centro de giro. Además de cual es el orden y el ángulo mínimo para conseguir que la figura se transforme en ella misma.

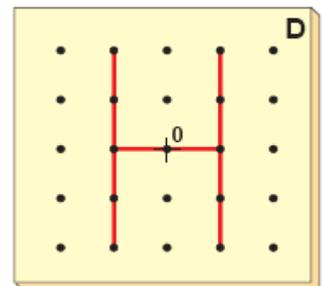
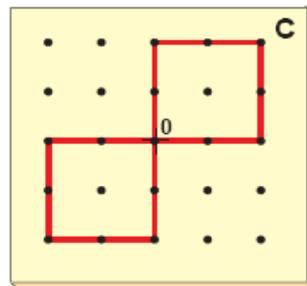
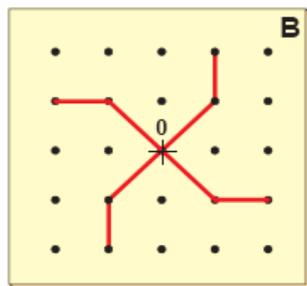
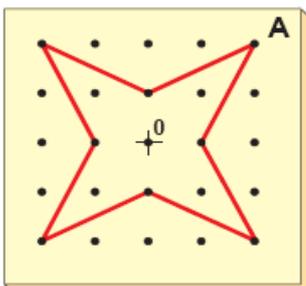
11. **Giros de un reloj.** ¿Cuál es el centro de giro en los siguientes relojes?. Suponiendo que la hora inicial eran las 12 en punto de la mañana, ¿Qué ángulo de giro han experimentado las agujas de los minutos de los siguientes relojes?. ¿Qué ángulo de giro han experimentado las agujas de las horas?



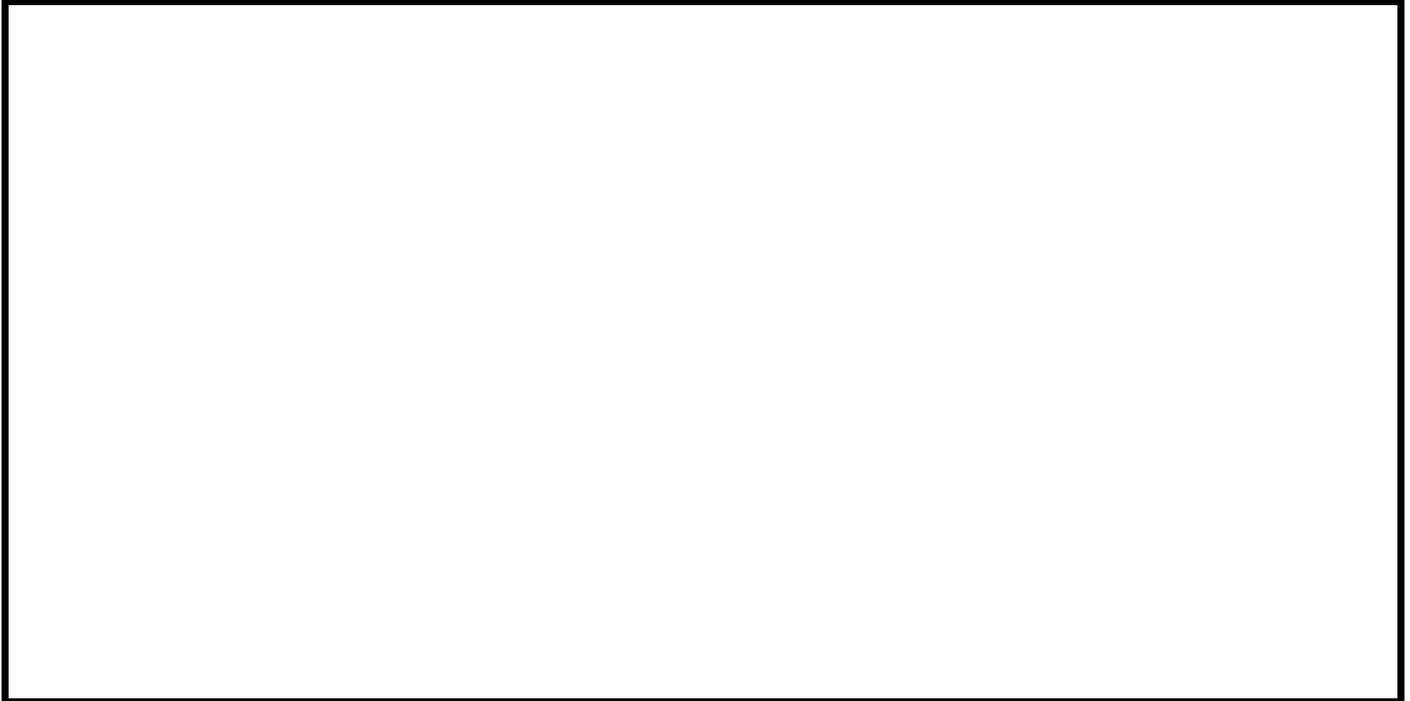
12. **Movimiento de Rotación de la tierra.**

- ¿Cuál es el centro de giro de la Tierra?
- ¿Estás seguro que en el caso de la Tierra hay un centro de giro o es un eje de giro?
- ¿Qué ángulo de giro hará experimentado la tierra si contamos desde hace 2 días y 3 horas?
- ¿Qué ángulo de giro hará experimentado la tierra si contamos desde hace 10 horas y 45 minutos?

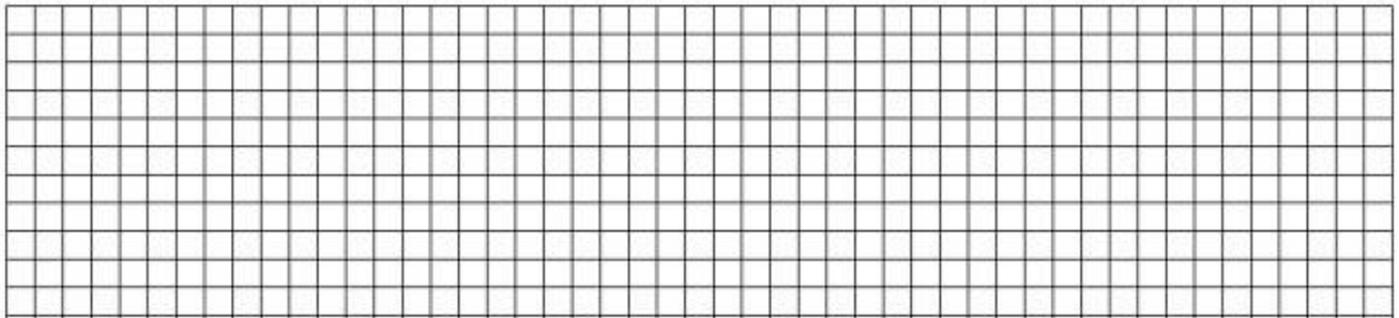
- ¿Cuál de estas figuras será la misma después de una rotación de  $\frac{1}{4}$  de vuelta?
- ¿Cuál de estas figuras será la misma después de una rotación de  $\frac{1}{2}$  de vuelta?



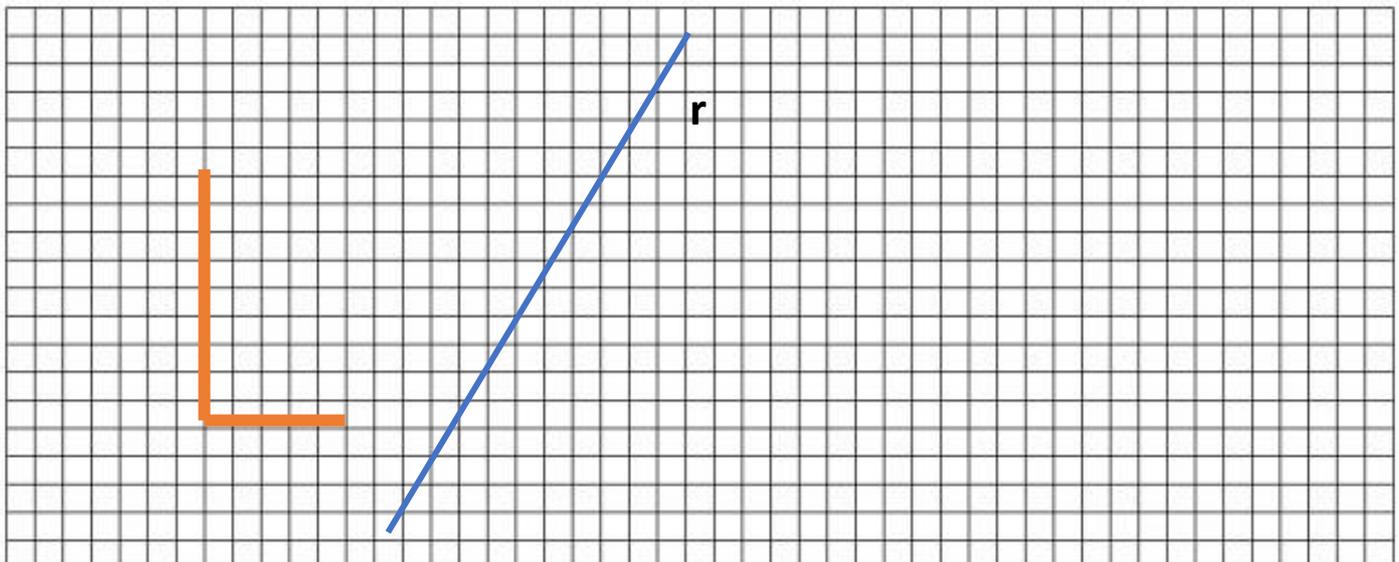
### TEORÍA. Simetrías axiales.



14. Dibuja a continuación dos puntos  $P$  y  $P'$ . Dibuja el eje de simetría  $r$  respecto al que son simétricos.

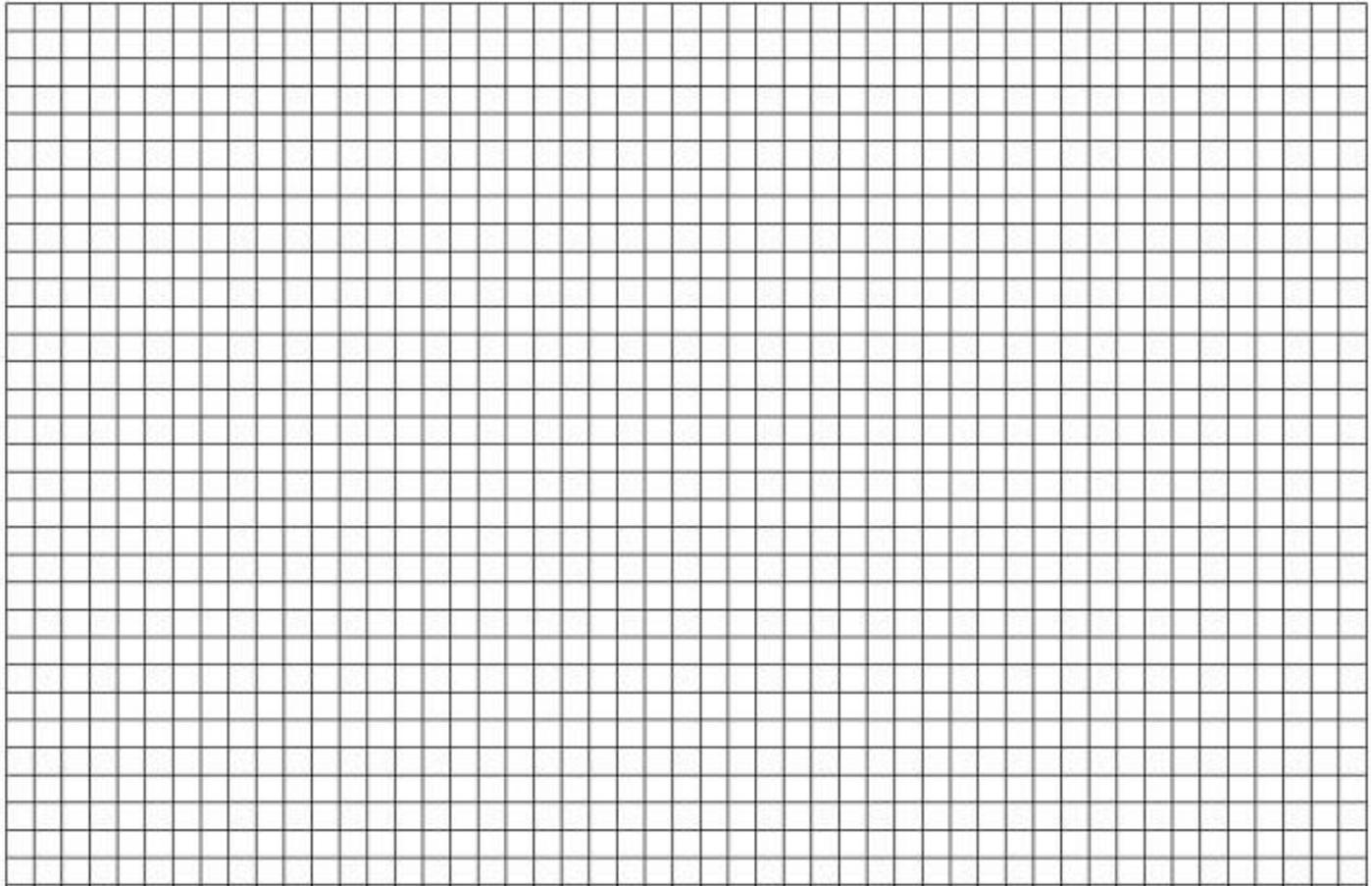


15. Dibuja la figura simétrica a la que hay dibujada respecto a la recta “ $r$ ”.

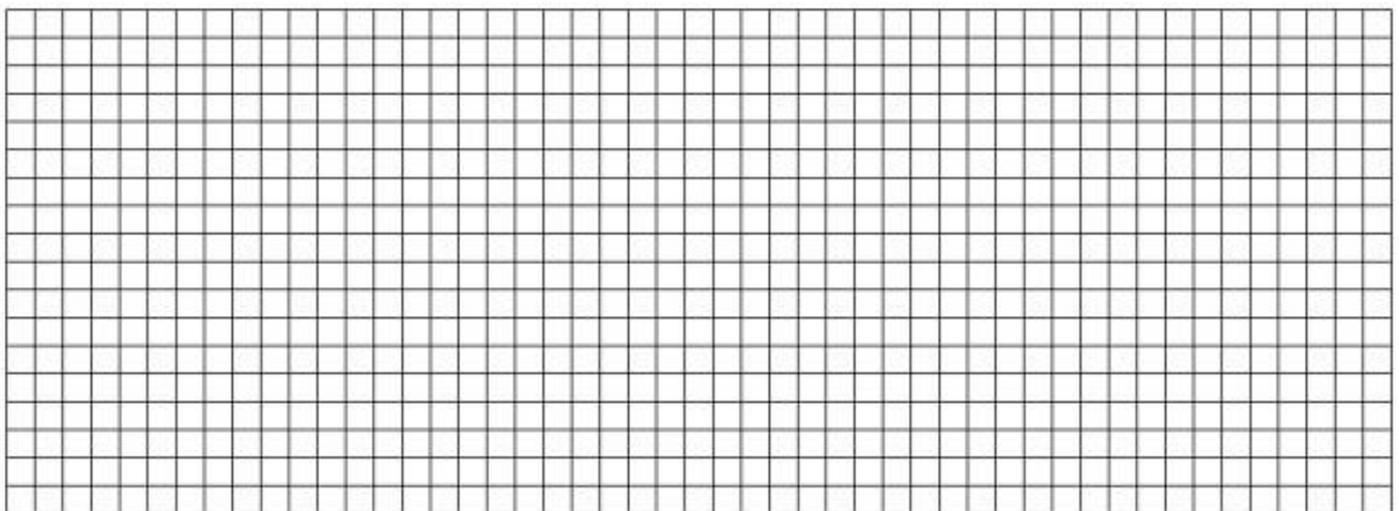


16. Los puntos  $A(-10,7)$ ,  $B(-3,8)$ ,  $C(2,3)$  y  $D(-5,2)$  son los vértices de un rombo. Calcula las coordenadas de los vértices del rombo transformado mediante:

- a) Una simetría de eje OX.
- b) Una simetría de eje OY.
- c) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por los puntos  $M(0,-3)$  y  $N(3,6)$ .



17. Considera como eje de simetría la recta  $y=x$ . Calcula los transformados a través de la simetría de ese eje de los puntos  $A(2,1)$ ,  $B(4,0)$ ,  $C(0,3)$  y  $D(4,4)$ . Después aplícale un traslación de vector  $\vec{v}=(6,5)$ .



## UNIDAD 9. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

### Estándares que se van a evaluar en esta unidad

- B5.C1.1. Distingue población y muestra y valora la representatividad de una muestra.
- B5.C1.2. Distingue entre variable cualitativa, cuantitativa discreta y cuantitativa continua.
- B5.C1.3. Elabora tablas de frecuencias y obtiene información de la tabla elaborada.
- B5.C1.4. Construye gráficos estadísticos adecuados a distintas situaciones de la vida cotidiana.
- B5.C2.1. Calcula e interpreta medidas de centralización y de posición (media, moda, mediana y cuartiles).
- B5.C2.2. Calcula e interpreta, con calculadora y hoja de cálculo, los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico, varianza y desviación típica) de una variable estadística.
- B5.C3.1. Analiza e interpreta información estadística de medios de comunicación.
- B5.C4.1. Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas.
- B5.C4.2. Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la Regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales o haciendo uso de tablas o árboles u otras estrategias personales, y emplea esta información en la toma de decisiones.

### Resumen del tema:

#### 1. Población, muestra e individuo.

- **Población:** Conjunto de todos los elementos que se estudian.
- **Muestra:** Subconjunto de la población elegido para realizar el estudio estadístico.
- **Individuo:** Cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

#### ¿Cuándo coger muestra en vez de población?

En poblaciones muy numerosas, poblaciones difíciles de controlar (Ej: personas de un aeropuerto) y cuando el proceso es muy caro.

#### ¿Cómo seleccionar una muestra?

Se debe escoger la muestra aleatoriamente (al azar) de forma que todos tengan la misma probabilidad de ser escogidos.

#### Tipos de muestras aleatorias:

- **Muestra aleatoria simple:** se van sacando individuos al azar.
- **Muestra aleatoria sistemática:** Se ordena la muestra, se saca un individuo al azar y el resto se van sacando mediante saltos iguales.
- **Muestra aleatoria estratificada:** se divide la muestra en grupos homogéneos llamados estratos (Ej: estratos por edad) y se saca una muestra aleatoria simple de cada estrato.

Cuando una muestra tiene el tamaño adecuado y además es aleatoria se dice que es **representativa**.

#### 2. Variables estadísticas. Tipos.

Una variable es una característica que se quiere estudiar. Las clasificamos en 3 tipos:

- **Cualitativas:** no toman valores numéricos (Ej: color de ojos)
- **Cuantitativas discretas:** toman valores numéricos aislados (Ej: Número de hijos)
- **Cuantitativas continuas:** toman valores numéricos en un intervalo (Ej: Altura)

#### 3. Fases de un estudio estadístico. Hay 6 fases:

1. Saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos en tablas.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

#### 4. Tabla de frecuencias absolutas y relativas

Los datos recogidos de cada variable se recuentan y se representan en tablas de frecuencias.

- **Frecuencia absoluta**  $n^{\circ}$  de veces de cada dato
- **Frecuencia relativa** es división entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

Ejemplo:  $N^{\circ}$  TV en cada casa

Muestra: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3

Variable(X)	Frec.Absoluta( $f_i$ )	Frec.Relativa( $h_i$ )
1	2	2/10
2	5	5/10
3	3	3/10



**5. Medidas centrales.** Nos indican un valor central en torno al que se distribuyen los datos

**Media aritmética:** La media o promedio es la suma de los datos dividida entre el nº de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Cálculo de la media en tabla de frecuencias:

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$
$x_1$	$f_1$	
$x_2$	$f_2$	
...	...	
$x_n$	$f_n$	

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{n}$$

**Mediana:** Es el valor que deja el 50% de los datos por debajo de él.

**Cuartiles:**  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  son los valores que dejan el 25%, 50% y 75% respectivamente por debajo de él.

**Moda:** Es el dato que más se repite.

**6. Medidas de dispersión.** Nos indican la separación de los datos en torno a la media.

**Rango o Recorrido:** Diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

**Varianza:** Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$var(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Se puede calcular de forma más corta:

$$var(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

Cálculo de varianza en tabla de frecuencias:

$x_i$	$f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
$x_1$	$f_1$	
$x_2$	$f_2$	
...	...	
$x_n$	$f_n$	

$$Var(x) = \frac{x_1^2 \cdot f_1 + x_2^2 \cdot f_2 + \dots + x_n^2 \cdot f_n}{n} - \bar{x}^2$$

**Desviación típica:** Raíz cuadrada de la varianza.  $\sigma = \sqrt{var(x)}$

**Coefficiente de variación:**  $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ , para comparar dispersión entre muestras distintas.

**7. Gráficos estadísticos.**

Vamos a estudiar 3 tipos de representaciones de tablas de frecuencias:

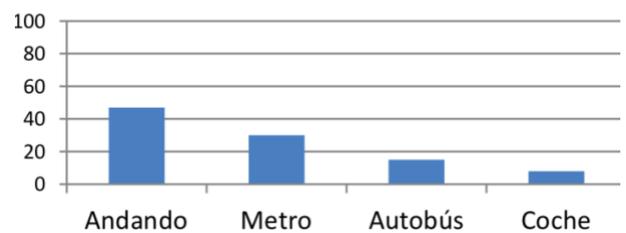
1. **Diagrama de rectángulos.**

Para variables cualitativas o cuantitativas discretas se llama Diagrama de Barras. Para cuantitativas continuas se llama Histograma.

En el eje horizontal se representan los valores de la variable y el eje vertical las frecuencias.

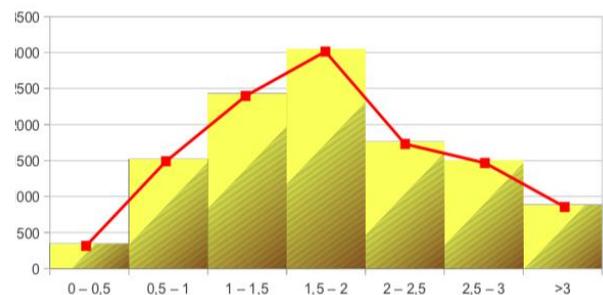
Ejemplo: Diagrama de barras de una muestra sobre formas de transporte de estudiantes

Frecuencia Absoluta



2. **Polígono de frecuencias (diagrama de líneas).** Se utiliza para variables cuantitativas discretas y continuas con el fin averiguar la tendencia. Se construye uniendo los puntos medios de las barras de diagramas de barras o histogramas.

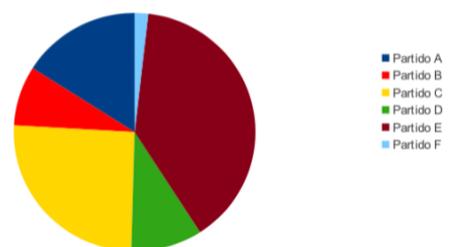
Horas de ocio dedicadas a internet



3. **Diagrama de sectores**

Se representan sectores circulares cuyo ángulo es proporcional a la frecuencia absoluta.

Votos obtenidos por los diferentes partidos políticos



### 8. Experimentos aleatorios y deterministas

- **Experimento aleatorio:** Es aquel cuyo resultado depende del azar.

Ejemplo: Cara o cruz al tirar una moneda.

- **Experimento determinista:** es un experimento en el que sabemos el resultado que va a salir.

Ejemplo: Soltar un lápiz y ver si cae.

### 9. Espacio muestral. Sucesos.

- **Suceso elemental:** Cada uno de los resultados posibles de un Experimento Aleatorio.

- **Espacio muestral o suceso seguro:** Conjunto de todos los casos o sucesos elementales.

- **Suceso compuesto:** Subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo: Experimento “Lanzar un dado”

Sucesos elementales  $\rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

Espacio muestral  $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso compuesto  $\rightarrow$  “Sacar un número par”

### 10. Diagrama de árbol.

Es una técnica que veremos en clase que facilita determinar el espacio muestral y facilita poder contar casos.

### 11. Operaciones con sucesos

Unión  $A \cup B$  : Se verifica cuando se cumple A ó B.

Intersección  $A \cap B$  : Cuando ocurren A y B a la vez.

Ejemplo: “Lanzar Dado”, A=“Sacar impar”,

B=“Sacar  $>4$ ”,  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$  ,  $A \cap B = \{5, 6\}$

### 12. Frecuencias absolutas y relativas

Dado un experimento aleatorio, llamaremos:

- **Frecuencia absoluta** de un suceso al  $n^{\circ}$  de veces que se ha obtenido un suceso.

- **Frecuencia relativa** es división entre la frec. absoluta y el  $n^{\circ}$  de repeticiones del experimento.

Ejemplo: Lanzar una moneda 20 veces.

	Frec.Absoluta	Frec.Relativa
Caras	12	12/20
Cruces	8	8/20

### 13. Frecuencias y probabilidad. Regla Laplace.

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 que indica el grado de confianza que tenemos de que ocurra ese suceso.

- **Ley de los grandes números.** Si realizamos un experimento aleatorio muchas veces, la probabilidad coincide con la frecuencia relativa.

**Cálculo de la probabilidad**

- En experimentos irregulares (Ej: tirar chincheta), la probabilidad se calcula con la frec.relativa repitiendo muchas veces el experimento.

- En experimentos regulares (equiprobables – Ej: tirar dado, lanzar una moneda, ...), se usa la Regla de Laplace:

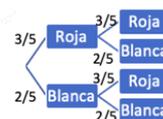
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables de } A}{\text{casos posibles}}$$

### 14. Experimentos/probabilidad compuesta.

- Se llama **experimentos compuestos** a aquellos que están formados por 2 o más experimentos simples (que pueden ser independientes cuando el resultado no depende de los otros o dependientes cuando cada resultado influye en las probabilidades siguientes).

- En experimentos compuestos se suele utilizar el diagrama de árbol para obtener el conjunto de resultados posibles y la probabilidad de cada camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

Ejemplo: Urna con 3 bolas rojas y 2 blancas. Si sacamos una bola, la metemos y volvemos a sacar otra. ¿Probabilidad que sea 2 veces blanca?



$$P(BB) = 2/5 \cdot 2/5 = 4/25$$



### TEORÍA. Población. Muestra. Tipos de muestras aleatorias.

1. Se quiere hacer un estudio sobre hábitos alimenticios de los estudiantes de 3º de ESO de todo Hellín. Pero como es muy costoso entrevistar a todos los estudiantes se decide entrevistar a los alumnos de 1º del IES Melchor de Macanaz. Indica:  

a) ¿Cuál es la población?: \_\_\_\_\_

b) ¿Cuál es la muestra?: \_\_\_\_\_

c) ¿Quiénes son los individuos?: \_\_\_\_\_

2. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elegimos 10 compañeros al azar y anotamos cuántas monedas lleva cada uno. Indica:

a) ¿Cuál es la población?: \_\_\_\_\_  

b) ¿Cuál es la muestra?: \_\_\_\_\_

c) ¿Quiénes son los individuos que no pertenecen a la muestra?: \_\_\_\_\_

3. Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra justificando tu respuesta

a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.

b) La altura de un grupo de seis amigos.  

4. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: “La nota media de los alumnos de 3º ESO es de 7’9”. ¿Como se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las alumnas, ¿sería representativo su valor?



5. Indica cuáles de las siguientes situaciones te parecen muestras aleatorias y cuáles no:



Experimento	¿Es una muestra aleatoria? Si/No
a) Para saber el nº de televisiones que tienen los hellineros en casa preguntamos en la puerta de un supermercado.	
b) Para saber lo que ganan de media los hellineros nos ponemos a preguntar en el mercado de Hellín de los miércoles.	
c) Para saber los gustos musicales de los hellineros le preguntas a 5 de tus amigos.	
d) Para saber el peso medio de los habitantes de Hellín nos ponemos a preguntar en la puerta de un gimnasio.	
e) Para saber la intención de voto en las próximas elecciones nos ponemos a preguntar en la puerta de la sede un partido político.	

### TEORÍA. Tipos de variables.

6. Indica si estas variables son cualitativas, cuantitativas discretas o cuantitativas continuas:



Variables	Tipo de variable
a) Color de ojos	
b) Altura	
c) Peso	
d) Número de televisiones en casa	
e) Edad	
f) Tipo de película (romántica, comedia, ...)	

g) Número frutas que comes a la semana	
h) Número de asignaturas aprobadas	
i) Tu cantante preferido	
j) Tiempo en llegar al instituto	
k) Lugar donde vives	
l) Número de hermanos	
m) Marcas de chocolate que conoces	
n) Número de chucherías que llevas encima	
o) Tu color favorito	
p) La simpatía	
q) Distancia que recorres para venir al instituto	
r) Dinero que llevas encima	

7. Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números:

2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2



Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (x)	Frec.Absoluta (f <sub>i</sub> )	Frec.Relativa (h <sub>i</sub> )	Porcentajes
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
Suma Total →			

8. Vamos a estudiar el color de pelo de los alumnos de 3º de ESO. Para ello tomamos la siguiente muestra:

CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, CASTAÑO, NEGRO, NEGRO,  
RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO, RUBIO



Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (x)	Frec.Absoluta (f <sub>i</sub> )	Frec.Relativa (h <sub>i</sub> )	Porcentaje (%)
CASTAÑO			
NEGRO			
RUBIO			
Suma Total →			

9. En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en  $mm$ , de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño  $n = 25$ , obteniendo los siguientes valores:

7'8, 8'2, 7'6, 10'5, 7'4, 8'3, 9'2, 11'3, 7'1, 8'5, 10'2, 9'3, 9'9,  
8'7, 8'6, 7'2, 9'9, 8'6, 10'9, 7'9, 11'1, 8'8, 9'2, 8'1, 10'5



Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

Variable (x)	Marca de clase ( $m_i$ )	Frec.Absoluta ( $f_i$ )	$f_i$ acumuladas	Frec.Relativa ( $h_i$ )	$h_i$ acumuladas
(7,8]					
(8,9]					
(9,10]					
(11,12]					
(12,13]					
Suma Total →					

10. Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2019 se recogen en la siguiente tabla:

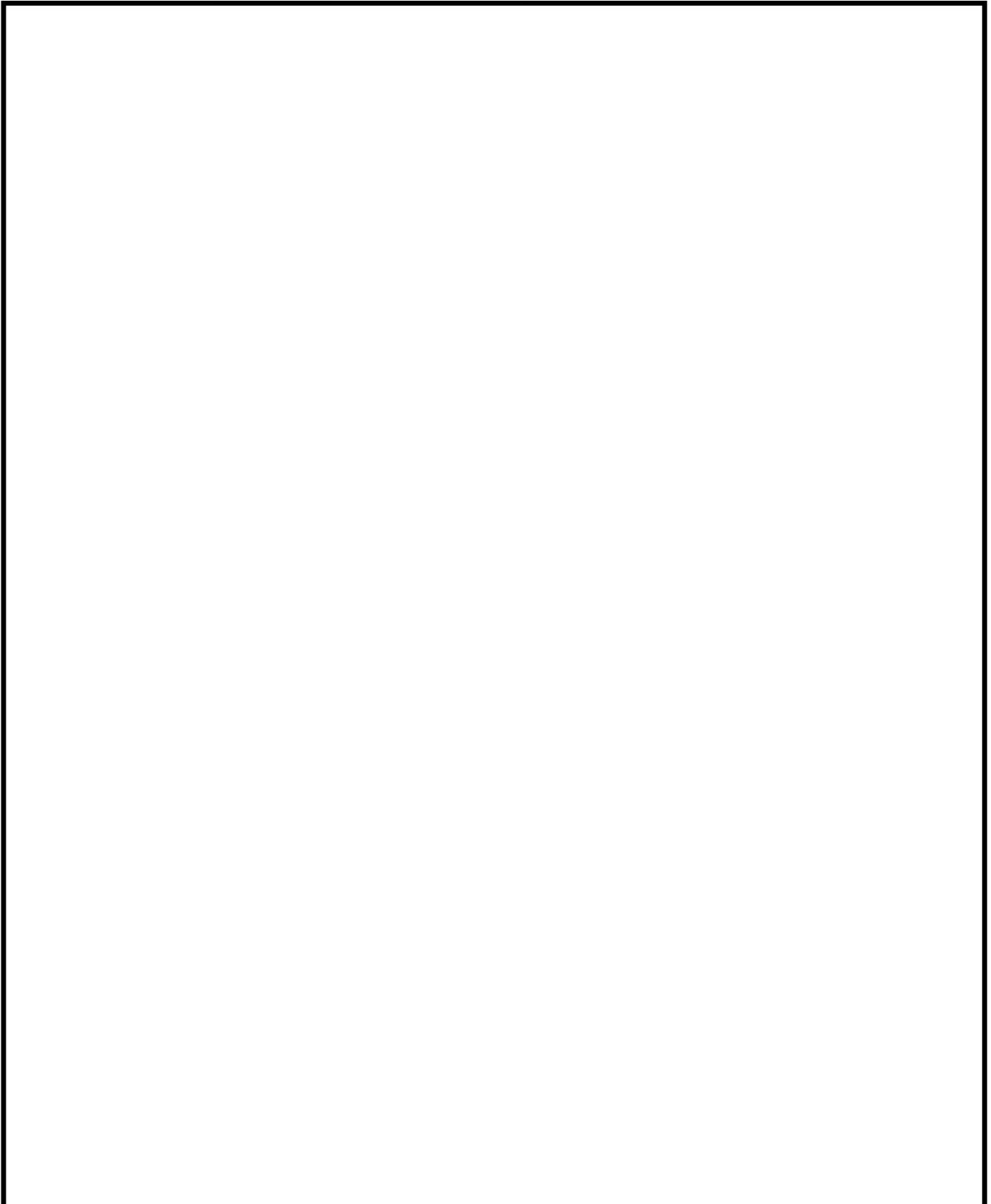
2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

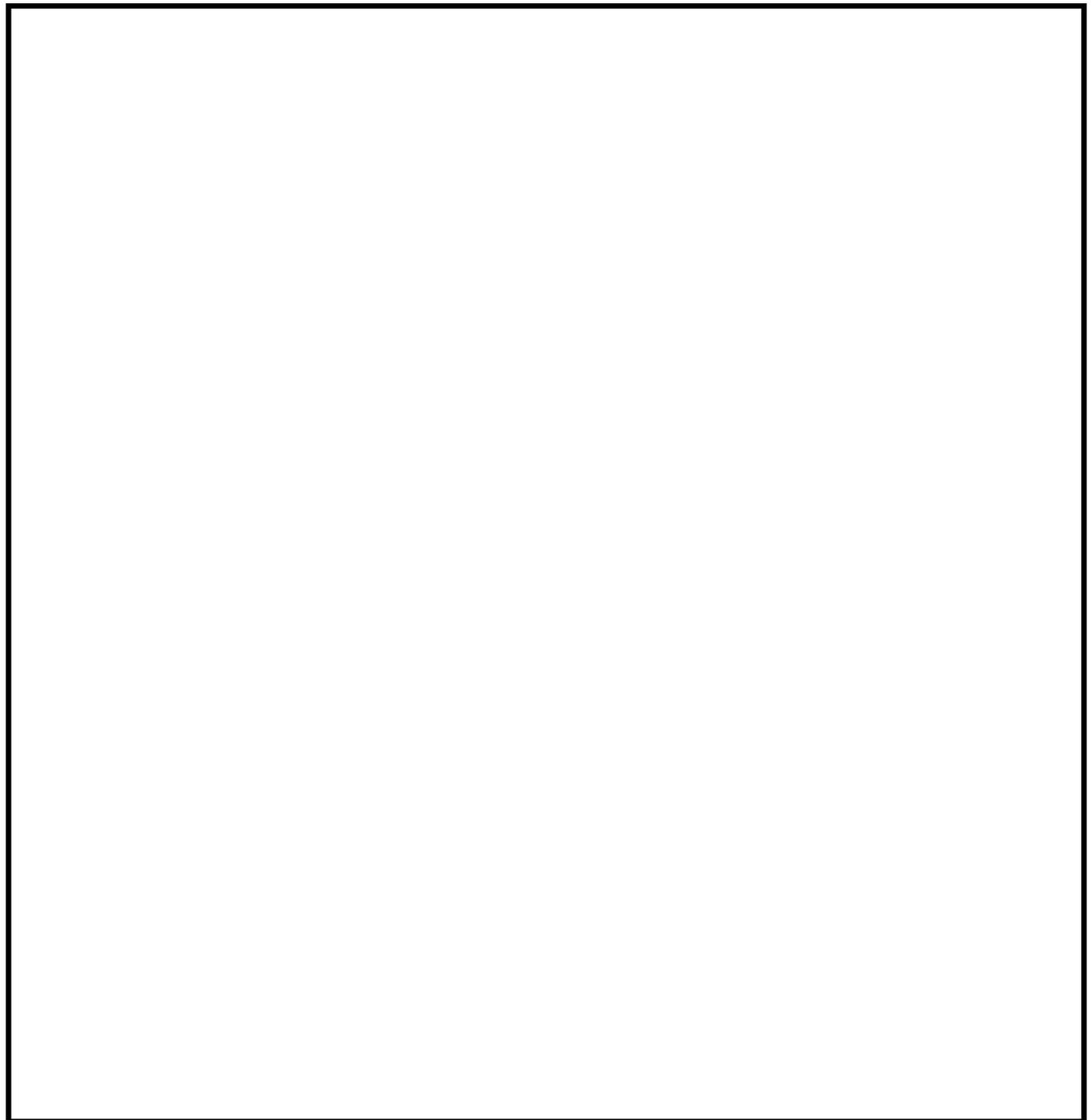


Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos de dicha muestra:

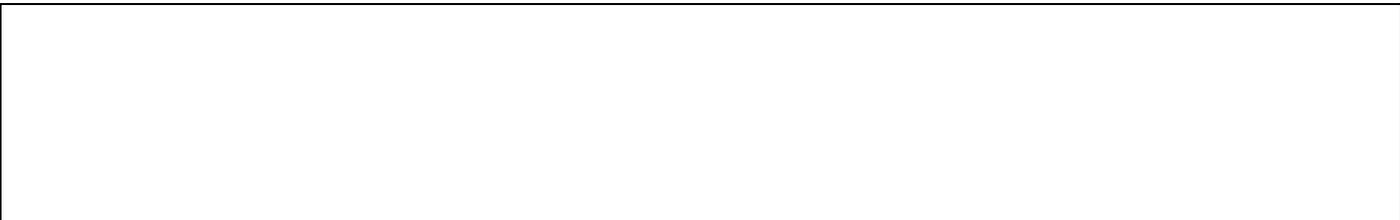
Variable (x)	Marca de clase ( $m_i$ )	Frec.Absoluta ( $f_i$ )	$f_i$ acumuladas	Frec.Relativa ( $h_i$ )	$h_i$ acumuladas
(1'895, 1'945]					
(1'945, 1'995]					
(1'995, 2'045]					
(2'045, 2'095]					
(2'095, 2'145]					
(2'145, 2'195]					
Suma Total →					

**TEORÍA. Medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) en muestras y tablas de frecuencia.  
Representación de diagrama de bigotes con  $Q_1$ ,  $Q_2=Me$  y  $Q_3$  .**





11. La nota media de una clase de 20 alumnos es 5´8. Si se añaden 2 alumnos de notas 9 y 10 respectivamente. ¿Cuál será la nueva media de la clase?.



12. Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números:

2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2



Ordena a continuación los datos de la muestra de menor a mayor:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

A partir de dicha muestra ordenada calcula la media aritmética, la mediana, cuartiles y la moda

13. Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2019 se recogen en la siguiente tabla:

2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------



Ordena a continuación los datos de la muestra de menor a mayor:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

A partir de dicha muestra ordenada calcula la media aritmética, la mediana, cuartiles y la moda

14. En la clase de Educación Física, el profesor ha medido el tiempo (en segundos) que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:



14'92	13'01	12'22	16'72	12'06	10'11	10'58	18'58	20'07	13'15	20'10	12'43	17'51	11'59	11'79
16'94	16'45	10'94	16'56	14'87	17'59	13'74	19'71	18'63	19'87	11'12	12'09	14'20	18'30	17'64

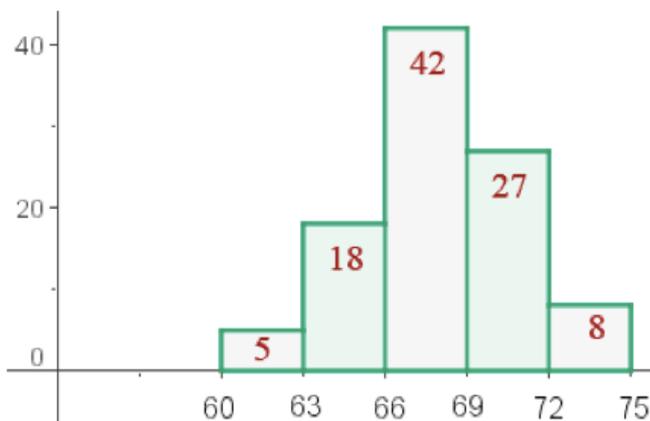
a) Agrupa estos resultados en intervalos de longitud 1 comenzando en 10 segundos y completa la siguiente tabla de frecuencias. A continuación representa el histograma y el polígono de frecuencias de esta tabla.

Variable ( $x_i$ )	$f_i$
Total →	



b) Mirando la tabla frecuencias sabrías decir cuál es la moda, la mediana y los cuartiles.

15. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de 3º ESO es el siguiente:



Forma la tabla de la distribución y calcula la moda y la mediana.

**TEORÍA. Medidas de dispersión (desviación típica, varianza y coeficiente de variación).**

16. Las notas de 15 alumnos en un examen de matemáticas se reflejan en la siguiente tabla:



7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6
---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Coloca la muestra de forma ordenada en la siguiente tabla :

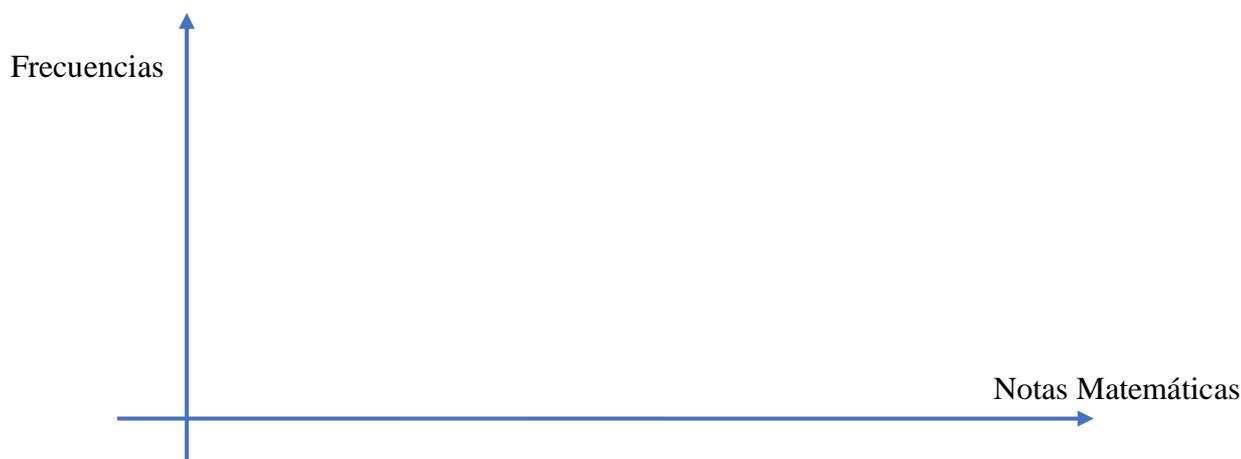
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

a) Calcula a partir de la muestra su media, mediana, cuartiles, moda y varianza.

b) Completa la siguiente tabla de frecuencias y calcula a partir de ella la media y la varianza.

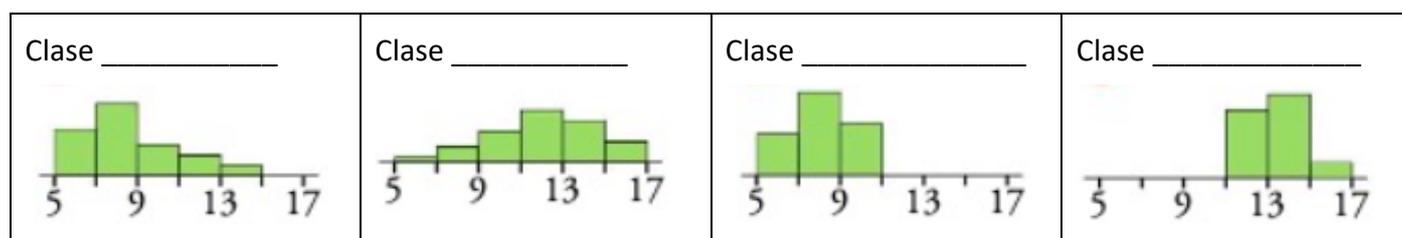
Variable ( $x_i$ )	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$	$\bar{x} =$          $\text{Var}(x) =$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Suma Total →				

c) Representa en diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas de la tabla anterior.



17. A partir de la siguiente tabla que muestra la media y desviación típica de horas de estudio semanales de distintas clases de 3º de ESO, asocia cada clase a su gráfica correspondiente.

Clase	Media ( $\bar{x}$ )	Desviación Típica ( $\sigma_x$ )
3ºA	13,4	1,2
3ºB	8,2	0,8
3ºC	8	2,5
3ºD	12,5	2,3



18. En una tienda de música, el precio medio de las guitarras es de 500€ con una desviación típica de 150€ y el precio de las flautas es de 90€ con una desviación típica de 15€. ¿Cuál tiene más dispersión relativa?.

19. Si en Hellín hay una estatura media de 1'70 m con una desviación típica de 15 cm y en Albacete hay una estatura media de 1'65 m con una desviación típica de 20 cm. ¿En cuál de las hay una mayor dispersión?.

20. En una excursión de montaña participan 25 personas con las siguientes edades:

8 10 10 11 12 36 37 37 38 40 42 43 43 44 45 47 48 50 52 53 55 58 61 63 67

- Hacer una tabla de frecuencias clasificando las edades en 6 intervalos que comienzan en 7,5 y terminan en 67,5. Hallar, a partir de ella, los parámetros  $\bar{x}$ ,  $\sigma$  y CV.
- Prescindiendo de los 5 niños, obtenemos un colectivo de 20 personas. Calcular de nuevo sus parámetros  $\bar{x}$ ,  $\sigma$  y CV, y comparar con los obtenidos en el grupo inicial.
- Hallar los parámetros de posición  $Q_1$ ,  $Q_3$  y  $Me$ , de la distribución original, y construir el diagrama de caja y bigotes correspondiente.

**TEORÍA. Experimento aleatorio/determinista. Suceso elemental. Espacio muestral. Sucesos compuestos.**

21. Marca con una cruz si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:



Experimentos	Aleatorio	Determinista
a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz		
b) Lanzar un dado		
c) Si sales sin paraguas, cuando llueve seguro que te mojas		
d) Sacar una carta de una baraja		
e) Soltar un objeto y ver si cae		
f) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto		
g) Si en una urna hay 5 bolas blancas y 3 rojas, sacamos una y anotamos el color.		
h) El precio de 0,5 kg de rosquillas si cuestan a 3 € el kilo.		
i) La superficie de las comunidades autónomas españolas		
j) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada		
k) El área de un cuadrado del que se conoce el lado		
l) Tiramos 2 dados y anotamos la suma de los valores		
m) Lanzar una chincheta y comprobar como cae		
n) Saber que día de la semana es mañana		
o) Calcular el peso de un jarrón		

22. Dados los siguientes experimentos aleatorios indica cuál es su espacio muestral, un suceso elemental y un suceso compuesto:

Experimento	Espacio muestral	Suceso elemental	Suceso compuesto
a) Sacar una carta de la baraja española.			
b) Lanzar una moneda de 1€ y otra de 2€ para ver caras y cruces.			
c) Lanzar dos monedas de 1€ para ver caras y cruces.			
d) Lanzar un dado con números del 1 al 6			
e) Lanzar 2 dados y suma el resultado obtenido.			
f) Extraer una bola de una bolsa con 7 bolas blancas y 2 negras			

**TEORÍA. Técnica de Diagrama de árbol.**

23. Extraemos 2 bolas de una urna que tiene bolas rojas, azules y verdes. Determina el espacio muestral.



24. Lanzamos 3 monedas simultáneamente. Determina el espacio muestral (utiliza un diagrama de árbol).




**TEORÍA. Operaciones con sucesos: unión e intersección.**

25. Consideramos el experimento “Lanzar un dado” y los siguientes sucesos A=“Sacar impar”, B=“Sacar par”, C=“Sacar n<sup>os</sup> >1”, D=“Sacar n<sup>os</sup> <3”, E=“Sacar n<sup>os</sup> >3”, calcula las siguientes operaciones:  

a) $A \cup B =$	e) $B \cup E =$
b) $A \cap B =$	f) $B \cap E =$
c) $A \cup C =$	g) $C \cup D =$
d) $A \cap C =$	h) $B \cap E =$

26. Consideramos el experimento “Lanzar un dado” y los siguientes sucesos A=“Sacar divisor de 6”, B=“Sacar divisor de 4”, C=“Sacar nºs >5”, D=“Sacar nºs <5”, E=“Sacar múltiplo de 2”, calcula las siguientes operaciones:



a) $A \cup B =$	e) $B \cup E =$
b) $A \cap B =$	f) $B \cap E =$
c) $A \cup C =$	g) $C \cup D =$
d) $A \cap C =$	h) $B \cap E =$

**TEORÍA. Frecuencias absolutas y relativas en un experimento aleatorio.**

27. Tras lanzar un dado 20 veces hemos obtenido las siguientes tiradas: 6 4 3 2 2 1 5 5 6 4 3 2 5 1 2 3 5 2 6 1  
Completa la tabla de frecuencias absolutas y relativas de todos los sucesos elementales del experimento:



Sucesos elementales	Frecuencias Absolutas ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Calcula la frecuencia absoluta de los siguientes sucesos:

Sucesos	Frecuencias Absolutas ( $f_i$ )
a) A=“Sacar par”	$f_A =$
b) B=“Sacar impar”	$f_B =$
c) C=“Sacar nºs mayores que 2”	$f_C =$
d) D=“Sacar nºs menores que 3”	$f_D =$



28. Tras tirar una moneda 10 veces, hemos obtenido: C C C X X C X C C X . Completa la tabla:

Sucesos elementales	Frecuencias Absolutas ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )
C		
X		

29. Vamos a realizar el experimento aleatorio de tirar muchas veces una moneda para ver si se obtiene cara o cruz. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en clase:  

Nº Lanzamientos de moneda	Nº Caras Frecuencia Absoluta ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )
10		
50		
100		
200		
400		

Viendo la frecuencia relativa obtenida, ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?: \_\_\_\_\_

30. Vamos a realizar el experimento aleatorio de tirar muchas veces una chincheta para ver si cae de lado o hacia arriba. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en clase:  

Nº Lanzamientos de chincheta	Nº veces cae de lado Frecuencia Absoluta ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )
10		
50		
100		
200		
400		
800		

Viendo la frecuencia relativa obtenida, ¿Cuál es la probabilidad de caer de lado?: \_\_\_\_\_

31. Vamos a realizar el experimento aleatorio de tirar muchas veces un dado para ver cuando se obtiene un 5. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en clase:  

Nº Lanzamientos de dado	Nº veces que sale 5 Frecuencia Absoluta ( $f_i$ )	Frecuencias Relativas ( $h_i$ )
10		
50		
100		

200		
400		

Viendo la frecuencia relativa obtenida, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?: \_\_\_\_\_

32. Imagina que tras realizar muchas veces el experimento de lanzar una moneda obtenemos que la frecuencia relativa de sacar cruz se aproxima a 0'15. ¿Qué podemos afirmar acerca de la moneda?




**Cálculo de probabilidades utilizando la Regla de Laplace para experimentos equiprobables:**

**TEORÍA. Regla de Laplace.**

33. Dado el experimento aleatorio “Sacar una carta de la baraja española”, calcula la probabilidad de los siguiente sucesos:

A=“Sacar una figura”	P(A)=	E=“Sacar oros o espadas”	P(E)=
B=“Sacar una carta impar”	P(B)=	F=“Sacar el rey de bastos”	P(F)=
C=“Sacar una de espadas”	P(C)=	G=“Sacar una de oros par”	P(G)=
D=“Sacar una de oros”	P(D)=	H=“Sacar figura de bastos”	P(H)=

34. Si en una concentración de coches hay 234 coches rojos y 766 coches azules. ¿Cuál es la probabilidad de que si escogemos un coche al azar sea rojo?.




35. Tenemos una urna con 10 bolas rojas, 7 azules y 3 verdes. Si sacamos una bola, ¿Cuál es la probabilidad de que salga roja?. ¿Y azul?.




36. Si tiramos un dado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un  $n^{\circ} < 5$ ? ¿Y la de sacar un divisor de 4?.




37. Si tiramos dos dados a la vez y consideramos el experimento aleatorio “Suma de los 2 dados”. Completa la siguiente tabla que resume los posibles resultados de dicho experimento:



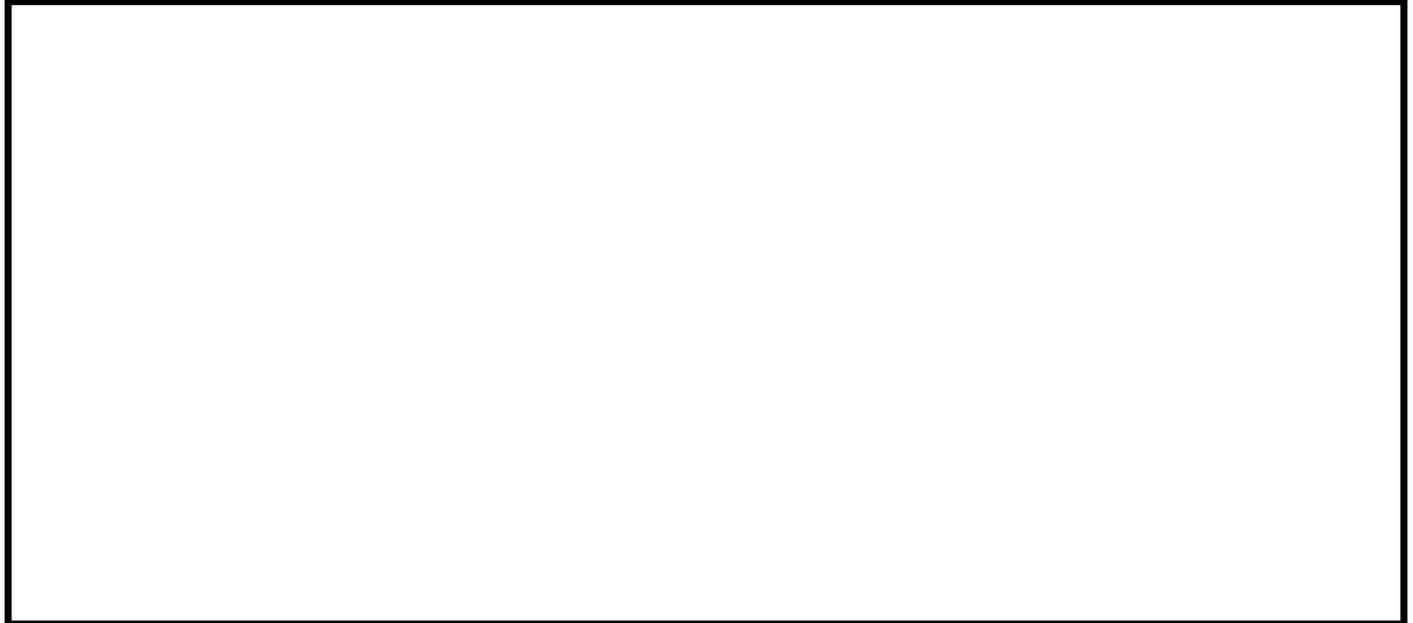
						
						
						
						
						
						
						

a) Calcula la probabilidad de que la suma sea 8.

b) Calcula la probabilidad de que la suma sea 12.

c) Calcula la probabilidad de que la suma sea un número par.

**TEORÍA. Experiencias compuestas.**

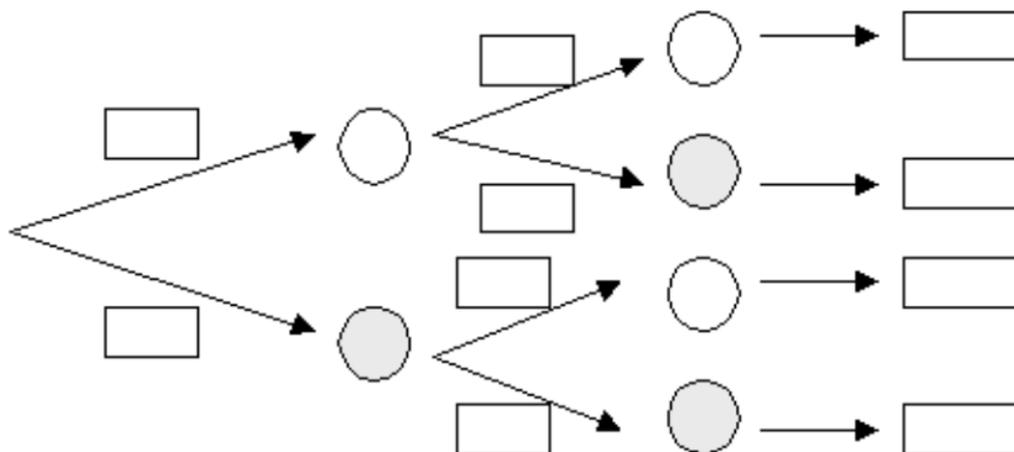


38. Supongamos que tenemos una urna con 3 bolas blancas y 5 negras. Consideremos el experimento “Extraer 2 bolas seguidas con devolución (devolvemos la 1ª bola antes de sacar la segunda)”.

a) ¿Es un experimento compuesto?. Y si es así, ¿los dos experimentos simples que lo componen son independientes?.



b) Completa el siguiente diagrama de árbol con las probabilidades que corresponden a cada rama:



c) Mirando el árbol anterior responde:

Probabilidad de que salgan 2 negras: \_\_\_\_\_

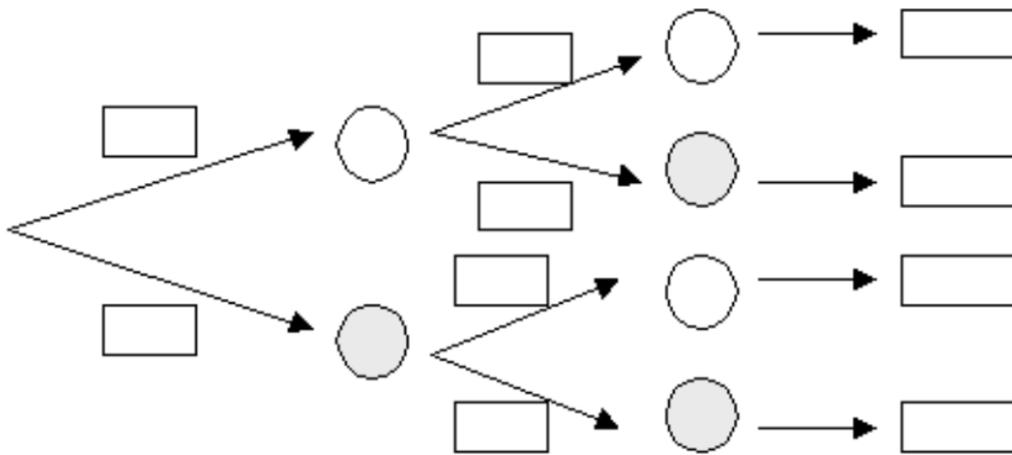
Probabilidad de que salgan 2 blancas: \_\_\_\_\_

Probabilidad de que sacar 1 blanca y 1 negra: \_\_\_\_\_

39. Supongamos que tenemos una urna con 3 bolas blancas y 5 negras. Consideremos el experimento “Extraer 2 bolas seguidas sin devolución (no devolvemos la 1ª bola antes de sacar la segunda)”.

a) ¿Es un experimento compuesto?. Y si es así, ¿los dos experimentos simples que lo componen son independientes?.

b) Completa el siguiente diagrama de árbol con las probabilidades que corresponden a cada rama:



c) Mirando el árbol anterior responde:

Probabilidad de que salgan 2 negras: \_\_\_\_\_

Probabilidad de que salgan 2 blancas: \_\_\_\_\_

Probabilidad de que sacar 1 blanca y 1 negra: \_\_\_\_\_

40. Consideremos el experimento aleatorio “Tirar 2 veces una moneda”. Representa mediante un diagrama de árbol las posibles soluciones del experimento:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cruz?.

41. Consideramos el experimento aleatorio “Tirar un dado 2 veces”. Representa mediante un diagrama de árbol las posibles soluciones del experimento:

a) Probabilidad de “sacar algún 1”.

b) La suma de los dígitos es 8.

c) No sacar ningún 2.

42. Una urna contiene 3 bolas rojas y 4 azules. Se sacan tres bolas. Calcula la probabilidad de que las tres bolas sean del mismo color:

a) Sacando las bolas en una sola extracción.

b) Sacando las bolas de una en una y devolviendo cada vez la bola a la urna.

43. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo (con devolución). Establece el diagrama de árbol correspondiente con las probabilidades de cada rama:

Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

c) Ninguna sea negra.

44. En una urna hay 8 bolas blancas y 10 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo (sin devolución). Establece el diagrama de árbol correspondiente con las probabilidades de cada rama:

Calcula la probabilidad de que:

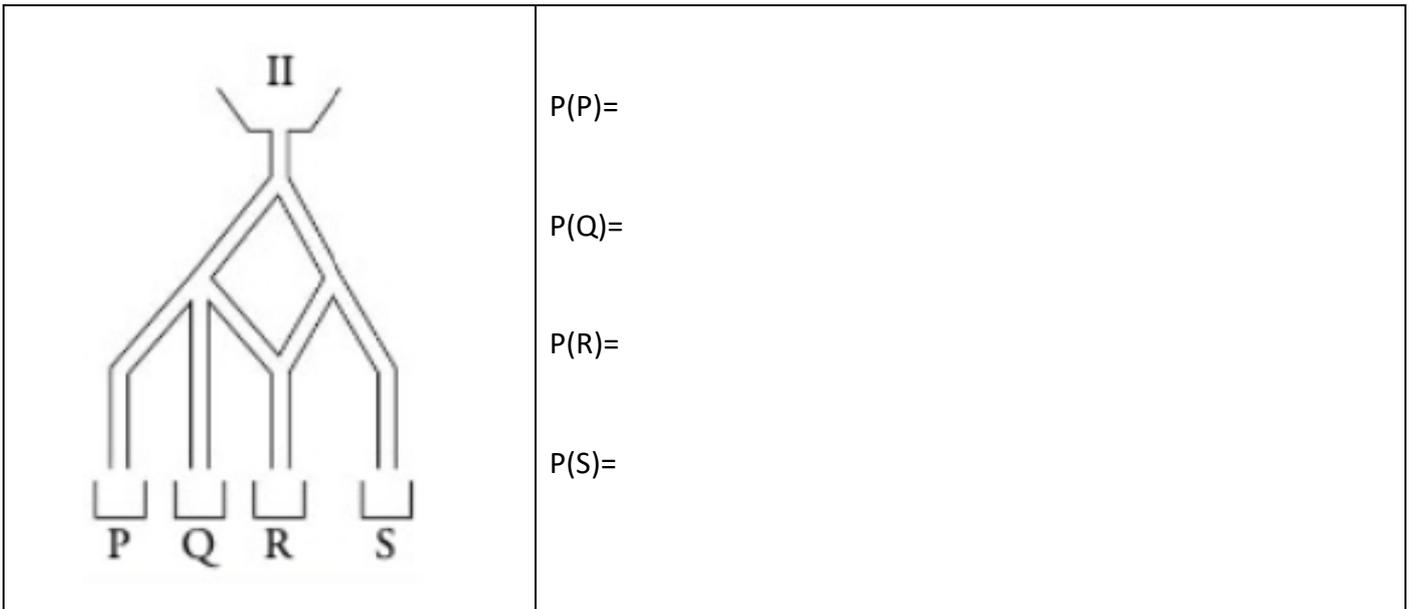
a) Las dos sean negras.

b) Haya al menos una negra.

c) Ninguna sea negra.

45. Dejamos caer una bola por los siguientes embudos. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en cada casilla, suponiendo que en cada bifurcación la bola tiene la misma probabilidad de ir a cada rama?.

	<p><math>P(A)=</math></p> <p><math>P(B)=</math></p> <p><math>P(C)=</math></p> <p><math>P(D)=</math></p> <p><math>P(E)=</math></p>
--	---



46. Se considera el experimento aleatorio “Sacar dos cartas de la baraja española”. Calcula:

a) Probabilidad de sacar dos reyes.

b) Probabilidad de sacar las dos de bastos.

c) Probabilidad de sacar la primera de espadas y la segunda de bastos.

d) Probabilidad de no obtener ningún basto.

47. Se considera el experimento aleatorio “tirar una moneda tres veces”. Completa el diagrama de árbol que representa las posibles soluciones de este experimento:

a) Probabilidad de sacar cara en la primera tirada.

b) Probabilidad de sacar cara en la segunda tirada.

c) Sacar cara en la tercera tirada.

d) Sacar tres caras.

e) No sacar ninguna cara.